Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1183-1189
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012141

Hans汉斯

阶为$8p^2$的5度对称图

杨婷婷，王　蒙

云南财经大学统计与数学学院，云南　昆明
Email: 2455182447@qq.com, 2027178063@qq.com

收稿日期：2020年11月21日；录用日期：2020年12月20日；发布日期：2020年12月28日

摘　要

如果图的自同构群$Aut(\Gamma)$在图的弧集上是可传递的，则称图是对称的(或弧传递的)。设Γ是一个连通图，$G \le Aut(\Gamma)$，如果G作用在$V\Gamma$上是拟本原或顶点二部拟本原的，则称Γ是G-基图。在本文中，我们将分类阶为$8p^2$的5度对称G-基图，其中p为奇素数。证明了自同构群在图的顶点集上拟本原时存在一个图。当自同构群在图的顶点集上二部拟本原时，存在两个图。

关键词

对称图，拟本原，二部拟本原，单群

Pentavalent Symmetric Graphs of Order Eight Times a Prime Square

Tingting Yang, Meng Wang

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 2455182447@qq.com, 2027178063@qq.com

Received: Nov. 21st, 2020; accepted: Dec. 20th, 2020; published: Dec. 28th, 2020

Abstract

A graph is symmetric (or arc-transitive) if its automorphism group $Aut(\Gamma)$ is transitive on the arc set of the graph. Let Γ be a connected graph and $G \le Aut(\Gamma)$. Then Γ is called a G-basic graph, if G is quasiprimitive or bi-quasiprimitive on $V\Gamma$. In this paper, we give a classification of connected pentavalent symmetric graphs of order $8p^2$, where p is an odd prime. It is proved that there is a graph of the automorphism group is quasiprimitive on the vertex set, while there are two graphs exist in the case of the automorphism group is biquasiprimitive on the vertex set.

文章引用：杨婷婷，王蒙. 阶为 $8p^2$ 的 5 度对称图[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1183-1189.
DOI: 10.12677/pm.2020.1012141

Keywords

Symmetric Graph, Quasiprimitive, Bi-Quasiprimitive, Simple Group

1. 引言

本文中研究的图都是有限的，连通的，无向的，无重边的，无自环的。此外，图是由顶点集和顶点间的邻接关系构成的。对于一个图Γ，它的每条边都可以看作方向相反的两条弧。用$V(\Gamma)$，$E(\Gamma)$，$A(\Gamma)$，$Aut(\Gamma)$分别表示图Γ的顶点集合，边集合，弧集合和图的全自同构群。如果$Aut(\Gamma)$在$V(\Gamma)$，$E(\Gamma)$或$A(\Gamma)$上的作用传递，则分别称图为点传递，边传递或弧传递。此外，弧传递图也称为对称图。设$s\ge 1$为正整数，Γ为图，图Γ的一个 s-弧是指图Γ中的$s+1$个有序点列$(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，并且满足$\alpha_{i-1}\ne\alpha_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,s-1)$，且α_{v-1}和α_v $(v=1,2,\cdots,s)$是邻接的。如果图Γ的自同构群$Aut(\Gamma)$在Γ的s-弧集上传递，则称Γ是(G,s)-弧传递图；如果Γ是(G,s)-弧传递图，但不是$(G,s+1)$-弧传递图，则称Γ为(G,s)-传递图。特别地，0-弧传递就是点传递，1-弧传递就是弧传递(或对称)。

代数图论作为图论的重要分支之一，其主要应用代数的方法来解决一些图论问题，它在计算机科学技术的并行处理、编码等领域有着广泛的应用(参看文献[1] [2] [3])，因此，从理论上研究一些图的相关性质及其分类等具有十分重要的意义。此外，在代数图论中，国内外的学者们对于阶数固定的对称图关注颇多并且引起了它们很大的兴趣。在许多文献中，人们把大量的注意力放在描述一个阶数很小的素数幂的边传递或弧传递图上。这是因为这些图不仅可以提供一些有趣图的丰富来源，而且(可能更重要的是)刻画研究更大的传递图。例如：设p，q是两个不同的素数，在文献([4])中，Chao 分类了阶为p的对称图；Cheng 和 Oxley 在([5])中分类了阶为$2p$的对称图；Wang 和 Xu 在文献([6])中确定了所有阶为$3p$的对称图。之后，Praeger 等在([7] [8])中将这些结果推广到阶为pq的对称图。文献([9] [10] [11])分类了阶为$2p^2$的 4 度图和 5 度图。此外，Feng 等在文献([12])确定了阶为$2pq$的 5 度对称图；在文献([13])中 Pan 等分析了$2p^2$阶的 5 度对称图及其正规覆盖。

一般情况下，我们研究对称图的一个典型的方法就是作正规商图，其定义如下：设Γ为G-弧传递图，且G有一个在$V\Gamma$上不传递的正规子群N，定义图Γ的由N诱导出的正规商图(记为Γ_N)的顶点集为$V\Gamma$上的所有轨道(记为$V\Gamma_N$)，且Γ_N的两个顶点$B,C\in V\Gamma_N$邻接当且仅当B中的某个顶点与C中的某个顶点在Γ中邻接。特别地，如果Γ和Γ_N的度数相同，则称Γ为Γ_N的正规覆盖。基于这个定义，我们研究对称图一般需要研究分析对称图的基图及其正规覆盖。

基图的分类不仅对分析对称图是一个基础，也是研究基图覆盖的重要手段。而且研究阶数为素数幂的小倍数的对称图是代数图论中重要且热门的话题。因为这样的图不仅会提供丰富的有意义的图例，此外还可通过研究其覆盖来研究更大阶数的图类中发挥重要作用。本文的主要是任务分析确定阶为$8p^2$的 5 度对称图。

关于本文所使用的符号都是标准的，可参照([14] [15])。对于一个正整数n，我们用Z_n和D_{2n}分别表示n阶循环群和$2n$阶二面体群，用I_{12}表示正二十面体群，用$\varsigma_{36,5}$表示 36 阶G-弧传递 5 度图。为了方便起见，有时我们会如 Atlas ([14])中那样用n和p^n分别表示n阶循环群和p^n阶初等交换群，用$[n]$表示一个n阶群。对于两个群N和H，用$N\times H$表示N与H的直积，用$N.H$表示N被H的扩张，如果这个

扩张是可裂的，则表示为 $N:H$。此外，用 K_n 表示 n 阶完全图，$K_{n,n}$ 表示 $2n$ 阶完全二部图，$K_{n,n}-nK_2$ 示在 $K_{n,n}$ 中去掉一个完全匹配所得的图。

定理 1.1 设 Γ 是连通的阶为 $8p^2$ 的 5 度 G-弧传递图，其中 $G\le Aut\Gamma$，且 p 是奇素数，则下列表述成立：

1) 若 G 在 $V\Gamma$ 上是顶点拟本原时，存在一个 72 阶的 5 度弧传递图 ζ_{72}^1，且 $Aut\left(\zeta_{72}^1\right)\cong A_6\cdot\mathbb{Z}_2$；

2) 若 G 在 $V\Gamma$ 上是顶点二部拟本原时，存在两个 72 阶的 5 度弧传递图 ζ_{72}^2 和 ζ_{72}^3，且 $Aut\left(\zeta_{72}^2\right)\cong Aut\left(\zeta_{72}^3\right)\cong Aut\left(S_6\right)\times\mathbb{Z}_2$；

定理 1.2 设 Γ 是 $8p^2$ 阶连通的 $(G,2)$-弧传递 5 度图其中 p 为素数，Γ 为 Γ_N 的正规覆盖，且存在正规子群 N，使得下述之一成立：

1) $|N|=2$，$\Gamma_N=\varsigma_{36,5}$；

2) $|N|=2p$，$\Gamma_N=I_{12}$，其中 $p=3$；

2. 预备知识

定义 2.1 设 G 传递作用在集合 Ω 上，如果 G 不是非本原群，即不存在非平凡块，则称 G 为 Ω 上的本原群。

此外，本原群一定是传递群。

下面的这个定义是关于拟本原置换群是本原置换群概念的推广。

定义 2.2 设 G 是一个传递置换群，如果 G 的每个极小正规子群都是传递的，则称 G 是拟本原的；如果 G 的每个极小正规子群至多有两个轨道且存在一个极小正规子群恰好有两个轨道，则称 G 是二部拟本原的。

定理 2.3 ([16])设 $G\le Sym(\Omega)$ 是拟本原置换群，$N=soc(G)$，$\alpha\in\Omega$。则 G 只有 HA，AS，TW，SD，CD，PA，HS 和 HC 八种类型：

1) 如果 $N\cong T^k$ 是 G 的唯一极小正规子群，其中 T 为单群，此时分为以下六类：

a) HA (仿射型)：如果 N 可交换，此时 T 为交换单群，从而 $T\cong Z_p$，于是 $N=Z_p^k$，因此 N 在 Ω 上正则，于是 $Z_p^k\lhd G\le N_{sym(\Omega)}\left(Z_p^k\right)=Z_p^k:Aut\left(Z_p^k\right)=Z_p^k:GL(k,p):=AGL(k,p)$。

b) 如果 N 是非交换群，此时，T 为非交换单群。则有下述情形成立：

i) AS (几乎单型)：若 $k=1$，则 $N=T$，于是 $T\lhd G\le Aut(T)=T.Out(T)$。

ii) TW (扭圈积型)：若 $N=T^k$ 在 Ω 上正则，其中 $k\ge 2$，则 $|\Omega|=|T|^k$。

iii) SD (单对角型)：若 $N=T^k$ 且 $T_\alpha\cong T$，其中 $k\ge 2$，则 $|\Omega|=|T|^{k-1}$。

iv) CD (复合对角型)：若 $N=T^k$ 且 $T_\alpha\cong T^m$，其中 $k\ge 2$，$m\mid k$，则 $|\Omega|=|T|^{k-m}$。

v) PA (乘积作用型)：若 $N=T^k$ 且 $T_\alpha\ncong T^m$，其中 $k\ge 2$。

2) 如果 G 恰有两个极小正规子群 M，N，且 $N\cong L\times M$，则 $L\cong M\cong T^k$，其中 T 为非交换单群。

i) HS (全形单型)：若 $k=1$，则 $G\le (N\times M).Out(T)=T^2.Out(T)$。

ii) HC (复合全型)：若 $k\ge 2$，则 $G\le (N\times M).Out(T)$。

在([17], 定理 1.1)和([18])中，5 度连通对称图的点稳定子群被独立确定出来，其中 F_n 表示阶为 n 的 Frobenius 群，n 为正整数。

定理 2.4 设 Γ 是一个连通的 5 度 (G,s)-弧传递图，其中 $G\le Aut(\Gamma)$ 且 $s\le 5$。若 $v\in V\Gamma$，有 $s\le 5$，且 $|G_v|\mid 2^9\cdot 3^2\cdot 5$，则下列结论成立：

1) $s=1$，$G_v\cong\mathbb{Z}_5$，D_5 或 D_{10}。

2) $s=2$，$G_v\cong F_{20}$，$F_{20}\times Z_2$，A_5 或 S_5。

3) $s=3$，$G_v \cong F_{20}\times\mathbb{Z}_4$，$A_4\times A_5$，$(A_4\times A_5):\mathbb{Z}_2$ 或 $S_4\times S_5$。

4) $s=4$，$G_v \cong ASL(2,4)$，$AGL(2,4)$，$A\Sigma L(2,4)$，$A\Gamma L(2,4)$。

5) $s=5$，$G_v \cong \mathbb{Z}_2^6:\Gamma L(2.4)$。

定理 2.5 设Γ是一个素数度 G-弧传递图，且设 $N \lhd G$ 在 $V\Gamma$ 上有两个以上的轨道，其中 $G\le Aut\Gamma$。则下列结论成立。

1) N 在 $V\Gamma$ 上半正则，$G/N \le Aut\Gamma_N$，Γ_N 是 G/N-弧传递的，且 Γ 是 Γ_N 的正规 N-覆盖；

2) Γ 是 (G,s)-弧传递的当且仅当 Γ_N 是 $(G/N,s)$-弧传递的，其中 $1\le s\le 5$ 或 $s=7$；

3) $G_\alpha \cong (G/N)_\delta$，其中 $\alpha\in V\Gamma$，$\delta\in V\Gamma_N$。

对于正整数 n 和群 T，通常用 $\pi(T)$ 表示 $|T|$ 的素因子集合，$|\pi(T)|$ 表示 $|T|$ 中含有素因子的个数。如果 $|\pi(T)|=n$ 则称群 T 为 K_n-群。当 $3\le n\le 6$ 时，K_n-单群在([19])和([20])中被确定出来。

3. 定理 1.1 的证明

在本章节中，我们先证明以下三个引理，以此来完成定理 1.1 的完整证明。

引理 3.1 设 T 是一非交换的单群，满足 $|T| \mid 2^{12}\cdot 3^2\cdot 5\cdot p^2$ 且 $5p^2 \mid |T|$，其中 p 为奇素数，则满足情况的单群有 A_6 和 $PSU(4,2)$。

证明：因为 $|T| \mid 2^{12}\cdot 3^2\cdot 5\cdot p^2$，所以 $3\le|\pi(T)|\le 4$，因此单群 T 满足([20]，定理 1)。如果 $|\pi(T)|=3$，则 $p\in\{3,5\}$，因此 T 是一个$\{2,3,5\}$群。若 $p=3$，则有 $|T| \mid 2^{12}\cdot 3^4\cdot 5$，由([20]，表 1)可知，$T$ 同构于([20]，表 1)中的八个群之一，即 $T\cong A_5$，A_6 或 $PSU(4,2)$。又 $5p^2 \mid |T|$，则 $T\cong PSU(4,2)$ 或 $T\cong A_6$。当 $p=5$，我们有 $|T| \mid 2^{12}\cdot 3^2\cdot 5^3$，并且由 $5p^2 \mid |T|$ 和([20]，表 1)可知，此时不存在群 T。

如果 $|\pi(T)|=4$，有 $|T| \mid 2^{12}\cdot 3^2\cdot 5\cdot p^2$，且 $p>5$，由此可知

$$2^{13}\nmid|T|,\ 3^3\nmid|T|,\ 5^2\nmid|T| \tag{1}$$

由([20]，定理 1)可知，T 满足([20]，表 2)或者 $T=PSL(2,q)$ 是一个含有 4 个素因子的群，其中 q 是一个素数的方幂。现在考虑前一种情形，如果 T 满足([20]，表 2)，对于([20]，表 2)中的 31 个群，通过检查每个群的阶可得，群 T 不存在。

如果 $T=PSL(2,q)$，则

$$|T|=\frac{q(q+1)(q-1)}{2}$$

因此

$$\frac{q(q-1)(q+1)}{2} \mid 2^{12}\cdot 3^2\cdot 5\cdot p^2$$

如果 $T\cong PSL(2,q)$，则由([20]，定理 3.2)可知：要么 q 是 2，3，5 或 7 的方幂，要么 $q\ge 11$ 是一个素数。对于后一种情形，有

$$|PSL(2,q)|=\frac{q(q+1)(q-1)}{2}$$

此时，$q=p^2$，矛盾。所以现在我们只考虑第一种情形，根据([20]，表 2)中的群，通过检查每个群的阶可得，群 T 不存在。

下面我们开始定理 1.1 的证明，主要是从 G 在 $V\Gamma$ 上是拟本原和二部拟本原两种情形来分析，从而来完成定理 1.1 的证明。

引理 3.2 若 G 在 $V\Gamma$ 上是拟本原的，存在一个 72 阶 5 度弧传递图图 ζ_{72}^1，且 $Aut(\zeta_{72}^1)\cong A_6\cdot\mathbb{Z}_2$。

证明：设 N 是 G 的一个极小的正规子群，则 N 为同构单群的直积，即 $N=T^d=T_1\times T_2\times\cdots\times T_d$，其中 $T_i\cong T(i=1,2,\cdots,d)$ 是一个单群。因为 G 在 $V\Gamma$ 上是拟本原，所以 N 在 $V\Gamma$ 上传递。如果 N 是交换的，则 N 在 $V\Gamma$ 半正则，从而 $|T|^d=|N|=8p^2$，矛盾，故 N 非交换。我们假设 $d\ge 2$。由 Γ 的连通性以及 $1\ne N_\alpha\lhd G_\alpha$，我们可知 Γ 是 N-弧传递的。此时，如果 T_1 在 $V\Gamma$ 传递，由([15]，定理 4.2)可知，T_1 的中心化子 $C_N(T_1)$ (即 T_2) 是半正则的，与 $|T_2|\nmid 8p^2$ 矛盾。如果 T_1 在 $V\Gamma$ 上至少有三条轨道，则由定理 2.5 可知 T_1 是半正则，矛盾。因此 T_1 在 $V\Gamma$ 上恰好有两条轨道，分别为 U 和 W。又因为 $T_1\lhd G$，所以 U 和 W 则构成了一个 N-不变划分，换句话说就是集合稳定子 N_U 在 N 中的指数为 2，进一步由 $N=T^d$ 中没有指数为 2 的子群可知，矛盾，故 $N=T$。

注意到 Γ 是 T-弧传递，故 T_α 满足定理 2.4.于是我们可由 T 的传递性可知，$|V\Gamma|\cdot|T_\alpha|=|T|\mid 2^{12}\cdot 3^2\cdot 5\cdot p^2$。又 Γ 是 T-弧传递，故 $5p^2\mid|T|$，即 T 满足引理 3.1。由 $3\le|\pi(T)|\le 4$，再由引理 3.1 可知，我们只需考虑 $|\pi(T)|=3$ 这种情形。

假设 $|\pi(T)|=3$，则我们由引理 3.1 可知，满足 T 和 p^2 的只有群 $T\cong PSU(4,2)$ 或 A_6。若 $T\cong PSU(4,2)$，则 $|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=2^3\cdot 3^2\cdot 5=360$，即 $T_\alpha\cong A_6$，利用 Magma ([21])计算可得，图不存在。若 $T\cong A_6$，则 $|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=5$，由引理 2.4 可知，$T_\alpha\cong\mathbb{Z}_5$，由 Magma ([21])计算可得，存在图 ς_{72}。

综上所述，G 在 $V\Gamma$ 上是拟本原时存在图 ζ_{72}^1。

引理 3.3 若 G 在 $V\Gamma$ 上是二部拟本原的，存在两个 72 阶的 5 度弧传递图 ζ_{72}^2 和 ζ_{72}^3，且 $Aut(\zeta_{72}^2)\cong Aut(\zeta_{72}^3)\cong Aut(S_6)\times\mathbb{Z}_2$。

证明：因为 G 在 $V\Gamma$ 上是二部拟本原的，所以 G 存在极小正规子群 $N=T^d$，且在 $V\Gamma$ 上恰好有 2 个轨道，分别记作 W_1 和 W_2。那么 W_1 和 W_2 是图 Γ 的两个部，因此 Γ 就是一个二部图。令 $G^+=G_{w_1}=G_{w_2}$ 从而有 $N\le G^+$，且 $|G:G^+|=2$，$G_\alpha=G_\alpha^+$。

若 N 交换，则 N 在 W_1 上正则的，从而 $|T|^d=|N|=4p^2$，不可能。因此 N 是非交换的。假设 G^+ 作用在 W_1 和 W_2 上是不忠实的，根据([22]，引理 5.2)可知，Γ 是一个完全二部图。又 Γ 是 5 度图，则 $\Gamma\cong K_{5,5}$，即 $|V\Gamma|=10$，与 $|V\Gamma|=8p^2$ 矛盾，从而 G^+ 作用在 W_1 和 W_2 上是忠实的。由([23]，定理 1.5)可知 G^+ 在 W_i 上是拟本原的或者 G^+ 有两个正规子群 V_1 和 V_2，使得 $V_1\cong V_2$，且在 $V\Gamma$ 上半正则。进一步地，$V_1\times V_2$ 在 W_i 上是正则的。

对于后一种情形，我们有 $|V_1|^2=|W_i|=4p^2|$，矛盾。

下面我们考虑前一种情形，由定理 2.3 可知，G^+ 是几乎单或乘积作用型。设 $N=soc(G^+)=|T|^d$ 是 G^+ 的基柱，其中 T 是非交换单群，且 $d\ge 1$。

若 G^+ 是几乎单，则 $soc(G^+)=T$。进一步，如果 T 不是 G 的唯一的极小正规子群，由于 $G=G^+.\mathbb{Z}_2$，那么我们就很容易的得到 $G=G^+\times\mathbb{Z}_2$，于是 G 有正规子群 $\mathbb{Z}_2$ 在 $V\Gamma$ 上有 $4p^2$ 个轨道，这与 G 在 $V\Gamma$ 上是二部拟本原的相矛盾。故 T 是 G 的唯一极小正规子群，即 G 是几乎单的，且其基柱 $soc(G)=T$。令 $G=T.o$，$G^+=T.o'$，其中 $\mathbb{Z}_2\le o\le Out(T)$，且 $|o:o'|=2$。

由于 $T_\alpha\lhd G_\alpha$，于是由定理 2.4 可知，$|T_\alpha|\mid 2^9\cdot 3^2\cdot 5$，因此 $|T|=|W_1|\cdot|T_\alpha|$ 整除 $2^{12}\cdot 3^2\cdot 5\cdot p^2$。另一方面，由于 $T_\alpha\ne 1$，我们有 $5p^2\mid|T|$，即 T 满足引理 3.1.由 $3\le|\pi(T)|\le 4$，再由引理 3.1 可知，我们只需考虑 $|\pi(T)|=3$ 这种情形。

若 $|\pi(T)|=3$ 时，由引理 3.1 可知，满足 T 和 p^2 条件的群只有 $T\cong PSU(4,2)$ 或 $T\cong A_6$。若 $T\cong PSU(4,2)$，则 $|T_\alpha|=|T|/|W_i|=2^4\cdot 3^2\cdot 5$。由 Atlas ([14])可知，$Out(PSU(4,2))=\mathbb{Z}_2$，所以有 $o=\mathbb{Z}_2$，$o'=1$，且 $G^+=T$，因此 $G^+=T=PSU(4,2)$。于是 $|G_\alpha|=|G_\alpha^+|=|T_\alpha|=|T|/|W_1|=2^4\cdot 3^2\cdot 5$，此外，再由定理 2.4 可得 $G_\alpha\cong A_4\times A_5$。进一步，有 $G\cong T.O=PSU(4,2).\mathbb{Z}_2=PSU(4,2)$。于是我们利用 Magma ([21])计算可知，此时不存在图 Γ。若 $T\cong A_6$，则 $|T_\alpha|=|T|/|W_i|=2\cdot 5$。由 Atlas ([14])可知，$Out(A_6)=\mathbb{Z}_2^2$，所以 $o=\mathbb{Z}_2$，$o'=1$ 或 $o=\mathbb{Z}_2^2$，$o'=\mathbb{Z}_2$，故 $G=A_6\cdot\mathbb{Z}_2$ 或 $A_6\cdot\mathbb{Z}_2^2$，于是 $|G_\alpha|=|G_\alpha^+|=|T_\alpha|=|T|/|W_1|=2\cdot 5$ 或 $2^2\cdot 5$。由定理 2.4 可知，$G_\alpha\cong D_{10}$ 或

$G_\alpha \cong D_{20}$。分别由 Magma ([21])计算可知，存在两个 72 阶的 5 度弧传递图 ζ_{72}^2 和 ζ_{72}^3，且 $Aut(\zeta_{72}^2) \cong Aut(\zeta_{72}^3) \cong Aut(S_6) \times \mathbb{Z}_2$。

假设 G^+ 是乘积作用型的，则有 $N = T^d = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_d$，其中 $d \ge 2$，$T_i \cong T\,(i = 1,2,\cdots,d)$ 是一个单群。如果 T_1 在 W_i 上是传递的，我们由([15]定理 4.2)可知，T_2 是半正则的，因此 $|T| \mid 4p^2$，矛盾。从而 T_1 在 W_1 和 W_2 上不传递，同样由([24]引理 3.2)可知，T_1 是半正则的，矛盾。

综上所述，G 在 $V\Gamma$ 上是二部拟本原时，存在两个 72 阶的 5 度弧传递图 ζ_{72}^2 和 ζ_{72}^3。

定理 1.1 的证明证毕。

4. 定理 1.2 的证明

在本节中，我们将利用定理 1.1 来分析关于定理 1.1 的一般研究的情形，以此来完成对定理 1.2 的证明。

证明：设 Γ 是 $8p^2$ 阶连通 $(G,2)$-弧传递 5 度图，其中 p 是奇素数，Γ 是 Γ_N 的正规覆盖。如果 G 在 $V\Gamma$ 上是拟本原或二部拟本原，则由引理 3.2 和引理 3.3 可知，G 在 $V\Gamma$ 上是拟本原时存在图 ζ_{72}^1，G 在 $V\Gamma$ 上是二部拟本原时，存在两个 72 阶的 5 度弧传递图 ζ_{72}^2 和 ζ_{72}^3。

下设 G 在 $V\Gamma$ 上既不是拟本原也不是二部拟本原，则 G 有一个极小正规子群 N，即存在 G 的非平凡正规子群在 $V\Gamma$ 上至少有三条轨道。设 G 为 G 在 $V\Gamma$ 上至少有三个极小正规子群中的极大者。由定理 2.5 可知，N 在 $V\Gamma$ 上半正则，$G/N \le Aut(\Gamma_N)$，Γ_N 是 $(G/N,2)$-弧传递 5 度图。此时，由 N 的及大性，G/N 在 $V\Gamma_N$ 上拟本原或二部拟本原。又因为 $|V\Gamma_N| = |V\Gamma|/|N|$，所以 $|N| \mid 8p^2$。

下面对 $|N|$ 进行分析。

1) 如果 $8 \mid |N|$，则 $|V\Gamma_N| = p$ 或 p^2。由于 p 为奇素数，且 Γ_N 是奇数阶 5 度弧传递，从而与 $8 \mid |N|$ 矛盾。

2) 如果 $p^2 \mid |N|$，则 $|V\Gamma_N| = 8$。由([25]，定理 1)可知，不存在 8 阶 5 度对称图，所以 $|V\Gamma_N| \ne 8$，与之矛盾。

3) 如果 $|N| = 2$，则 $|V\Gamma_N| = 4p^2$。由([26]，定理 1.1)可知，$\Gamma_N = \zeta_{36,5}$，且是唯一的 36 阶连通的 5 度对称图。

4) 如果 $|N| = 4$，则 $|V\Gamma_N| = 2p^2$。由([27]，引理 1.5)知，$\Gamma_N = Cos(H,\langle a\rangle,\langle b\rangle)$，其中 $p = q = 5$，$H = (a,b,c,a^5 = b^5 = c^5 = 1[a,c] = [b,c] = 1,[a,b] = c)$ 是一个阶为 5^3 的超特殊 5-群，$L = \langle a\rangle$，$R = \langle b\rangle$，即 $\Gamma_N = Cos(H,L,R)$ 是一个阶为 50 的连通的 5 度对称图。

5) 如果 $|N| = 2p$，则 $|V\Gamma_N| = 4p$。由([26]，引理 1.5)知，$\Gamma_N = I_{12}$，且 $p = 3$。

6) 如果 $|N| = 4p$，则 $|V\Gamma_N| = 2p$。由([27]，引理 1.5)，$\Gamma_N = CD(2p,5)$，且 $Aut\Gamma \cong D_{2p} : Z_5$，其中 $5 \mid p-1$。由于 $G/N \le Aut(\Gamma_N)$，因此 $G/N = D_{2p} : Z_5$，故 $G = N.D_{2p} : Z_5 = (Z_p.2).D_{2p} : Z_5$，所以有 $|G_p| = p^2$。由 Sylow 定理可知，G 的 Sylow p-子群的个数 n_p 满足 $n_p = p^2 \mid 20$，因此 $n_p = 1$，故 $G_p \lhd G$，这与之前讨论(2)的情形相矛盾，证毕。

基金项目

国家自然科学基金资助项目资助(基金名称：若干传递图类及其相关问题研究，编号：11461007)。

参考文献

[1] Xiao, W.J. and Parhami, B. (2007) Further Mathematical Properties of Cayley Digraphs Applied to Hexagonal and Honeycomb Meshes. *Discrete Applied Mathematics*, **155**, 1752-1760. https://doi.org/10.1016/j.dam.2007.04.002

[2] Xiao, W.J. and Parhami, B. (2005) Some Mathematical Properties of Cayley Digraphs with Applications to Interconnection Network Design. *International Journal of Computer Mathematics*, **82**, 521-528. https://doi.org/10.1080/00207160512331331101

[3] Xiao, W.J. and Parhami, B. (2007) Structural Properties of Cayley Digraphs with Applications to Mesh and Pruned Torus Interconnection Networks. *Journal of Computer and System Sciences*, **73**, 1232-1239. https://doi.org/10.1016/j.jcss.2007.02.010

[4] Chao, C.Y. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1971-0279000-7

[5] Cheng, Y. and Oxley, J. (1987) On Weakly Symmetric Graphs of Order Twice a Prime. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **42**, 196-211. https://doi.org/10.1016/0095-8956(87)90040-2

[6] Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) A Classification of Symmetric Graphs of Order 3p. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **58**, 197-216. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1037

[7] Praeger, C.E., Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) Symmetric Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **58**, 299-318. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1046

[8] Praeger, C.E. and Xu, M.Y. (1993) Vertex-Primitive Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **59**, 245-266. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1068

[9] Feng, Y.Q., Zhou, J.X. and Li, Y.T. (2016) Pentavalent Symmetric Graphs of Order Twice a Prime Power. *Discrete Mathematics*, **339**, 2640-2651. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.05.008

[10] Pan, J.M., Liu, Z. and Xu, X.F. (2015) Pentavalent Symmetric Graphs of Order Twice Power. *Algebra Colloquium*, **22**, 383-394. https://doi.org/10.1142/S1005386715000334

[11] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) Tetravalent *s*-Transitive Graphs of Order Twice a Prime Power. *The Journal of the Australian Mathematical Society*, **88**, 277-288. https://doi.org/10.1017/S1446788710000066

[12] Hua, X.H., Feng, Y.Q. and Lee, J. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 2pq. *Discrete Mathematics*, **311**, 2259-2267.

[13] Pan, J.M., Liu, Z. and Xu, X.F. (2015) Pentavalent Symmetric Graphs of Order Twice a Prime Square. *Algebra Colloquium*, **22**, 383-394. https://doi.org/10.1142/S1005386715000334

[14] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Oxford Univ. Press, London/New York.

[15] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1997) Permutation Groups. Spring-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3

[16] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[17] Guo, S.T. and Feng, Y.Q. (2012) A Note on Pentavalent s-Transitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 2214-2216. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.04.015

[18] Li, C.H., Lu, Z.P. and Wang, G.X. (2016) Arc-Transitive Graphs of Square-Free Order and Small Valency. *Discrete Mathematics*, **339**, 2907-2918. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.06.002

[19] Jafarzadeh, A. and Iranmanesh, A. (2007) On Simple Kn-Groups for n = 5, 6. In: Campbell, C.M., Quick, M.R., Robertson, E.F. and Smith, G.C., Eds., *Groups St. Andrews* 2005, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 668-680.

[20] Huppert, B. and Lempken, W. (2000) Simple Groups of Order Divisible by at Most Four Primes. *Proceedings of Francisk Skorina Gomel State University*, **16**, 64-75.

[21] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[22] Giudici, M., Li, C.H. and Praeger, C.E. (2003) Analysing Finite Locally s-Arc-Transitive Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 291-317. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03361-0

[23] Li, C.H., Praeger, C.E., Venkatesh, A. and Zhou, S.M. (2002) Finite Locally-Quasiprimitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **246**, 197-218. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00258-8

[24] Lu, Z.P. and Wang, C.Q. (2004) On Semisymmetric Cubic Graphs of Order $6p^2$. *Science in China Series A Mathematics*, **47**, 1-17.

[25] 化小会, 冯衍全. 8p 阶 5 度对称图[J]. 北京交通大学学报, 2011(3): 132-135.

[26] Yang, D.W., Feng, Y.Q. and Kwak, J.H. (2018) Symmetric Graphs of Valency Five and Their Basic Normal Quotients. *European Journal of Combinatorics*, **80**, 236-246. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.02.020

[27] Pan, J.M. and Li, C.H. (2018) Arc-Transitive Prime-Valent Graphs of Order Twice Prime Power. *ARS Combinatoria*: *An Australian Canadian Journal of Combinatorics*, **138**, 171-191.