Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1220-1228
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012145

Hans汉斯

几类传递置换群的秩和次级数

汪　畅，肖仁兵

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: 1491822991@qq.com

收稿日期：2020年11月25日；录用日期：2020年12月23日；发布日期：2020年12月31日

摘　要

设群G是作用在有限集合Ω上的传递置换群。G在Ω上的次轨道定义为点稳定子群G_α作用在集合Ω上的轨道，这里$\alpha \in \Omega$。次轨道的个数称为群G作用在Ω上的秩，次轨道的长度称为群G作用在Ω上的次级数。在本文中我们通过利用圈积的乘积作用和某种非本原作用构造了几类传递置换群，并确定了它们的秩和次级数。

关键词

置换群，传递作用，秩，次轨道

The Rank and Subdegree of Several Transitive Permutation Groups

Chang Wang, Renbing Xiao

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 1491822991@qq.com

Received: Nov. 25th, 2020; accepted: Dec. 23rd, 2020; published: Dec. 31st, 2020

Abstract

Let G be a transitive permutation group acting on a finite set Ω. The suborbits of G on Ω are defined as the orbits of a point stabilizer on Ω. The number of suborbits is called the rank of G and the length of suborbits is called the subdegree of G. In this paper, we construct several kinds of transitive permutation groups by using the product action and some imprimitive action of the wreath product, and determine their rank and subdegree.

文章引用：汪畅，肖仁兵．几类传递置换群的秩和次级数[J]．理论数学, 2020, 10(12): 1220-1228.
DOI: 10.12677/pm.2020.1012145

Keywords

Permutation Group, Transitive Action, Rank, Suborbit

1. 前言

设群 G 是作用在有限集合 Ω 上的传递置换群。G 在 Ω 上的次轨道定义为点稳定子 G_α 在集合 Ω 上的轨道，这里 $\alpha \in \Omega$。次轨道的个数称为群 G 作用在 Ω 上的秩，次轨道的长度则称为群 G 的次级数。若 G 是作用在 Ω 上的有限本原群，则针对群 G 的秩和次级数的研究有很长的历史，这些研究主要集中在秩和次级数较小的情形，这方面国内外很多学者已经得出了一些非常好的结果。易知传递置换群 G 的秩为 2 当且仅当群 G 是 2-传递群。随着单群分类定理的产生，有限 2-传递置换群的结构已经完全清楚。因此对有限本原群的秩的研究主要考虑秩 ≥ 3 的情形。

对秩为 3 的有限传递群 G，早期的工作参看 Higman 的综述文章[1]。这一问题的研究常常是和传递置换群的次轨道相结合。当次轨道长度较大时，这类问题研究的难度非常大。因此到目前为止的工作主要集中在次轨道长度 ≤ 5 的情形。

一个本原置换群若有长度为 1 的非平凡次轨道时，则它一定是素数阶正则传递群；若一个本原置换群有长度为 2 的次轨道，它一定是奇素数阶的二面体群，具体过程参见([2], Theorem 5)。当一个本原置换群有长度为 3 的次轨道时，群的结构变得很复杂，利用 Sim [3]的工作，Wong [4]完成了对这类群的分类。当一个本原置换群有长度为 4 的次轨道时，群的结构就更加复杂。Sim [3]和 Quirin [5]分别得到了部份结果，最终由王杰在文献[6]中利用有限单群分类定理完成了这类群的分类。在文献[7]中 Li，Lu 和 Marusic 结合 3 度 4 度对称图对具有长度为 3 和 4 的次轨道的本原群重新给出了完整的刻画。当一个本原置换群有长度为 5 的次轨道时，王杰在[8] [9]中得到了部分结果。最近(2018 年)由 Fawcett，Giudici，Li，Praeger 等人在文献[10]中完成了对相应的本原群的分类。

近年来研究非本原传递群的相应问题也逐渐引起重视。在本篇文章中，我们构造一些利用圈积的乘积作用和某种非本原作用构造了一些传递置换群，并确定了它们的秩和次级数。

2. 预备知识

本节我们给出本文中要用到的置换群的一些基本概念和结果，关于置换群的更一般的内容参见 Dixon 的经典著作[11]。

定义 2.1 [11]设 G 是一个群，Ω 是一个非空集合，若对 $\forall \alpha \in \Omega, \forall x \in G$，都对应 Ω 中一个元素 α^x，并且满足下面两个条件：

1) $\alpha^1 = \alpha, \forall \alpha \in \Omega$，其中 1 代表 G 中的单位元；

2) $\left(\alpha^x\right)^y = \alpha^{xy}, \forall \alpha \in \Omega, \forall x, y \in G$，

则称群 G 在集合 Ω 上有一个**作用**，或称群 G 作用在集合 Ω 上。

定义 2.2 [11]设群 G 作用在 Ω 上，若 G 在 Ω 上只有一个轨道，即 Ω 本身，则称 G 为 Ω 上的**传递群**，否则称 G 为 Ω 上非传递群。

定义 2.3 [11]设群G传递作用在集合Ω上, ，Δ是Ω任意一个非空集合。若对任意的$x \in G$，或者$\Delta^x = \Delta$，或者$\Delta^x \cap \Delta = \varnothing$，则称$\Delta$是$G$的一个块。

显然单点集$\{\alpha\}$和整个集合Ω都是群G的**块**，称它们为非平凡块。

定义 2.4 [11]设G传递作用在Ω上，如果G没有非平凡块，则称G为**本原群**。

定义 2.5 [11]给定群K，H。设存在同构映射$\tau : H \to Aut(K)$。此时定义K与H的**半直积**G为：

$$G = K : H = \{(k,h) | k \in K, h \in H\},$$

运算为$(k_1,h_1)(k_2,h_2) = \left(k_1 k_2^{\tau(h_1)^{-1}}, h_1 h_2\right)$。

定义 2.6 [11]设$\Gamma = \{1,2,\cdots,m\}$和$\Delta$都是非空集合，用$Fun(\Gamma,\Delta) = \{ f \mid f \text{是}\Gamma\text{到}\Delta\text{的所有映射} \}$，故$Fun(\Gamma,\Delta)$可以用$\Delta^m$表示。

如果$\Delta = K$是群，则$Fun(\Gamma,K) = K^m$表示K的直积，设$H \le S_m$，利用H在$\Gamma = \{1,2,\cdots,m\}$的自然作用，可定义$H$在$Fun(\Gamma,K)$上的一个作用如下，

对任意的$(k_1,k_2,\cdots,k_m) \in K^m$，设$x \in H$，定义：

$$(k_1,k_2,\cdots,k_m)^x = \left(k_{1^y}, k_{2^y}, \cdots, k_{m^y}\right)，\text{其中 } y = x^{-1}，$$

于是可做半直积$Fun(\Gamma,K) : H = K^m : H$，称为$K$与$H$的**圈积**，记为$K\, wr_\Gamma\, H$。

定义 2.7 [11]设群G传递作用在集合Ω上，则群G在$\Omega \times \Omega$上诱导一个自然作用：

$$(\alpha,\beta)^g \triangleq (\alpha^g, \beta^g)$$

即群G在$\Omega \times \Omega$上有一个作用。进而群G在$\Omega \times \Omega$上有轨道。

设$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_r$为群$G$作用在$\Omega \times \Omega$上的所有轨道，$\Delta_i$称为群$G$的一个二元轨道(**orbital**)。其中$\Delta_1 = \{(\alpha,\alpha) | \alpha \in \Omega\}$，$\Delta_i = \left\{(\alpha,\beta)^G \,|\, \alpha,\beta \in \Omega\right\}$。

对每一个Δ_i以及$\alpha \in \Omega$，令

$$\Delta_i(\alpha) = \{ \beta | \beta \in \Omega, (\alpha,\beta) \in \Delta_i \}$$

易证$\Delta_i(\alpha)$是点稳定子G_α作用在集合Ω上的轨道，称它为群G作用在集合Ω上的次轨道，并称群G的次级数为$n_i = |\Delta_i(\alpha)|$。

定义 2.8 [11]当群G传递作用在集合Ω上时，群G在集合Ω上 oribital 的个数等于次轨道的个数，称它为群G的秩，次轨道的长度称为群G的次级数。

3. 传递置换群的秩和次级数

本篇文章的主要结论如下。

定理 3.1 群$S_m\, wr\, S_m$和它的子群$S_m\, wr\, C_m$，$(S_m\, wr\, S_m) \cap A_m$，$(S_m\, wr\, C_m) \cap A_m$非本原作用在$m^3$个点上的秩均为 6，且它们的次级数都为 1，$m-1$，$m-1$，$(m-1)^2$，$m(m-1)$，$m(m-1)^2$。

证明 设$\Delta = \{1,2,\cdots,m\}$，令$\Omega = \Delta \times \Delta \times \Delta$，故$|\Omega| = m^3$，而群$S_m\, wr\, S_m$在集合$\Omega$上的作用如下：

$$(i,j,k)^{(g_1,g_2,\cdots,g_m,h)} = \left(i^{g_k}, j^h, k^h\right).$$

取$\alpha = (1,1,1) \in \Omega$，则群$S_m\, wr\, S_m$稳定点$\alpha$的稳定子群为：

$$L = \left\{(g_1,g_2,\cdots,g_m,h) \,\middle|\, 1^{g_1} = 1^h = 1\right\}.$$

对于$1 \ne i,j,k \in \Delta$，我们有

$$\left|(i,j,k)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_k},j^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(s,t,u)\middle|s,t,u\in\Delta\text{且}t,u\neq 1\right\}\right|=m(m-1)^2,$$

$$\left|(i,1,1)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(s,1,1)\middle|s\in\Delta\text{且}s\neq 1\right\}\right|=(m-1),$$

$$\left|(1,j,1)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_1},j^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(1,t,1)\middle|t\in\Delta\text{且}t\neq 1\right\}\right|=(m-1),$$

$$\left|(i,j,1)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_1},j^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(s,t,1)\middle|s,t\in\Delta\text{且}s,t\neq 1\right\}\right|=(m-1)^2,$$

$$\left|(1,1,k)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_k},1^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(s,1,u)\middle|s,u\in\Delta\text{且}u\neq 1\right\}\right|=m(m-1).$$

故群 $S_m wr S_m$ 的次级数为 6，次级数为 1， $m-1$， $m-1$， $(m-1)^2$， $m(m-1)$， $m(m-1)^2$ 。

现在考虑群 $S_m wr S_m$ 的子群 $S_m wr C_m$， $(S_m wr S_m)\cap A_m$ 和 $(S_m wr C_m)\cap A_m$，它们作用在 Ω 上的关于点 α 的点稳定子与群 $S_m wr S_m$ 作用在 Ω 上的关于点 α 的点稳定子相同，自然就有相同的秩和次级数。

推论 3.2 群 $S_m wr S_m$ 的子群 $D_{2m} wr S_m$ 非本原作用在 m^3 个点上的秩为 $m+3$ 或 $m+4$。

证明 假设 Δ，Ω，α 的定义同定理 3.1，且群 D_{2m} 在集合 Ω 上的作用也同定理 3.1，从而群 D_{2m} 中稳定 α 的稳定子群也为 L。

当 m 为偶数时， $D_{2m}=\left\langle(1,2,3,\cdots,m),(2,m)(3,m-1)\cdots\left(\frac{m}{2},\frac{m+4}{2}\right)\right\rangle$。此时有 $g_1=(2,m)(3,m-1)\cdots\left(\frac{m}{2},\frac{m+4}{2}\right)$。

对于 $\frac{m}{2}+1\neq i\in\Delta;1\neq j,k\in\Delta$，我们有

$$\left|(i,j,k)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_k},j^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|(s,t,u)\middle|s,t,u\in\Delta\text{且}t,u\neq 1\right|=m(m-1)^2;$$

$$\left|(i,1,1)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(i,1,1),(m+2-i,1,1)\right\}\right|=2,$$

i 共有 $\frac{m-2}{2}$ 种取法；

$$\left|(1,j,1)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_1},j^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(1,t,1)\middle|t\in\Delta\text{且}t\neq 1\right\}\right|=(m-1);$$

$$\left|(i,j,1)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_k},j^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(i,t,1),(m+2-i,t,1)\middle|t\in\Delta\text{且}t\neq 1\right\}\right|=2(m-1),$$

i 共有 $\frac{m-2}{2}$ 种取法；

$$\left|(i,1,k)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_k},1^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(s,1,u)\middle|s,u\in\Delta\text{且}u\neq 1\right\}\right|=m(m-1)。$$

而当 $i=\frac{m}{2}+1$时，我们有

$$\left|\left(\frac{m}{2}+1,j,1\right)^L\right|=\left|\left\{\left(\frac{m}{2}+1,t,1\right)\middle|t\in\Delta\text{且}t\neq 1\right\}\right|=m-1,$$

$$\left|\left(\frac{m}{2}+1,1,1\right)^L\right|=\left|\left\{\left(\frac{m}{2}+1,t,1\right)\right\}\right|=1$$

所以 L 有 2 个长为 1 的轨道，$\frac{m-1}{2}$ 个长为 2 的轨道，2 个长为 $m-1$ 的轨道，$\frac{m-1}{2}$ 个长为 $2(m-1)$ 的

轨道，1 个长为 $m(m-1)$ 的轨道，1 个长为 $m(m-1)^2$ 的轨道。从而群 $D_{2m}\,wr\,S_m$ 作用在集合 Ω 上的秩为 $2+\frac{m-2}{2}+2+\frac{m-2}{2}+1+1=m+4$，次级数为 1，1，$\underbrace{2,2,\cdots,2}_{\frac{m-2}{2}}$，$m-1$，$m-1$，$\underbrace{2(m-1),2(m-1),\cdots,2(m-1)}_{\frac{m-2}{2}}$，$m(m-1)$，$m(m-1)^2$。

当 m 为奇数时，$D_{2m}=\left\langle(1,2,3,\cdots,m),(2,m)(3,m-1)\cdots\left(\frac{m+1}{2},\frac{m+3}{2}\right)\right\rangle$。此时有 $g_1=(2,m)(3,m-1)\cdots\left(\frac{m+1}{2},\frac{m+3}{2}\right)$。

现在考虑群 D_{2m} 的次轨道的情况并计算它们的长度。

对于 $1\neq i,j,k\in\Delta$，我们有

$$\left|(i,j,k)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_k},j^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|(s,t,u)\middle|s,t,u\in\Delta\text{且}t,u\neq1\right|=m(m-1)^2;$$

$$\left|(i,1,1)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(i,1,1),(m+2-i,1,1)\right\}\right|=2,$$

i 共有 $\frac{m-1}{2}$ 种取法；

$$\left|(1,j,1)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_1},j^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(1,t,1)\middle|t\in\Delta\text{且}t\neq1\right\}\right|=(m-1);$$

$$\left|(i,j,1)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_1},j^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(i,t,1),(m+2-i,t,1)\middle|t\in\Delta\text{且}t\neq1\right\}\right|=2(m-1),$$

i 共有 $\frac{m-1}{2}$ 种取法；

$$\left|(i,1,k)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_k},1^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(s,1,u)\middle|s,u\in\Delta\text{且}u\neq1\right\}\right|=m(m-1)。$$

所以 L 有 1 个长为 1 的轨道，$\frac{m-1}{2}$ 个长为 2 的轨道，1 个长为 $m-1$ 的轨道，$\frac{m-1}{2}$ 个长为 $2(m-1)$ 的轨道，1 个长为 $m(m-1)$ 的轨道，1 个长为 $m(m-1)^2$ 的轨道。从而群 $D_{2m}\,wr\,S_m$ 作用在集合 Ω 上的秩为 $1+\frac{m-1}{2}+1+\frac{m-1}{2}+1+1=m+3$，次级数为 1，$\underbrace{2,2,\cdots,2}_{\frac{m-1}{2}}$，$m-1$，$\underbrace{2(m-1),2(m-1),\cdots,2(m-1)}_{\frac{m-1}{2}}$，$m(m-1)$，$m(m-1)^2$。

定理 3.3 群 $S_m\,wr\,S_m$ 和它的子群 $S_m\,wr\,C_m$，$(S_m\,wr\,S_m)\cap A_m$，$(S_m\,wr\,C_m)\cap A_m$ 非本原作用在 m^3 个点上的秩均为 6，且它们的次级数都为 1，$m-1$，$m-1$，$(m-1)(m-1)$，$m(m-1)$，$m(m-1)^2$。

证明 设 $\Delta=\{1,2,\cdots,m\}$，令 $\Omega=\Delta\times\Delta\times\Delta$，故 $|\Omega|=m^3$，而群 $S_m\,wr\,S_m$ 在集合 Ω 上的作用如下：

$$(i,j,k)^{(g_1,g_2,\cdots,g_m,h)}=\left(i^{g_j},j^h,k^h\right).$$

取 $\alpha=(1,1,1)\in\Omega$，则群 $S_m\,wr\,S_m$ 稳定点 α 的稳定子群为：

$$L=\left\{(g_1,g_2,\cdots,g_m,h)\middle|1^{g_1}=1^h=1\right\}.$$

对于 $1\neq i,j,k\in\Delta$，我们有

$$\left|(1,j,k)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_j},j^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(s,t,u)\middle|s,t,u\in\Delta\text{且}t,u\neq1\right\}\right|=m(m-1)^2,$$

$$\left|(i,1,1)^L\right| = \left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,1^h\right)\right\}\right| = \left|\left\{(s,1,1)\middle| s\in\Delta\text{且}s\neq 1\right\}\right| = (m-1),$$

$$\left|(1,1,k)^L\right| = \left|\left\{\left(1^{g_1},1^h,k^h\right)\right\}\right| = \left|\left\{(1,1,u)\middle| u\in\Delta\text{且}u\neq 1\right\}\right| = (m-1),$$

$$\left|(\mathrm{i},1,k)^L\right| = \left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,k^h\right)\right\}\right| = \left|\left\{(s,1,u)\middle| s,u\in\Delta\text{且}s,u\neq 1\right\}\right| = (m-1)^2,$$

$$\left|(1,j,1)^L\right| = \left|\left\{\left(1^{g_j},j^h,1^h\right)\right\}\right| = \left|\left\{(s,t,1)\middle| s,t\in\Delta\text{且}t\neq 1\right\}\right| = m(m-1)\text{。}$$

故群 $S_m\, wr S_m$ 的次级数为 6，次级数为 1，$m-1$，$m-1$，$(m-1)^2$，$m(m-1)$，$m(m-1)^2$。

现在考虑群 $S_m\, wr S_m$ 的子群 $S_m\, wr C_m$，$(S_m\, wr S_m)\cap \mathrm{A}_m$ 和 $(S_m\, wr C_m)\cap \mathrm{A}_m$，它们作用在 Ω 上的关于点 α 的点稳定子与群 $S_m\, wr S_m$ 作用在 Ω 上的关于点 α 的点稳定子相同，自然就有相同的秩和次级数。

推论 3.4 群 $S_m\, wr S_m$ 的子群 D_{2m} 非本原作用在 m^3 个点上的秩为 $m+3$ 或 $m+4$。

证明 假设 Δ，Ω，α 的定义同定理 3.3，且群 D_{2m} 在集合 Ω 上的作用也同定理 3.3，从而群 D_{2m} 中稳定 α 的稳定子群也为 L。

当 m 为偶数时，$D_{2m} = \left\langle (1,2,3,\cdots,m),(2,m)(3,m-1)\cdots\left(\frac{m}{2},\frac{m+4}{2}\right)\right\rangle$。此时有 $g_1 = (2,m)(3,m-1)\cdots\left(\frac{m}{2},\frac{m+4}{2}\right)$。

对于 $\frac{m}{2}+1\neq i\in\Delta;1\neq j,k\in\Delta$，我们有

$$\left|(1,j,k)^L\right| = \left|\left\{\left(1^{g_j},j^h,k^h\right)\right\}\right| = \left|(s,t,u)\middle| s,t,u\in\Delta\text{且}t,u\neq 1\right| = m(m-1)^2;$$

$$\left|(i,1,1)^L\right| = \left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,1^h\right)\right\}\right| = \left|\left\{(i,1,1),(m+2-i,1,1)\right\}\right| = 2,$$

i 共有 $\frac{m-2}{2}$ 种取法；

$$\left|(1,1,k)^L\right| = \left|\left\{\left(1^{g_1},1^h,k^h\right)\right\}\right| = \left|\left\{(1,1,u)\middle| u\in\Delta\text{且}u\neq 1\right\}\right| = (m-1);$$

$$\left|(i,1,k)^L\right| = \left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,k^h\right)\right\}\right| = \left|\left\{(i,1,u),(m+2-i,1,u)\middle| u\in\Delta\text{且}u\neq 1\right\}\right| = 2(m-1),$$

i 共有 $\frac{m-2}{2}$ 种取法；

$$\left|(1,j,1)^L\right| = \left|\left\{\left(1^{g_j},j^h,1^h\right)\right\}\right| = \left|\left\{(s,t,1)\middle| s,t\in\Delta\text{且}t\neq 1\right\}\right| = m(m-1)\text{。}$$

而当 $i=\frac{m}{2}+1$ 时，我们有

$$\left|\left(\frac{m}{2}+1,1,k\right)^L\right| = \left|\left\{\left(\frac{m}{2}+1,1,u\right)\middle| u\in\Delta\text{且}u\neq 1\right\}\right| = m-1,$$

$$\left|\left(\frac{m}{2}+1,1,1\right)^L\right| = \left|\left\{\left(\frac{m}{2}+1,1,1\right)\right\}\right| = 1$$

所以 L 有 2 个长为 1 的轨道，$\frac{m-2}{2}$ 个长为 2 的轨道，2 个长为 $m-1$ 的轨道，$\frac{m-2}{2}$ 个长为 $2(m-1)$

的轨道，1 个长为 $m(m-1)$ 的轨道，1 个长为 $m(m-1)^2$ 的轨道。从而群 $D_{2m}\,wr\,S_m$ 作用在集合 Ω 上的秩为 $2+\frac{m-2}{2}+2+\frac{m-2}{2}+1+1=m+4$，次级数为 1，1，$\underbrace{2,2,\cdots,2}_{\frac{m-2}{2}}$，$m-1$，$m-1$，$\underbrace{2(m-1),2(m-1),\cdots,2(m-1)}_{\frac{m-2}{2}}$，$m(m-1)$，$m(m-1)^2$。

当 m 为奇数时，$D_{2m}=\left\langle(1,2,3,\cdots,m),(2,m)(3,m-1)\cdots\left(\frac{m+1}{2},\frac{m+3}{2}\right)\right\rangle$。此时有 $g_1=(2,m)(3,m-1)\cdots\left(\frac{m+1}{2},\frac{m+3}{2}\right)$。

现在考虑群 D_{2m} 的次轨道的情况并计算它们的长度。

对于 $1\neq i,j,k\in\Delta$，我们有

$$\left|(1,j,k)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_j},j^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|(s,t,u)\middle|s,t,u\in\Delta\text{且}t,u\neq1\right|=m(m-1)^2;$$

$$\left|(i,1,1)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(i,1,1),(m+2-i,1,1)\right\}\right|=2,$$

i 共有 $\frac{m-1}{2}$ 种取法；

$$\left|(1,1,k)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_1},1^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(1,1,u)\middle|u\in\Delta\text{且}u\neq1\right\}\right|=(m-1);$$

$$\left|(i,1,k)^L\right|=\left|\left\{\left(i^{g_1},1^h,k^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(i,1,u),(m+2-i,1,u)\middle|u\in\Delta\text{且}u\neq1\right\}\right|=2(m-1),$$

i 共有 $\frac{m-1}{2}$ 种取法；

$$\left|(1,j,1)^L\right|=\left|\left\{\left(1^{g_j},j^h,1^h\right)\right\}\right|=\left|\left\{(s,t,1)\middle|s,t\in\Delta\text{且}t\neq1\right\}\right|=m(m-1)。$$

所以 L 有 1 个长为 1 的轨道，$\frac{m-1}{2}$ 个长为 2 的轨道，1 个长为 $m-1$ 的轨道，$\frac{m-1}{2}$ 个长为 $2(m-1)$ 的轨道，1 个长为 $m(m-1)$ 的轨道，1 个长为 $m(m-1)^2$ 的轨道。从而群 $D_{2m}\,wr\,S_m$ 作用在集合 Ω 上的秩为 $1+\frac{m-1}{2}+1+\frac{m-1}{2}+1+1=m+3$，次级数为 1，$\underbrace{2,2,\cdots,2}_{\frac{m-1}{2}}$，$m-1$，$\underbrace{2(m-1),2(m-1),\cdots,2(m-1)}_{\frac{m-1}{2}}$，$m(m-1)$，$m(m-1)^2$。

定理 3.5 群 $S_n\,wr\,S_3$ 及它的子群 $S_n\,wr\,C_3$，$(S_n\,wr\,S_3)\cap A_n$，$(S_n\,wr\,C_3)\cap A_n$ 利用乘积作用作用在 m^3 个点上的秩都为 7，且它们的次级数均为 1，$m-1$，$3(m-1)$，$3(m-1)$，$3(m-1)(m-2)$，$3(m-1)(m-2)$，$(m-1)(m-2)(m-3)$。

证明设 $\Gamma=\{1,2,\cdots,m\}$，$\Delta=\{a,b,c\}$，定义 $\Omega:=Fun(\Delta,S_m)$，则 $|\Omega|=m^3$。群 $S_m\,wr\,S_3=Fun(\Delta,S_m):S_3$ 在集合 Ω 上的作用如下：

$$\Phi^{(f,x)}(\gamma):=\Phi\left(\gamma^{x^{-1}}\right)^{f\left(\gamma^{x^{-1}}\right)}$$

其中 $\gamma\in\Delta$，$\Phi\in\Omega$，$f\in Fun(\Delta,S_m)$，$x\in S_3$。定义映射，$\Phi_1:\Phi_1(a)=\Phi_1(b)=1$。可由[1，引理 2.7]知，群 $S_m\,wr\,S_3$ 中稳定 Φ_1 的点稳定子为：

$L=\left\{(f,x)\in S_m wr S_3 \,\middle|\, f(\gamma)\in(S_m)_1,\gamma=a,b\text{或}c\right\}$，则

则 $\Sigma_1=\{\Phi_1\}$，

$$\Sigma_2=\left\{\Phi_2\left|\begin{array}{l}\Phi_2(a)=\Phi_2(b)=1,\Phi_2(c)=i\neq 1\\ \text{或}\Phi_2(b)=\Phi_2(c)=1,\Phi_2(a)=i\neq 1\\ \text{或}\Phi_2(c)=\Phi_2(a)=1,\Phi_2(b)=i\neq 1\end{array}\right.\right\},$$

$$\Sigma_3=\left\{\Phi_3\left|\begin{array}{l}\Phi_3(a)=1,\Phi_2(b)=i\neq 1,\Phi_2(c)=j\neq 1\\ \text{或}\Phi_3(b)=1,\Phi_2(c)=i\neq 1,\Phi_2(a)=j\neq 1\\ \text{或}\Phi_3(c)=1,\Phi_2(a)=i\neq 1,\Phi_2(b)=j\neq 1\end{array}\right.\right\},$$

$$\Sigma_4=\left\{\Phi_4\left|\begin{array}{l}\Phi_4(a)=1,\Phi_4(b)=\Phi_4(c)=i\neq 1\\ \text{或}\Phi_4(b)=1,\Phi_4(c)=\Phi_4(a)=i\neq 1\\ \text{或}\Phi_4(c)=1,\Phi_4(a)=\Phi_4(b)=i\neq 1\end{array}\right.\right\},$$

$$\Sigma_5=\left\{\Phi_5\left|\begin{array}{l}\Phi_5(a)=i\neq 1,\Phi_5(b)=\Phi_5(a)=j\neq 1\\ \text{或}\Phi_5(b)=i\neq 1,\Phi_5(c)=\Phi_5(a)=j\neq 1\\ \text{或}\Phi_5(c)=i\neq 1,\Phi_5(a)=\Phi_5(b)=j\neq 1\end{array}\right.\right\},$$

$$\Sigma_6=\left\{\Phi_6\,\middle|\,\Phi_6(a)=\Phi_6(b)=\Phi_6(c)=i\neq 1\right\},$$

$$\Sigma_7=\left\{\Phi_6\,\middle|\,\Phi_6(a)=i\neq 1,\Phi_6(b)=j\neq 1,\Phi_6(c)=k\neq 1\text{且}i\neq j\neq k\right\}。$$

故群 $S_m wr S_3$ 的秩为 7，由上述证明易知 $|\Sigma_1|=1$，$|\Sigma_2|=3(m-1)$，$|\Sigma_3|=3(m-1)(m-2)$，$|\Sigma_4|=3(m-1)$，$|\Sigma_5|=3(m-1)(m-2)$，$|\Sigma_6|=m-1$，$|\Sigma_7|=(m-1)(m-2)(m-3)$。因此群 $S_m wr S_3$ 的次级数为 1，$m-1$，$3(m-1)$，$3(m-1)$，$3(m-1)(m-2)$，$3(m-1)(m-2)$，$(m-1)(m-2)(m-3)$。

现在考虑群 $S_m wr S_3$ 的子群 $S_m wr C_3$，$(S_m wr S_3)\cap A_m$ 和 $(S_m wr C_3)\cap A_m$，它们通过乘积作用在 Ω 上的关于点 Φ_1 的点稳定子与群 $S_m wr S_3$ 作用在 Ω 上的关于点 Φ_1 的点稳定子相同，自然就有相同的秩和次级数。

参考文献

[1] Higman, D.G. (1964) Finite Permutation Groups of Rank 3. *Mathematische Zeitschrift*, **86**, 145-156. https://doi.org/10.1007/BF01111335

[2] Neumann, P.M. and Finite Permutation Groups (1977) Edge-Coloured Graphs and Matrices. In: *Topics in Group Theory and Computation*, Proc. Summer School, University College, Galway, 82-118.

[3] Sims, C.C. (1967) Graphs and Finite Permutation Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **95**, 76-86. https://doi.org/10.1007/BF01117534

[4] Wong, W.J. (1967) Determination of a Class of Primitive Permutation Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **99**, 235-246. https://doi.org/10.1007/BF01112454

[5] Quirin, W.L. (1971) Primitive Permutation Groups with Small Orbitals. *Mathematische Zeitschrift*, **122**, 267-274. https://doi.org/10.1007/BF01109920

[6] Wang, J. (1992) The Primitive Permutation Groups with an Orbital of Length 4. *Communications in Algebra*, **20**, 889-921. https://doi.org/10.1080/00927879208824381

[7] Li, C.H., Lu, Z.P. and Marušič, D. (2004) On Primitive Permutation Groups with Small Suborbits and Their Orbital Graphs. *Journal of Algebra*, **279**, 749-770. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.03.005

[8] Wang, J. (1995) Primitive Permutation Groups with a Solvable Subconstituent of Degree 5. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, **31**, 520-526.

[9] Wang, J. (1996) Primitive Permutation Groups with an Unfaithful Subconstituent Containing A_5. *Algebra Colloquium*, **3**,

11-18.

[10] Fawcett, J.B., Giudici, M., Li, C.H., Praeger, C.E., Royle, G. and Verret, G. (2018) Primitive Permutation Groups with a Suborbit of Length 5 and Vertex-Primitive Graphs of Valency 5. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series A*, **157**, 247-266. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2018.02.008

[11] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1996) Permutation Groups. In: *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3