Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1162-1166
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012138

Hans汉斯

线性抛物算子初边值问题解的最大模估计

马　燕，韩　菲*，梁诗雨

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: 3295320486@qq.com, *137823121@qq.com

收稿日期：2020年11月19日；录用日期：2020年12月16日；发布日期：2020年12月24日

摘　要

文章介绍了一个由线性抛物算子变成 Δu 的函数变换(讨论 n 维情形)，把第二初边值问题转化成第三初边值问题。

关键词

线性抛物算子，函数变换，初边值问题

Estimation of Maximum Modularity for the Solution of Initial Boundary Value Problem of Linear Parabolic Operator

Yan Ma, Fei Han*, Shiyu Liang

School of Mathematics Science, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
Email: 3295320486@qq.com, *137823121@qq.com

Received: Nov. 19th, 2020; accepted: Dec. 16th, 2020; published: Dec. 24th, 2020

Abstract

This paper introduces a function transformation from a linear parabolic operator to a Δu (discussing the n dimension case), which transforms the second initial boundary value problem into the third initial boundary value problem.

*通讯作者。

文章引用: 马燕, 韩菲, 梁诗雨. 线性抛物算子初边值问题解的最大模估计[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1162-1166.
DOI: 10.12677/pm.2020.1012138

Keywords

Linear Parabolic Operator, Function Transformation, Initial Boundary Value Problem

1. 引言

抛物型方程是一个非常重要的方程，它可以描述空间中热量传导、分子扩散等物理现象。文章介绍了一个函数变换，这个函数变换是将线性抛物算子变成 Δu，把第二初边值问题转化成第三初边值问题，这样才可以利用原来的结果，得到其定值解的唯一性和稳定性。

抛物方程的初边值问题一直以来都是人们所研究的一个非常重要的方程，2013 年黄守军和段双双给出了 n 维抛物型方程解的最大模估计，我们知道对于一维抛物型方程的第二初边值问题，不能直接利用最大模估计，它是通过构造一个函数变换将第二初边值问题转化成第三初值问题，受此启发黄守军和段双双也是通过同样的方法解决了 n 维抛物型方程解的最大模估计，而他们是只考虑了方程的特殊形式，在这里我们考虑的是一般线性抛物算子即[1] [2]

$$L_t u = u_t - a_{ij}(x,t) D_{ij} u + b_i(x,t) D_i u + c(x,t) u,$$

其中 $a_{ij}(x,t), b_i(x,t) \in C(\bar{D})$。

2. 预备知识

引理 1 [3]假设 D 是给定的 $n+1$ 维区域。把 D 中的点写成 (x,t)，其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。在 D 中考虑抛物算子

$$L_t u = u_t - a_{ij}(x,t) D_{ij} u + b_i(x,t) D_i u + c(x,t) u.$$

假设

i) 在 D 内 L_t 是抛物型算子，即对于任意的 $(x,t)\in D$， $y\in R^n$， $y\neq 0$，都有 $a_{ij}(x,t) y_i y_j > 0$；

ii) L_t 的系数在 D 内连续。

假设 D 有界，D 的边界 ∂D 由位于 $t=0$ 上的区域的闭包 B_0， $t=T$ 上的区域的闭包 B_T 以及位于带域 $0<t\le T$ 内的流形 S_T 组成，在 $D\cup B_T$ 内考虑初边值问题

$$\begin{cases} L_t u = f, (x,t)\in D\cup B_T, \\ u(x,0) = \varphi, \ \ x\in B_0, \\ \alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, (x,t)\in S_T, \end{cases}$$

其中 $\alpha=\alpha(x,t)\ge 0$， $\beta=\beta(x,t)\ge 0$，并且 $\alpha(x,t)+\beta(x,t)>0$ 在 $\bar{S}_T$ 上成立。假设条件 i)和 ii)成立，$c(x,t)\ge -c_0$，常数 $c_0\ge 0$，又设 $\alpha\ge\alpha_0>0$， $C(\bar{D})\cap u\in C^{2,1}(D\cup B_T)$ 是上述初边值问题的解，则有

$$\sup_D |u| \le e^{c_0 T}\left(T\sup_D |f| + \max\left\{ \frac{1}{\alpha_0}\sup_{S_T}|g|, \sup_{B_0}|\varphi| \right\} \right).$$

注：虽然引理中所提到的区域是球，但是对于一般的有界开邻域依然成立。

引理 2 [3]对于任意给定的$T>0$，抛物型方程的第二初边值问题

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\in D\cup B_T, \\ u\big|_{t=0}=\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right),\left(x_1,\cdots,x_n\right)\in B_0=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n\right)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^n\right\}\le R^n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_T}=g\left(x_1,\cdots,x_n\right),\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\in S_T=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^n\le R^n,0<t\le T\right\}, \end{cases}$$

在S_T上的解是唯一的并且连续的依赖于初值$\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right)$及边界函数$g\left(x_1,\cdots,x_n\right)$。

下面我们看线性抛物算子的第二类初边值问题。

3. 主要结果

定理 对于任意给定的$T>0$，我们给出线性抛物算子的第二类初边值问题

故有

$$\begin{cases} u_t-a_{ij}D_{ij}u+b_iD_iu+cu=0,\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\in D\cup B_T, \\ u\big|_{t=0}=\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right),\left(x_1,\cdots,x_n\right)\in B_0=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n\right)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^n\right\}\le R^n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_T}=g\left(x_1,\cdots,x_n\right),\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\in S_T=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^n\le R^n,0<t\le T\right\}. \end{cases} \tag{1}$$

我们不妨把(1)做一些改变，在(1)式中的第一个式子两边同时乘以δ_{ij}，那么(1)式将变成下列形式：

$$\begin{cases} u_t\delta_{ij}-a_{ij}D_{ij}u\delta_{ij}+b_iD_iu\delta_{ij}+cu\delta_{ij}=0,\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\in D\cup B_T, \\ u\big|_{t=0}=\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right),\left(x_1,\cdots,x_n\right)\in B_0=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n\right)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^n\right\}\le R^n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_T}=g\left(x_1,\cdots,x_n\right),\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\in S_T=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^n\le R^n,0<t\le T\right\}. \end{cases} \tag{2}$$

那么(2)式就变成以下形式：

$$\begin{cases} u_t-a_{ii}\Delta u+b_iD_iu+cu=0,\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\in D\cup B_T, \\ u\big|_{t=0}=\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right),\left(x_1,\cdots,x_n\right)\in B_0=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n\right)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^n\right\}\le R^n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_T}=g\left(x_1,\cdots,x_n\right),\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\in S_T=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n,t\right)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^n\le R^n,0<t\le T\right\}, \end{cases} \tag{3}$$

在S_T上的解是唯一的并且连续的依赖于初值$\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right)$及它的边界$g\left(x_1,\cdots,x_n\right)$。

证明：作线性变换

$$\upsilon=\omega\left(x_1,\cdots,x_n\right)u\left(x_1,\cdots,x_n\right), \tag{4}$$

其中$\omega=R^n-\sum_{i=1}^{n}x_i^n+1$，直接计算可得

$$u_t=\frac{1}{\omega}\upsilon_t,$$

$$u_{x_i}=\frac{1}{\omega}\upsilon_{x_i}+\frac{nx_i^{n-1}}{\omega^2}\upsilon,\ i=1,\cdots,n,$$

$$u_{x_ix_i}=\frac{1}{\omega}\upsilon_{x_ix_i}+\frac{2nx_i^{n-1}}{\omega^2}\upsilon_{x_i}+\left[(n-1)x_i^{n-2}+\frac{2nx_i^{2n-2}}{\omega}\right]\frac{n}{\omega^2}\upsilon,\ i=1,\cdots,n.$$

于是，新的未知量υ满足如下方程

$$\upsilon_t-\left[\sum_{i=1}^n a_{ii}\upsilon_{x_ix_i}+\frac{2n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{n-1}\upsilon_{x_i}+\left((n-1)\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{n-2}+\frac{2n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{2n-2}\right)\frac{n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\upsilon\right]$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i\upsilon_{x_i}+\frac{n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n b_ix_i^{n-1}\upsilon+c\upsilon=0$$

下面进行整理可得

$$\upsilon_t-\sum_{i=1}^n a_{ii}\upsilon_{x_ix_i}-\left(\frac{2n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{n-1}-\sum_{i=1}^n b_i\right)\upsilon_{x_i}$$

$$-\left\{\frac{n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\left[(n-1)\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{n-2}+\frac{2n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{2n-2}\right]-\frac{n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n b_ix_i^{n-1}-c\right\}\upsilon=0.$$

下面再次进行变量代换，令$y_i=\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}x_i$，那么就有

$$\upsilon_{x_i}=\upsilon_{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_i}=\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}\upsilon_{y_i},\upsilon_{x_ix_i}=\frac{1}{a_{ii}}\upsilon_{y_iy_i}.$$

故上式的方程可以转化成

$$\upsilon_t-\Delta\upsilon-\left\{\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}\left(\frac{2n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{n-1}-\sum_{i=1}^n b_i\right)\right\}\upsilon_{y_i}$$

$$-\left\{\frac{n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\left[(n-1)\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{n-2}+\frac{2n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^{2n-2}\right]-\frac{n}{R^n-\sum_{i=1}^n x_i^n+1}\sum_{i=1}^n b_ix_i^{n-1}-c\right\}\upsilon=0,$$

而相应的初始条件和边界条件为

$$\upsilon|_{t=0}=\omega(x_1,\cdots,x_n)\varphi(x_1,\cdots,x_n),\frac{\partial\upsilon}{\partial n}+nR^n\upsilon\Big|_{S_T}=g(x_1,\cdots,x_n).$$

则得到下列第三类初边值问题具有以下形式。

故有

$$\begin{cases} \upsilon_t - \Delta\upsilon - \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \left(\left(\frac{2n}{R^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^n + 1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^n - \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \right) \right\} \upsilon_{y_i} - \left\{ \frac{n}{R^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^n + 1} \left[(n-1) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^{n-2} \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{2n}{R^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^n + 1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^{2n-2} \right] - \frac{n}{R^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^n + 1} \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^{n-1} - c \right\} \upsilon = 0, (x_1, \cdots, x_n, t) \in D \cup B_T, \\ \upsilon|_{t=0} = \omega(x_1, \cdots, x_n)\phi(x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n) \in B_0 = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^n \le R^n \right\}, \\ \left. \frac{\partial\upsilon}{\partial n} + nR^n \upsilon \right|_{S_T} = g(x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n, t) \in S_T = \left\{ (x_1, \cdots, x_n, t) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^n = R^n, 0 < t \le T \right\}. \end{cases} \tag{5}$$

通过(5)容易看出它满足引理 1 的条件。那么我们不妨设 υ 是(5)的解，则通过引理 1 可以得到如下估计

$$\sup_D |\upsilon| \le e^{c_0 T} \max\left\{ \frac{1}{\alpha_0} \sup_{S_T} |g|, \sup_{B_0} |\varphi| \right\},$$

其中 $c_0 = |a_{ii}|_{C^0} \left\{ n^2 (n-1) \left(\frac{R}{\sqrt[n]{n}} \right)^{n-2} + 2^{n^3} \left(\frac{R}{\sqrt[n]{n}} \right)^{2n-2} \right\}, \alpha_0 = nR^n.$

记

$$A = \max\left\{ \frac{1}{\alpha_0} \sup_{S_T} |g|, \sup_{B_0} |\varphi| \right\},$$

令 $\mu = e^{-c_0 t}\upsilon$， $\omega = A \pm \mu$ ，由引理 1 可得 $\omega = 0$ ，则有 $\upsilon = 0$ ，于是初边值问题(5)的解是唯一的。又有

$$\sup_D |\upsilon| \le e^{c_0 T} \max\left\{ \frac{1}{\alpha_0} \sup_{S_T} |g|, \sup_{B_0} |\varphi| \right\},$$

所以

$$|\upsilon| \le e^{c_0 T} \max\left\{ \frac{1}{\alpha_0} \sup_{S_T} |g|, \sup_{B_0} |\varphi| \right\},$$

故有初边值问题(5)的解具有适定性。再利用变换公式(4)得到原来的第二初边值问题(3)的解的最大模估计。故有对于任意给定的 $T > 0$ ，线性抛物算子的第二类初边值问题(3)在 S_T 上的解是唯一的并且连续的依赖于它的初值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 及边值 $g(x_1, \cdots, x_n)$ 。

基金项目

国家科学自然基金项目(12061078)；新疆师范大学重点实验室(XJNUSYSO82018AO2)。

参考文献

[1] 黄守军, 段双双. 抛物型方程初边值问题解的最大模估计[J]. 大学数学, 2014, 30(3): 15-17.

[2] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 郑宋穆, 谭永基. 数学物理方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.

[3] 王明新. 偏微分方程基本理论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.