Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(11), 1106-1114
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011132

Hans汉斯

基于多分辨分析的小波紧框架构造

李　晨，李万社

陕西师范大学，数学与信息科学学院，陕西　西安
Email: 1113927976@qq.com, liwanshe@126.com

收稿日期：2020年11月1日；录用日期：2020年11月20日；发布日期：2020年11月27日

摘　要

本文主要研究了离散序列基于多分辨分析(MRA)生成小波紧框架的构造方法。首先介绍了多分辨分析和基于多分辨分析的小波紧框架的相关知识，然后给出所定义的离散序列生成平方可积函数空间小波紧框架的充分条件，最后利用Matlab工具给出两个数值算例构造的细分函数和小波函数的函数图像。

关键词

小波紧框架，多分辨分析，细分函数

Wavelet Tight Frame Construction Based on Multi-Resolution Analysis

Chen Li, Wanshe Li

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi
Email: 1113927976@qq.com, liwanshe@126.com

Received: Nov. 1st, 2020; accepted: Nov. 20th, 2020; published: Nov. 27th, 2020

Abstract

This paper mainly studies the construction method of tight wavelet frame generated by discrete sequences based on multi-resolution analysis (MRA). First, we introduce the related knowledge of multi-resolution analysis and wavelet tight frames based on multi-resolution analysis. And then sufficient conditions for discrete sequences are given to generate wavelet tight frame with square integrable function space. Finally, the function images of refinable function and wavelet function constructed by two numerical examples are given by Matlab.

Keywords

Wavelet Tight Frame, Multi-Resolution Analysis, Refinable Function

文章引用: 李晨, 李万社. 基于多分辨分析的小波紧框架构造[J]. 理论数学, 2020, 10(11): 1106-1114.
DOI: 10.12677/pm.2020.1011132

1. 引言

经过多年的研究和发展，框架理论已经形成了一套相对比较完整的理论体系，其中小波框架和 Gabor 框架是框架理论中的一个十分重要研究领域[1] [2]。小波框架和 Gabor 框架的大量文献目前在信号图像处理、时频分析、量子力学、电子工程的滤波器设计等多个相关方面被广泛应用[3] [4]。由于基于多分辨分析(MRA)的小波紧框架，为分段函数提供了稀疏逼近且保证了快速分解算法和重构算法的存在，故基于多分辨分析的小波紧框架在图像处理中得以许多应用[5] [6] [7]。基于的多分辨分析小波紧框架可以看作为基于正交多分辨分析小波的推广，它与基于正交多分辨分析小波是小波分析研究中的两大热点，其区别主要在于冗余性质。正是由于基于小波多分辨分析紧框架具有的冗余性使得应用基于小波多分辨分析紧框架在恢复原始信号的数值计算中更加稳定，与原始信号误差更小[8] [9] [10] [11]。

2. MRA 和基于 MRA 小波紧框

在本节中，主要介绍多分辨分析(MRA)以及基于多分辨分析小波紧框架的相关知识。在本文中，我们先给出平方可积函数空间 $L_2(\mathrm{R})$ 上的相关定义：

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathrm{R}}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \qquad \forall f,g\in L_2(\mathrm{R})$$

$$\|f\|^2=\langle f,f\rangle \qquad \forall f\in L_2(\mathrm{R})$$

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathrm{R}}f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x \qquad \forall f\in L_2(\mathrm{R})$$

$$\hat{a}(\xi)=\sum_{k\in \mathrm{Z}}a(k)\mathrm{e}^{-ik\xi} \qquad \forall a\in l_2(\mathrm{Z})$$

1987 年，Meyer 和 Mallat 第一次提出了多分辨分析的概念，将多分辨分析思想应用到小波分析中，给出了构造 $L_2(\mathrm{R})$ 正交小波基的一般方法，并提出了快速小波变换分解和重构算法，即 Mallat 算法。1988 年，Daubechies 构造了基于多分辨分析的紧支撑正交小波基。在本文中，我们应用 C. De Boor 等人给出的更为一般的多分辨分析[12]。

对于 $\forall\varphi\in L_2(\mathrm{R})$，记 $\varphi_{j,k}=p^{j/2}\varphi(p^jx-k)$， $j,k\in\mathrm{Z}$，此处 $p\in\mathrm{Z}^+$ 且 $p>1$。记 $V_j=\overline{\mathrm{Span}\{\varphi_{j,k}:k\in\mathrm{Z}\}}$ 为空间 $L_2(\mathrm{R})$ 中的由函数族 $\{\varphi_{j,k}:k\in\mathrm{Z}\}$ 经过平移伸缩所张成的空间 $L_2(\mathrm{R})$ 中的线性闭子空间。下面给出多分辨分析的概念。

定义 2.1：闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in\mathrm{Z}}$ 称为一个多分辨分析(MRA)，如果 $\{V_j\}_{j\in\mathrm{Z}}$ 满足下列条件：

1) $V_j\subset V_{j+1}$，$\forall j\in\mathrm{Z}$；

2) $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$；

3) $\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L_2(\mathrm{R})$；

则称 $\{V_j\}_{j\in\mathrm{Z}}$ 为函数 φ 生成空间 $L_2(\mathrm{R})$ 的一个多分辨分析。

定义 2.2：若函数 $\varphi\in L_2(\mathrm{R})$ 存在离散序列 $a_0\in l_2(\mathrm{Z})$ 满足

$$\varphi(x)=p\sum_{k\in Z}a_0(k)\varphi(px-k),\quad x\in\mathrm{R} \tag{1}$$

则称函数 $\varphi(x)$ 为细分函数(或尺度函数)，称序列 a_0 为细分函数 φ 的细分面具。对等式(1)两边同时做傅里叶变换，得到

$$\hat{\varphi}(p\xi)=\hat{a}_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi),\quad \xi\in\mathrm{R} \tag{2}$$

类似于多分辨分析中细分函数 φ 的定义，定义小波函数族 $\Psi=\{\psi_l\}_{l=1}^{M-1}$

$$\psi_l(x)=p\sum_{k\in Z}a_l(k)\varphi(px-k),\quad x\in\mathrm{R} \tag{3}$$

其中称离散序列族 $\{a_l\}_{l=1}^{M-1}\in l_2(\mathrm{Z})$ 为函数族 $\{\psi_l\}_{l=1}^{M-1}$ 的小波面具，同理对等式(3)两边同时做傅里叶变换，得到

$$\hat{\psi}_l(p\xi)=\hat{a}_l(\xi)\hat{\varphi}(\xi),\quad x\in\mathrm{R} \tag{4}$$

从而可定义小波系 $\mathrm{X}(\Psi)$，即为

$$\mathrm{X}(\Psi)=\left\{\psi_{l,j,k}=p^{j/2}\psi_l\left(p^jx-k\right):1\le l\le M-1,j,k\in\mathrm{Z}\right\} \tag{5}$$

定理 2.1：设函数 φ 为 $L_2(\mathrm{R})$ 中的紧支撑细分函数满足 $\hat{\varphi}(0)=1$，并定义由函数 φ 生成的闭子空间 $V_j=\overline{\mathrm{Span}\{\varphi_{j,k}:k\in\mathrm{Z}\}}$，则可得闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in\mathrm{Z}}$ 形成一个多分辨分析。

定义 2.3：希尔伯特空间 H 上的函数集合 $\{f_k:k\in J\}$ 称为一个框架，如果对 $\forall f\in H$，均存在正常数 A，B 使得下式成立

$$A\|f\|^2\le\sum_{k\in J}\left|\langle f,f_k\rangle\right|^2\le B\|f\|^2$$

并称 A，B 分别为框架的下界和上界。

特别的，若有 $A=B=1$，则称框架 $\{f_k:k\in J\}$ 为紧框架，即 $\|f\|^2=\sum_{k\in J}\left|\langle f,f_k\rangle\right|^2$。

定理 2.2：(酉扩展定理)设 $\varphi\in L_2(\mathrm{R})$ 为一个细分函数且满足 $\hat{\varphi}(0)=1$，其细分面具 $a_0\in l_2(\mathrm{Z})$ 为有限支撑序列，根据(3)式给出由小波面具 $\{a_l\}_{l=1}^{M-1}\in l_2(\mathrm{Z})$ 生成的函数族 $\{\psi_l\}_{l=1}^{M-1}$，如果面具 $\{a_0,a_1,\cdots,a_{M-1}\}$ 满足

$$\sum_{l=0}^{M-1}\hat{a}_l(\xi)\overline{\hat{a}_l(\xi+2\pi\mu)}=\delta_{\mu,0}\qquad a.e.\ \xi\in\mathrm{R},\forall\mu\in\mathrm{Z}/p\mathrm{Z} \tag{6}$$

等价于 $\forall m\in\mathrm{Z}$，$\Omega_j=(p\mathrm{Z}+j)\cap\mathrm{supp}(a_0)$，$j\in\mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$

$$\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=\frac{1}{p}\delta_{m,0} \tag{7}$$

则根据(5)式中所定义的小波系 $\mathrm{X}(\Psi)$ 形成 $L_2(\mathrm{R})$ 的一个小波紧框架，且由函数 φ 生成空间 $L_2(\mathrm{R})$ 中的多分辨分析，即闭子空间 $\{V_j\}_{j\in\mathrm{Z}}$。

3. *p*-带小波紧框架的构造

在本节中，我们主要根据酉扩展定理给出离散有限支撑序列 $\{a_l\}_{l=1}^{M-1}\in l_2(\mathrm{Z})$ 通过(5)式所定义的小波系统形成 $L_2(\mathrm{R})$ 小波紧框架的充分条件。

定理 3.1：设 $a\in l_2(\mathrm{Z})$ 为一个有限支撑序列，由离散序列 a 来定义离散序列 $a_l(m)=a(m)\mathrm{e}^{-i2\pi lm/M}$，$l=0,1,\cdots,M-1$，然后根据(1)式和(3)式分别定义细分函数 φ 和函数族 $\Psi=\{\psi_l\}_{l=1}^{M-1}$，则若满足：

i) $M \ge N$；

ii) $\sum_{k\in\Omega_j}|a(k)|^2=\frac{1}{pM}$，$\forall\Omega_j=(p\mathrm{Z}+j)\cap[0,N-1]$，$j\in\mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$；

iii) $\sum_{k\in\Omega_j}a(k)=\frac{1}{p}$；

则由(1)式所定义的细分函数φ生成空间$L_2(\mathrm{R})$的一个多分辨分析，且根据(3)式和(5)式定义的小波系$\mathrm{X}(\Psi)$形成$L_2(\mathrm{R})$的一个小波紧框架。

为了证明定理 3.1 给出以下的引理。

记 $G(\xi)=\begin{bmatrix}\hat{a}_0(\xi) & \hat{a}_1(\xi) & \cdots & \hat{a}_{M-1}(\xi)\\ \hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right) & \hat{a}_1\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right) & \cdots & \hat{a}_{M-1}\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right) & \hat{a}_1\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right) & \cdots & \hat{a}_{M-1}\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right)\end{bmatrix}$

引理 3.1：设面具$\{a_0,a_1,\cdots,a_{M-1}\}$满足(6)式，则对$\forall\xi\in\mathrm{R}$有

$$\sum_{k=0}^{p-1}\left|\hat{a}_l\left(\xi+\frac{2\pi k}{p}\right)\right|^2\le 1,\quad l=0,1,\cdots,M-1 \tag{8}$$

证明：面具$\{a_0,a_1,\cdots,a_{M-1}\}$满足(6)式，即$G(\xi)G^*(\xi)=\mathrm{I}_p$，其中$G^*(\xi)$表示矩阵$G(\xi)$的共轭转置。根据矩阵的相关性质，我们只需证明对$l=0$时成立即可。

记 $G_0(\xi)=\begin{bmatrix}\hat{a}_1(\xi) & \hat{a}_2(\xi) & \cdots & \hat{a}_{M-1}(\xi)\\ \hat{a}_1\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right) & \hat{a}_2\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right) & \cdots & \hat{a}_{M-1}\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{a}_1\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right) & \hat{a}_2\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right) & \cdots & \hat{a}_{M-1}\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right)\end{bmatrix}$

且记 $\alpha=\left(\hat{a}_0(\xi),\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right),\cdots,\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right)\right)^{\mathrm{T}}$，则可得

$$G_0(\xi)G_0^*(\xi)=\mathrm{I}_p-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$$

其中 $\begin{cases}\beta_1=\left(1-|\hat{a}_0(\xi)|^2,-\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right)\overline{\hat{a}_0(\xi)},\cdots,-\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right)\overline{\hat{a}_0(\xi)}\right)^{\mathrm{T}}\\ \beta_2=\left(-\hat{a}_0(\xi)\overline{\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right)},1-\left|\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right)\right|^2,\cdots,-\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right)\overline{\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right)}\right)^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_p=\left(-\hat{a}_0(\xi)\overline{\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right)},-\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi}{p}\right)\overline{\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right)},\cdots,1-\left|\hat{a}_0\left(\xi+\frac{2\pi(p-1)}{p}\right)\right|^2\right)^{\mathrm{T}}\end{cases}$

计算可知，矩阵 $G(\xi)G^*(\xi)$ 的 p 个特征值分别为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{p-1}=1$，$\lambda_p=1-\sum_{k=0}^{p-1}\left|\hat{a}_l\left(\xi+\frac{2\pi k}{p}\right)\right|^2$ 。

又因为矩阵 $G(\xi)G^*(\xi)$ 为一个半正定矩阵，从而有 $\lambda_p\ge 0$，即 $l=0$ 时(8)式成立。

引理 3.2： 设 $a\in l_2(\mathrm{Z})$ 为一个有限支撑序列，即 $a(m)=0$，$\forall m\notin[0,N-1]\cap\mathrm{Z}$，且可由序列 $a\in l_2(\mathrm{Z})$ 定义 M 个离散紧支撑序列，即 $a_l(m)=a(m)\mathrm{e}^{-i2\pi lm/M}$，$l=0,1,\cdots,M-1$ 且如果满足：

i) $M\ge N$；

ii) $\sum_{k\in\Omega_j}|a(k)|^2=\frac{1}{pM}$，$\forall\Omega_j=(p\mathrm{Z}+j)\cap[0,N-1]$，$j\in\mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$；

则有定义的离散序列 $a_l(m)$，$l=0,1,\cdots,M-1$ 满足 $\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=\frac{1}{p}\delta_{m,0}$ 。

证明： $\forall m\notin[0,N-1]\cap\mathrm{Z}$，由 $a(m)=0$ 可得

对 $\forall m\notin[0,N-1]\cap\mathrm{Z}$，$a_l(m)=a(m)\mathrm{e}^{-i2\pi lm/M}=0$，$l=0,1,\cdots,M-1$ 。则有 $\forall m\notin[1-N,N-1]$，

$$\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=0$$

若 $1\le m\le N-1$ (或 $1-N\le m\le -1$)，由(i) $M\ge N$ 可知

$$\sum_{l=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-i2\pi lm/M}=0$$

则当 $1\le m\le N-1$ (或 $1-N\le m\le -1$)时，

$$\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=\sum_{k\in\Omega_j}\sum_{l=0}^{M-1}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}\sum_{l=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-i2\pi lm/M}=0$$

下面考虑当 $m=0$ 时，

$$\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=\sum_{k\in\Omega_j}\sum_{l=0}^{M-1}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}\sum_{l=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-i2\pi lm/M}=M\sum_{k\in\Omega_j}|a(k)|^2$$

由(ii) $\sum_{k\in\Omega_j}|a(k)|^2=\frac{1}{pM}$ 可得 $\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=\frac{1}{p}$

即证 $\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k\in\Omega_j}a_l(k)\overline{a_l(k+m)}=\frac{1}{p}\delta_{m,0}$，$l=0,1,\cdots,M-1$ 。

引理 3.3： 设序列 $a\in l_2(\mathrm{Z})$ 为一个有限支撑序列，对于 $\forall\Omega_j=(p\mathrm{Z}+j)\cap[0,N-1]$，$j\in\mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$，满足 $\sum_{k\in\Omega_j}a(k)=\frac{1}{p}$，定义离散序列 $a_l(m)=a(m)\mathrm{e}^{-i2\pi lm/M}$，$l=0,1,\cdots,M-1$，且满足(6)式，则根据定义的细分函数 $\varphi\in L_2(\mathrm{R})$ 且满足 $\hat{\varphi}(0)=1$ 。

证明： 根据定义有 $\sum_{k\in\Omega_j}a_0(k)=\sum_{k\in\Omega_j}a(k)=\frac{1}{p}$，则可知 $\sum_{k\in\mathrm{Z}}a_0(k)=1$，又由 a_0 有限支撑，从而得 $\hat{a}_0(0)=1$，即存在唯一紧支撑细分函数 φ 满足 $\hat{\varphi}(0)=1$，且其傅里叶变换为 $\hat{\varphi}(\xi)=\prod_{j=0}^{\infty}\hat{a}_0(p^{-j}\xi)$。

下面定义函数列 $\{\hat{f}_n\}_{n\in\mathrm{N}}$

$$\hat{f}_n(\xi)=\hat{a}_0(p^{-1}\xi)\hat{f}_{n-1}(p^{-1}\xi)=\prod_{j=1}^{n}\hat{a}_0(p^{-j}\xi)\hat{f}_0(p^{-j}\xi)$$

其中 $\hat{f}_0 = 1_{[-\pi,\pi]}$，且 $\left\{\hat{f}_n\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的依点列收敛到 $\hat{\varphi}$。

$$
\begin{aligned}
\left\|\hat{f}_n\right\|^2 &= \int_{-\pi p^n}^{\pi p^n}\left|\prod_{j=1}^{n}\hat{a}_0\left(p^{-j}\xi\right)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^{2\pi p^n}\left|\prod_{j=1}^{n}\hat{a}_0\left(p^{-j}\xi\right)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{\mu=0}^{p-1}\int_{2\pi\mu p^{n-1}}^{2\pi(\mu+1)p^n}\left|\prod_{j=1}^{n}\hat{a}_0\left(p^{-j}\xi\right)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{\mu=0}^{p-1}\int_0^{2\pi p^{n-1}}\left|\prod_{j=1}^{n}\hat{a}_0\left(p^{-j}\xi + p^{n-j-1}2\pi\mu\right)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^{2\pi p^{n-1}}\left|\prod_{j=1}^{n}\hat{a}_0\left(p^{-j}\xi\right)\right|^2\left(\sum_{\mu=0}^{p-1}\left|\hat{a}_0\left(p^{-n}\xi + \frac{2\pi\mu}{p}\right)\right|^2\right)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

根据引理 3.1，当 $l=0$ 时，即有 $\sum_{k=0}^{p-1}\left|\hat{a}_0\left(\xi + \frac{2\pi k}{p}\right)\right|^2 \le 1$，

从而 $\left\|\hat{f}_n\right\|^2 \le \int_0^{2\pi p^{n-1}}\left|\prod_{j=1}^{n}\hat{a}_0\left(p^{-j}\xi\right)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \left\|\hat{f}_{n-1}\right\|^2$

根据归纳法，得

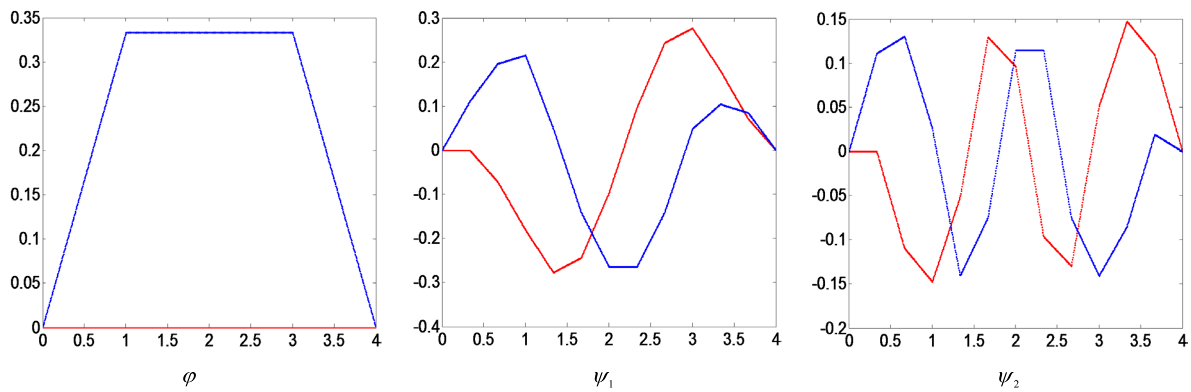
$$
\left\|\hat{f}_n\right\|^2 \le \left\|\hat{f}_0\right\|^2 = 2\pi,\quad \forall n \ge 0
$$

因为 $\left\{\hat{f}_n\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ 依点列收敛到 $\hat{\varphi}$，根据法图引理可得 $\left\|\hat{\varphi}\right\|^2 \le \liminf_{n\to\infty}\left\|\hat{f}_n\right\|^2 \le 2\pi$，即证 $\varphi \in L_2(\mathrm{R})$。

利用以上三个引理和定理 2.2 易证定理 3.1。

4. 3-带小波紧框架数值算例

例 1. 当 $M=9, p=3$ 时，我们可得离散序列 $a_0 = \frac{1}{9}\left(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9}\right)$，从而可以分别给出相应的细分面具和小波面具 $a_l(m)$，$l=0,1,\cdots,M-1$，由 $a_l(m)$ 生成的细分函数和函数族 $\{\psi_l\}_{l=1}^{M-1}$ 的函数图像如图 1。



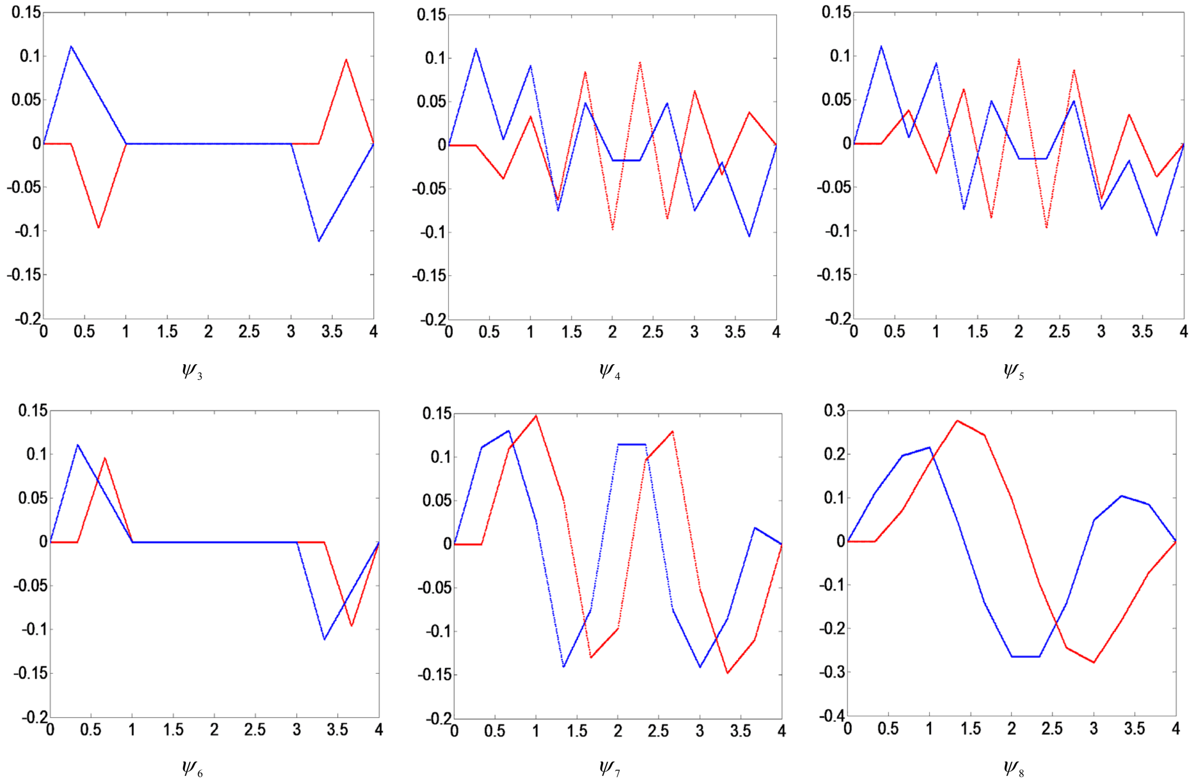
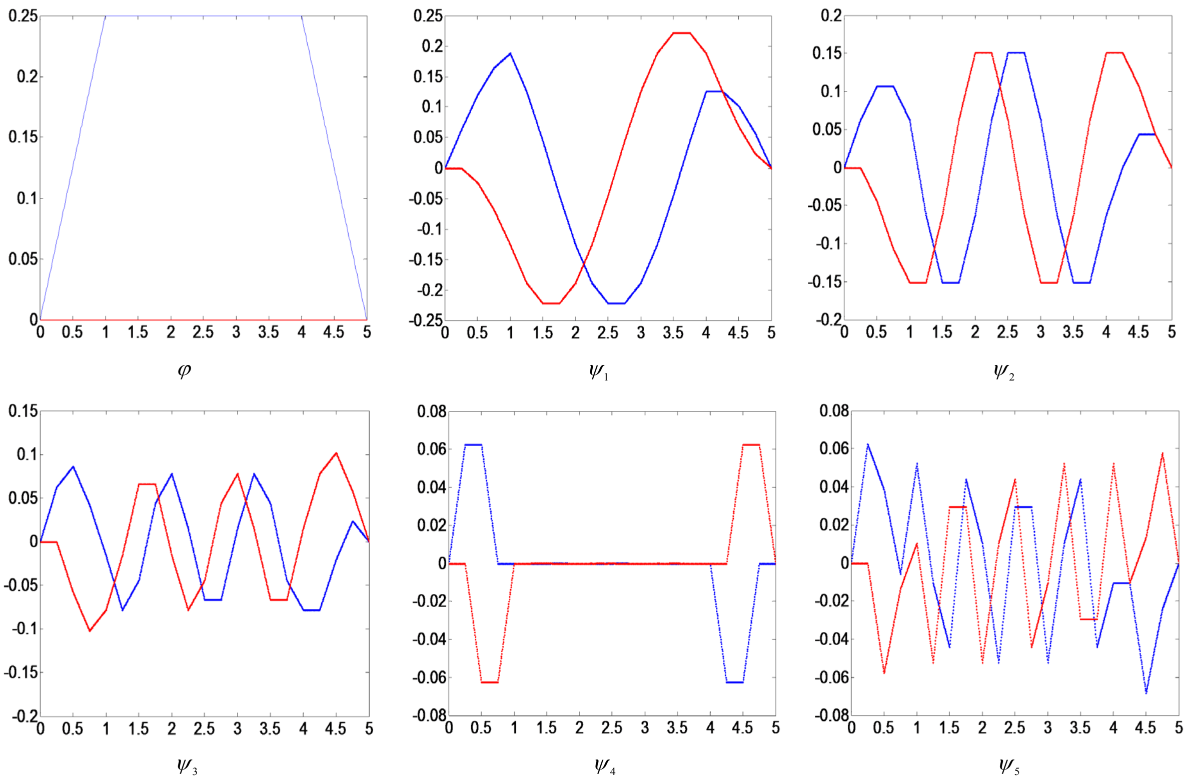


Figure 1. The refinable function and framelets if, $M = 9, p = 3$ (the blue and red images correspond to the real and imaginary parts of the function respectively)

图 1. $M = 9, p = 3$ 时细分函数和小波函数的函数图像(其中蓝色、红色图像分别对应函数的实部图像、虚部图像)



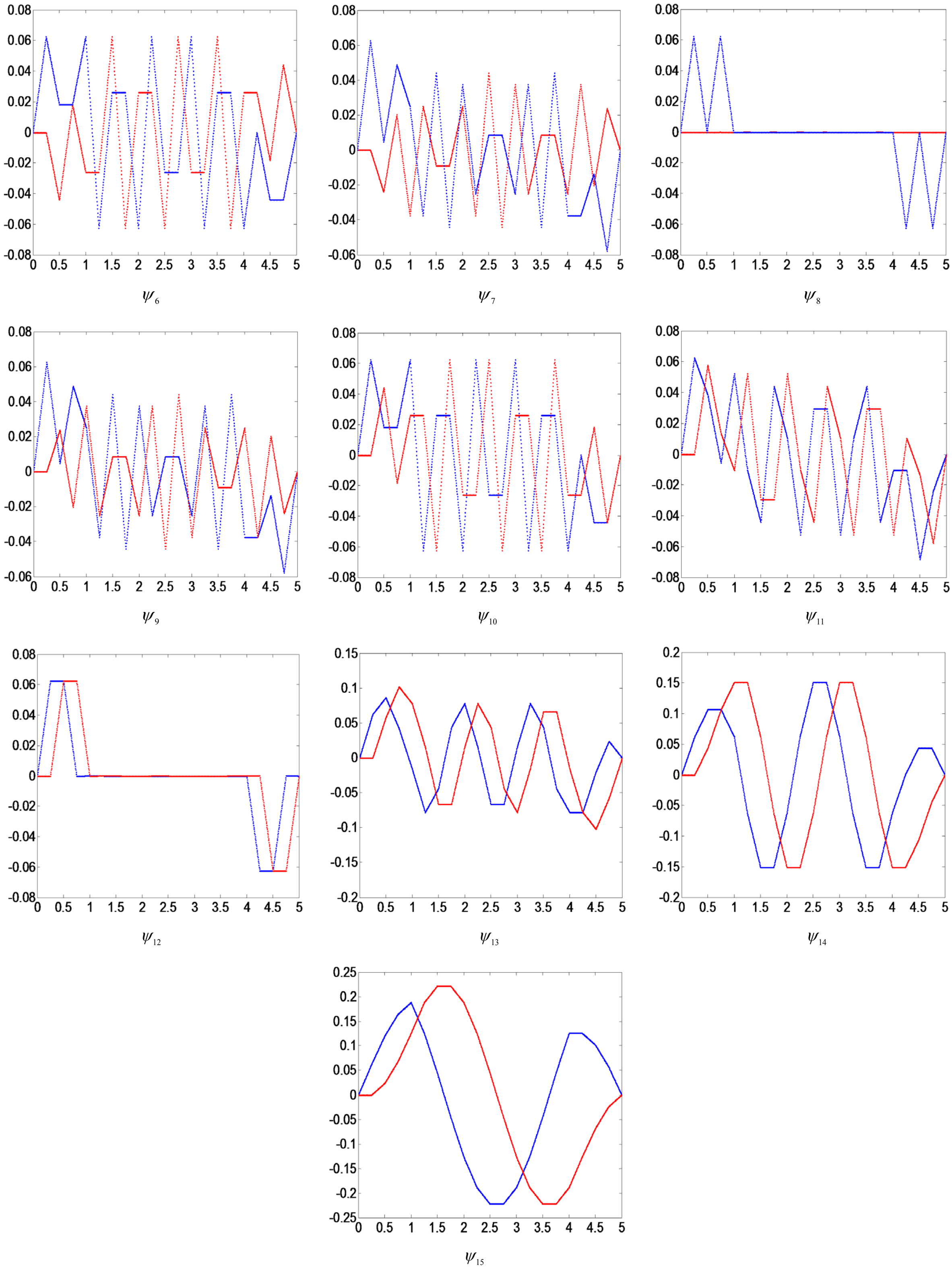


Figure 2. The refinable function and framelets if, $M = 16, p = 4$ (the blue and red images correspond to the real and imaginary parts of the function respectively)

图 2. $M = 16, p = 4$ 时细分函数和小波函数的函数图像(其中蓝色、红色图像分别对应函数的实部图像、虚部图像)

例 2. 当 $M=16, p=4$ 时，我们可得离散序列 $a=\frac{1}{16}\left(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{16}\right)$，从而可以分别给出相应的细分面具和小波面具 $a_l\left(m\right)$，$l=0,1,\cdots,M-1$，由 $a_l\left(m\right)$ 生成的细分函数和函数族 $\left\{\psi_l\right\}_{l=1}^{M-1}$ 的函数图像如图 2。

参考文献

[1] 黄永东, 程正兴. α 带小波紧框架的显式构造方法[J]. 数学物理学报, 2007, 27(1): 7-18.

[2] 黄焱. 基于 MRA 的三带小波紧框架的参数化研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京化工大学, 2012.

[3] Mallat, S. (1989) A Theory of Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Transform. *IEEE Transactions*, **11**, 674-693. https://doi.org/10.1109/34.192463

[4] Zhang, Z. and Saito, N. (2009) Constructions of Periodic Wavelet Frames Using Extension Principles. *Applied and Computation Harmonic Analysis*, **27**, 12-23. https://doi.org/10.1016/j.acha.2008.10.003

[5] Dong, B. and Shen, Z. (2010) MRA-Based Wavelet Frames and Applications, IAS/Park City Mathematics Series: The Mathematics of Image Processing, Vol. 19, Park City Mathematics Institute, 7-185.

[6] Fan, Z., Ji, H. and Shen, Z. (2016) Dual Gramian Analysis: Duality Principle and Unitary Extension Principle. *Mathematics of Computation*, **85**, 239-270. https://doi.org/10.1090/mcom/2987

[7] Fan, Z., Heinecke, A. and Shen, Z. (2016) Duality for Frames. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **22**, 71-136. https://doi.org/10.1007/s00041-015-9415-0

[8] Christensen, O. (2008) Frames and Bases: An Introductory Course. Birkhauser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4678-3

[9] Hur, Y. and Lubberts, Z. (2017) New Constructions of Nonseparable Tight Wavelet Frames. *Linear Algebra and its Applications*, **534**, 13-35. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.08.002

[10] 方清城. MATLAB R2016a 小波分析 22 个算法实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2018: 338-342.

[11] 郝菁, 崔丽鸿. 构造 α 带对偶小波紧框架一个充分条件的证明[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2011, 38(2): 134-138.

[12] Daubechies, I., Han, B., Ron, A. and Shen, Z.W. (2003) Framelets: MRA-Based Constructions of Wavelet Frames. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **14**, 1-46. https://doi.org/10.1016/S1063-5203(02)00511-0