Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 55-64
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102010

Hans汉斯

The Means of Gcd-Sum Function and Lcm-Sum Function in the Ring on the Finite Filed

Xin Li

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 1607747803@qq.com

Received: Jan. 21st, 2020; accepted: Feb. 6th, 2020; published: Feb. 13th, 2020

Abstract

The greatest common divisor and the least common multiple are one of the classical problems in number theory. In this paper, we use the multiplicative function property and Dirichlet series to study the mean values of Gcd-sum function and Lcm-sum function on polynomial rings in finite fields. In the end, we compare with the results on integer rings and obtain consistent conclusions.

Keywords

Multiplicative Function, Dirichlet Series, Riemann Zeta Function, Dirichlet Convolution

有限域多项式环上的GCD和函数与LCM和函数的均值

李　欣

青岛大学，数学与统计学院，山东　青岛
Email: 1607747803@qq.com

收稿日期：2020年1月21日；录用日期：2020年2月6日；发布日期：2020年2月13日

摘　要

最大公约数和最小公倍数问题是数论的经典问题之一，本文利用其和函数的可乘性和Dirichlet级数，研究Gcd和函数与Lcm和函数在有限域的多项式环上的均值并且与整数环上的结果对比得到一致结论。

文章引用: 李欣. 有限域多项式环上的 GCD 和函数与 LCM 和函数的均值[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 55-64.
DOI: 10.12677/pm.2020.102010

关键词

可乘函数，Dirichlet级数，黎曼Zeta函数，Dirichlet卷积

1. Gcd 和函数介绍

本文研究了多项式环 $F_q[T]$ 上的最大公因式和函数：$g(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\|\gcd(h,f)\|$。这个函数的背景是来自整数环 Z 上的最大公约数和函数：$G(n)=\sum_{i=1}^{n}\gcd(i,n)$，因为这个函数是可乘的，能写成在素数方幂值的乘积形式，对应的 Dirichlet 级数在复平面内解析，除了黎曼 Zeta 函数零点和 $s=2$ 的极点外。

对于整数环 Z 上的最大公约数和函数我们有以下结果：

$$G(n)=\sum_{i=1}^{n}(i,n)=\sum_{d|n}d\varphi(n/d)\quad(n\in N),$$

$G(n)$ 是可乘函数。

$G(n)$ 的和函数的渐进公式为

$$\sum_{n\le x}G(n)=\frac{x^2}{2\zeta(2)}\left(\log x+2\gamma-\frac{1}{2}-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+O\left(x^{1+\theta+\varepsilon}\right),\tag{1}$$

对任意 $\varepsilon>0$ 成立，其中 γ 是欧拉常数，θ 是 Dirichlet 除数问题的参数。参见文献综述[1]。

函数

$$G^{(-1)}(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i,n)}=\sum_{d|n}\frac{\varphi(n/d)}{d}\quad(n\in N),$$

也是可乘函数。

$G^{(-1)}(n)$ 的和函数的渐近公式为

$$\sum_{n\le x}G^{(-1)}(n)=\frac{\zeta(3)}{2\zeta(2)}x^2+O\left(x(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3}\right).\tag{2}$$

参见([2],Th. 5.1)。

随之，我们可以研究多项式环上最大公因式和最小公倍数的和函数的均值问题，因为多项式有次数可以求导的特殊性质，我们可以避开黎曼 Zeta 函数的零点，得到更好的结果。

2. Gcd 和函数的相关均值

定理 2.1 $g(f)$ 的卷积表达式为

$$g(f)=(\varphi*\lambda_1)(f),$$

其中 $\lambda_1(f)=\|f\|$。

证明：由定义知 $g(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\|(h,f)\|$，令 e 是 h 和 f 的最大公因式，同样是首项系数为 1 的多项式，即 $(h,f)=e$。当且仅当 $e\mid f$ 和 $e\mid h$ 时有 $\left(\frac{h}{e},\frac{f}{e}\right)=1$，因此

$$g(f)=\sum_{e\mid f}\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\(h,f)=e}}\|(h,f)\|=\sum_{e\mid f}\|e\|\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\(h,f)=e}}1=\sum_{e\mid f}\|e\|\varphi\left(\frac{f}{e}\right)=(\varphi*\lambda_1)(f).$$ □

定理 2.2 $g(f)$ 的均值为

$$\sum_{f\in M_n}g(f)=(n+1)q^{2n}-nq^{2n-1}. \tag{3}$$

证明：令 $D_1(s)$ 为 $g(f)$ 的 Dirichlet 级数，当 $\mathrm{Re}\,s>2$ 时，由定理 2.1 可得：

$$D_1(s)=\sum_{f\in M}\frac{g(f)}{\|f\|^s}=\left(\sum_{f\in M}\frac{\varphi(f)}{\|f\|^s}\right)\left(\sum_{f\in M}\frac{\lambda_1(f)}{\|f\|^s}\right)=\frac{\zeta_A^2(s-1)}{\zeta_A(s)},$$

又因为 $\zeta_A(s)=\sum_{f\in M}\frac{1}{\|f\|^s}=\frac{1}{1-q^{1-s}}=\frac{1}{1-qu}\quad(u=q^{-s})$，我们有

$$\zeta_A(s-1)=\frac{1}{1-q^2u}=\sum_{k=0}^{\infty}(q^2u)^k=\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}u^k,$$

$$\begin{aligned}\zeta_A^2(s-1)&=\left(\frac{1}{1-q^2u}\right)^2=\sum_{k=0}^{\infty}(q^2u)^k\sum_{t=0}^{\infty}(q^2u)^t=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(q^2u)^{k+t}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}q^{2n}u^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)q^{2n}u^n\end{aligned},$$

因此

$$D_1(s)=(1-qu)\left(\frac{1}{1-q^2u}\right)^2=(1-qu)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^{2n}u^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)q^{2n}-nq^{2n-1}\right]u^n \tag{4}$$

由定义可知，

$$D_1(s)=\sum_{f\in M}\frac{g(f)}{\|f\|^s}=\sum_{d=0}^{\infty}\sum_{f\in M_d}\frac{g(f)}{q^{ds}}=\sum_{d=0}^{\infty}\sum_{f\in M_d}g(f)u^n \tag{5}$$

由(4)和(5)得(3)。 □

定义 2.3 Gcd 的倒数和函数为

$$g_{-1}(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\frac{1}{\|(h,f)\|}.$$

令 $(h,f)=e$，可以得出 $g_{-1}(f)$ 的卷积公式

$$g_{-1}(f)=\sum_{e\mid f}\frac{1}{\|e\|}\varphi\left(\frac{f}{e}\right)=(\lambda_{-1}*\varphi)(f),$$

其中 $\lambda_{-1}(f)=\frac{1}{\|f\|}$。

定理 2.4 $g_{-1}(f)$ 的均值为

$$\sum_{f\in M_n} g_{-1}(f)=\frac{1+q^{2n+1}}{1+q}. \tag{6}$$

证明：令 $D_2(s)=\sum_{f\in M}\frac{g_{-1}(f)}{\|f\|^s}$，

则

$$D_2(s)=\sum_{f\in M}\frac{\varphi(f)}{\|f\|^s}\sum_{f\in M}\frac{\lambda_{-1}(f)}{\|f\|^s}=\frac{\zeta_A^2(s-1)}{\zeta_A(s)},$$

利用(4)的方法可得：

$$D_2(s)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1+q^{2n+1}}{1+q}u^n, \tag{7}$$

由定义知：

$$D_2(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in M_n} g_{-1}(f)u^n, \tag{8}$$

由(7)和(8)可得(6)。 □

从有限域的多项式环到整数环有字典对应：

$$\begin{aligned} &F_q[T]\to Z\\ &n\ \to \log x\ .\\ &q^n\to x \end{aligned}$$

则定理 2.2 公式(3)

$$\begin{aligned} &\sum_{f\in M_n} g(f)=(n+1)q^{2n}-nq^{2n-1}\\ &\to\frac{x^2}{\zeta_A(2)}\left(\log x+\zeta_A(2)\right) \end{aligned},$$

与公式(1)对比

$$\sum_{n\le x}G(n)=\frac{x^2}{2\zeta(2)}\left(\log x+2\gamma-\frac{1}{2}-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+O\left(x^{1+\theta+\varepsilon}\right),$$

可得有限域多项式环上 Gcd 和函数的均值的主项与整数环上的相同。

同样地，定理 2.4 公式(6)有

$$\begin{aligned} &\sum_{f\in M_n} g_{-1}(f)=\frac{1+q^{2n+1}}{1+q}\\ &\to\frac{\zeta_A(3)}{\zeta_A(2)}x^2+2\left(1-\frac{\zeta_A(3)}{\zeta_A^2(2)}\right) \end{aligned},$$

与公式(2)对比

$$\sum_{n\le x}G^{(-1)}(n)=\frac{\zeta(3)}{2\zeta(2)}x^2+O\left(x(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3}\right),$$

可得有限域多项式环上 Gcd 倒数和函数的均值的主项与整数环上的相同。

DOI: 10.12677/pm.2020.102010

3. 一般化的最大公因式和函数

多项式环上的最大公因式和函数 g 可以归纳到对任意实数 i 的幂次来研究，如下：

我们令

$$g_i(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\|(h,f)\|^i,$$

同样我们将上式写成 Dirichlet 卷积形式，

$$g_i(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\|(h,f)\|^i=\sum_{e|f}\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\(h,f)=e}}\|e\|^i=\sum_{e|f}\|e\|^i\varphi\left(\frac{f}{e}\right)=(\lambda_i*\varphi)(f)$$

其中 $\lambda_i(f)=\|f\|^i$。

定理 3.1 $g_i(f)$ 的均值为

$$\sum_{f\in M_n}g_i(f)=\frac{q^{2n}-q^{(i+1)n+(i-1)}}{1-q^{i-1}}\quad(i\neq 1). \tag{9}$$

证明：

$$\begin{aligned}D(s)&=\sum_{f\in M}\frac{g_i(f)}{\|f\|^s}=\sum_{f\in M}\frac{\varphi(f)}{\|f\|^s}\sum_{f\in M}\frac{\lambda_i(f)}{\|f\|^s}=\frac{\zeta_A(s-1)\zeta_A(s-i)}{\zeta_A(s)}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(1+i)n}+q^{2n-i}-q^{2n+(1-i)}-q^{(1+i)n-i}}{1-q^{1-i}}u^n\end{aligned}, \tag{10}$$

由定义得，

$$D(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in M_n}g_i(f)u^n, \tag{11}$$

由(10)和(11)可得(9)。 □

gcd 和函数的其他的推广结果可参考[3] [4]。

4. Lcm 和函数介绍

同时我们研究了最小公倍式 lcm 和函数 $l(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\|\mathrm{lcm}[h,f]\|$，这个函数来自整数环 $\mathbb{Z}$ 上的最小公倍数 $L(n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{lcm}[i,n]$。

对于整数环 Z 上的最小公倍数和函数我们有以下结果：

$$L(n)=\sum_{i=1}^{n}[i,n]=\frac{n}{2}\left(1+\sum_{d|n}d\varphi(d)\right)\quad(n\in N),$$

$L(n)$ 是不可乘函数。

$L(n)$ 的和函数的渐进公式为

$$\sum_{n\le x}L(n)=\frac{\zeta(3)}{8\zeta(2)}x^4+O\left(x^3(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3}\right), \tag{12}$$

参见([2]，Th.6.3)。

定义 lcm 倒数和函数

$$L^{(-1)}(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{[i,n]}\quad (n\in N),$$

也是不可乘函数。

$L^{(-1)}(n)$ 的和函数的渐近公式为

$$\sum_{n\le x}L^{(-1)}(n)=\frac{1}{\pi}(\log x)^2+A(\log x)^2+O(\log x),\tag{13}$$

其中 A 是一个明确的常数。参见([2], Th. 7.1)。

5. $l(f)$ 的均值

定理 5.1 $l(f)$ 的和函数的公式为

$$\sum_{f\in M_n}l(f)=\frac{(n+1)q^{2n}+nq^{2n+1}}{1-q^2}-\frac{q^{4n+1}+q^{2n}}{(q+1)(1-q^2)}.\tag{14}$$

证明：由定义可知，

$$l(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\frac{\|hf\|}{\|(h,f)\|}=\|f\|\sum_{e|f}\frac{1}{\|e\|}\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\(h,f)=e}}\frac{\|h\|}{\|e\|},$$

令 $\frac{h}{e}=j$，则上式为

$$=\|f\|\sum_{e|f}\sum_{\substack{\|j\|<\|f/e\|\\(j,f/e)=1}}\|j\|.$$

令 $y(f)=\sum_{\substack{\|j\|<\|f\|\\(j,f)=1}}\|j\|$，$\lambda_f=\|f\|$，则

$$L(f)=(y*\lambda_f)(f).$$

接下来我们计算 $y(f)$

$$y(f)=\sum_{\|j\|<\|f\|}\|j\|\sum_{d|(j,f)}\mu(d),$$

令 $j=dl$，则上式

$$=\sum_{\|dl\|<\|f\|}\sum_{d|f}\|d\|\mu(d)\|l\|=\sum_{d|f}\|d\|\mu(d)\sum_{\|dl\|<\|f\|}\|l\|,$$

对 l 分类，则有

$$=\sum_{d|f}\|d\|\mu(d)\sum_{t=0}^{\deg f/d-1}\sum_{l\in M_t}q^t=\sum_{d|f}\|d\|\mu(d)\sum_{t=0}^{\deg f/d-1}q^{2t}=\sum_{d|f}\|d\|\mu(d)\left(\frac{1-q^{2(\deg f-\deg d)}}{1-q^2}\right),$$

所以

$$l(f)=\frac{\|f\|}{1-q^2}\sum_{de|f}\|d\|\mu(d)\left(1-q^{2(\deg f-\deg de)}\right)=\frac{\|f\|}{1-q^2}\left(\sum_{de|f}\|d\|\mu(d)-\sum_{de|f}\|d\|\mu(d)q^{2(\deg f-\deg de)}\right)$$

令 $I_1=\sum_{de|f}\|d\|\mu(d)$，$I_2=\sum_{de|f}\|d\|\mu(d)q^{2(\deg f-\deg de)}$ 则

$$I_1=\sum_{f=bde}\|d\|\mu(d)=\sum_{d|f}\|d\|\mu(d)\sum_{e|f/d}1=\sum_{d|f}\|d\|\mu(d)d(f/d),$$

$$I_2=\sum_{de|f}\frac{\|d\|\mu(d)\|f\|^2}{\|ed\|^2}=\|f\|^2\sum_{de|f}\frac{\mu(d)}{\|d\|\|e\|^2}=\|f\|\sum_{e|f}\frac{1}{\|e\|}\sum_{d|f/e}\frac{\mu(d)}{\|d\|}\|f/e\|=\|f\|\sum_{e|f}\frac{1}{\|e\|}\varphi(f/e)$$

令 $\mu'(f)=\mu(f)\|f\|$，$\lambda_{-1}(f)=\frac{1}{\|f\|}$ 则

$$l(f)=\frac{\|f\|}{1-q^2}\big((\mu'*d)(f)-\|f\|(\lambda_{-1}*\varphi)(f)\big).$$

因此 $l(f)$ 函数的 Dirichlet 级数为

$$D_l(s)=\sum_{f\in M}\frac{l(f)}{\|f\|^s}=\frac{1}{1-q^2}\left(\sum_{f\in M}\frac{(\mu'*d)(f)}{\|f\|^{s-1}}-\sum_{f\in M}\frac{(\lambda_{-1}*\varphi)(f)}{\|f\|^{s-2}}\right).$$

又因为

$$\sum_{f\in M}\frac{(\mu'*d)(f)}{\|f\|^{s-1}}=\sum_{f_1\in M}\frac{\mu'(f)}{\|f_1\|^{s-1}}\sum_{f_2\in M}\frac{d(f)}{\|f_2\|^{s-1}}=\frac{\zeta_A^2(s-1)}{\zeta_A(s-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)q^{2n}+nq^{2n+1}\right]u^n,$$

$$\sum_{f\in M}\frac{(\lambda_{-1}*\varphi)(f)}{\|f\|^{s-2}}=\sum_{f_1\in M}\frac{\lambda_{-1}(f_1)}{\|f\|^{s-2}}\sum_{f_2\in M}\frac{\varphi(f_2)}{\|f\|^{s-2}}=\frac{\zeta_A(s-1)\zeta_A(s-3)}{\zeta_A(s-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n+1}+q^{2n}}{(q+1)}u^n.$$

参见([5], Chap1,2)。

所以

$$D_l(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+1)q^{2n}+nq^{2n+1}}{1-q^2}-\frac{q^{4n+1}+q^{2n}}{(q+1)(1-q^2)}\right]u^n,$$

又因为

$$D_l(s)=\sum_{n=0}^{\infty}u^n\sum_{f\in M_n}l(f),$$

可得

$$\sum_{f\in M_n}l(f)=\frac{(n+1)q^{2n}+nq^{2n+1}}{1-q^2}-\frac{q^{4n+1}+q^{2n}}{(q+1)(1-q^2)}.$$ □

令 $l^{-1}(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\frac{1}{\|[h,f]\|}$，是不可乘函数。

定理 5.2 $l^{-1}(f)$ 的和函数的公式为

$$\sum_{f\in M_n}l^{-1}(f)=\frac{q-1}{2q}n^2+\frac{q+1}{2q}n. \tag{15}$$

证明：由定义可知，

$$l^{-1}(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\frac{\|(h,f)\|}{\|hf\|}=\frac{1}{\|f\|}\sum_{\|h\|<\|f\|}\frac{\|(h,f)\|}{\|h\|},$$

令 $(h,f)=e$，则上式为

$$=\frac{1}{\|f\|}\sum_{e|f}\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\(h,f)=e}}\frac{\|e\|}{\|h\|}=\frac{1}{\|f\|}\sum_{e|f}\sum_{\substack{\|h/e\|<\|f/e\|\\(h/e,f/e)=1}}\frac{1}{\|h/e\|},$$

令 $j=h/e$，则有

$$=\frac{1}{\|f\|}\sum_{e|f}\sum_{\substack{\|j\|<\|f/e\|\\(j,f/e)=1}}\frac{1}{\|j\|}=\frac{1}{\|f\|}\sum_{ed=f}\sum_{\substack{\|j\|<\|d\|\\(j,d)=1}}\frac{1}{\|j\|}.$$

令 $H(e)=\sum_{\substack{\|j\|<\|e\|\\(j,e)=1}}\frac{1}{\|j\|}$， $I(f)=1$，则有

$$l^{-1}(f)=\frac{1}{\|f\|}\sum_{e|f}H(e)=\frac{1}{\|f\|}(H*I)(f).$$

接下来我们计算 $H(f)$，令 $md=h$，则

$$H(f)=\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\(h,f)=1}}\frac{1}{\|h\|}=\sum_{\|h\|<\|f\|}\frac{1}{\|h\|}\sum_{d|(h,f)}\mu(d)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\frac{1}{\|h\|}\sum_{\substack{d|h\\d|f}}\mu(d)=\sum_{d|f}\frac{\mu(d)}{\|d\|}\sum_{\|m\|<\|f/d\|}\frac{1}{\|m\|},$$

又因为

$$\sum_{\|m\|<\|f/d\|}\frac{1}{\|m\|}=\sum_{t=0}^{\deg f/d-1}\sum_{m\in M_t}q^{-t}=\sum_{t=0}^{\deg f/d-1}=\deg f-\deg d,$$

所以

$$H(f)=\sum_{d|f}\frac{\mu(d)}{\|d\|}\deg f/d=\sum_{d|f}\frac{\mu(d)}{\|d\|}\log_q\frac{\|f\|}{\|d\|}=(\mu''*\nu)(f),$$

其中 $\mu''(f)=\frac{\mu(f)}{\|f\|}$， $\nu(f)=\log_q\|f\|$。

因此 $l^{-1}(f)$ 的 Dirichlet 级数为

$$D_{l^{-1}}(s)=\sum_{f\in M}\frac{l^{-1}(s)}{\|f\|^s}=\sum_{f\in M}\frac{(\mu''*\nu*I)(f)}{\|f\|^{s+1}}=\sum_{f_1\in M}\frac{\mu''(f_1)}{\|f_1\|^{s+1}}\sum_{f_2\in M}\frac{\nu(f_2)}{\|f_2\|^{s+1}}\sum_{f_3\in M}\frac{I(f_3)}{\|f_3\|^{s+1}},$$

接下来分别计算三个级数

$$\sum_{f_1\in M}\frac{\mu''(f_1)}{\|f_1\|^{s+1}}=\sum_{f_1\in M}\frac{\mu(f_1)}{\|f_1\|^{s+2}}=\frac{1}{\zeta_A(s+2)}=1-q^{-1}u,$$

$$\sum_{f_2\in M}\frac{\nu(f_2)}{\|f_2\|^{s+1}}=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{f_2\in M_t}\frac{t}{q^{t(s+1)}}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{t}{q^{ts}}=\frac{q^s}{(q^s-1)^2}=\frac{u}{(1-u)^2},$$

$$\sum_{f_3\in M}\frac{I(f_3)}{\|f_3\|^{s+1}}=\zeta_A(s+1)=\frac{1}{1-u},$$

因此可得

$$D_{l^{-1}}(s)=\frac{\left(1-q^{-1}u\right)u}{\left(1-u\right)^{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2q}\right]u^{n},$$

又因为

$$D_{l^{-1}}(s)=\sum_{f\in M}\frac{l^{-1}(f)}{\|f\|^{s}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in M_n}l^{-1}(f)u^{n},$$

对比系数可得

$$\sum_{f\in M_n}l^{-1}(f)=\frac{q-1}{2q}n^{2}+\frac{q+1}{2q}n. \qquad \square$$

利用字典对应，

$$\begin{aligned}&F_q[T]\to Z\\&n\ \to \log x\ ,\\&q^{n}\to x\end{aligned}$$

则定理 5.1 公式(14)有

$$\sum_{f\in M_n}l(f)=\frac{q}{(q+1)(q^{2}-1)}q^{4n}-\frac{nq^{2}+2nq+n+q}{(q+1)(q^{2}-1)}q^{2n},$$

与公式(12)对比

$$\sum_{n\le x}L(n)=\frac{\zeta(3)}{8\zeta(2)}x^{4}+O\left(x^{3}(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3}\right),$$

所以有限域多项式环上 lcm 和函数的均值的主项与整数环上相同。

同样地，定理 5.2 公式(15)有

$$\begin{aligned}&\sum_{f\in M_n}l^{-1}(f)=\frac{q-1}{2q}n^{2}+\frac{q+1}{2q}n\\&\to\frac{3}{\pi^{2}}(\log x)^{2}+\frac{\zeta_A(2)}{2\zeta_A(3)}\log x\end{aligned},$$

与公式(13)对比

$$\sum_{n\le x}L^{(-1)}(n)=\frac{1}{\pi}(\log x)^{2}+A(\log x)^{2}+O(\log x),$$

所以有限域多项式环上 lcm 和函数的均值的主项与整数环上的相同。

致　谢

感谢山东省自然科学基金(项目编号：ZR2019BA028)资助。

基金项目

山东省自然科学基金(项目编号 ZR2019BA028)。

参考文献

[1] Tóth, L. (2010) A Survey of Gcd-Sum Functions. *Journal of Integer Sequences*, **13**, Article 10.8.1.

[2] Bordelles, O. (2007) Mean Values of Generalized GCD-Sum and LCM-Sum Functions. *Journal of Integer Sequences*, **10**, 13 p.

[3] Hilberdink, T., Luca, F. and Tóth, L. (2018) On Certain Sums Concerning the Gcd's and Lcm's of k Positive Integers. *International Journal of Number Theory*, **16**, 77-90.

[4] Broughan, K.A. (2001) The Gcd-Sum Function. *Journal of Integer Sequences*, **4**, Article 01.2.2.

[5] Rosen, M. (2002) Polynomials over Finite Fields. *Number Theory in Function Fields*, **210**, 1-9. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6046-0_1

附　录

符号说明

$A=F_q\left[T\right]=\left\{a_nT^n+a_{n-1}T^{n-1}+\cdots+a_1T+a_0,a_i\in F_q\right\}$：有限域 F_q 上的多项式环；

$M=\left\{T^n+a_{n-1}T^{n-1}+\cdots+a_1T+a_0,a_i\in F_q\right\}$：所有首项系数为 1 的多项式集合，且 M_n 为首项系数为 1 次数为 n 的多项式集合；

$e,f,h,j\in M$：是首项系数为 1 的多项式；

$\|f\|=q^{\deg f}$；

$\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$：黎曼 Zeta 函数；

$\zeta_A\left(s\right)=\sum\limits_{f\in M}\frac{1}{\|f\|^s}$：函数域 A 上的黎曼 Zeta 函数；

$\gcd\left(h,f\right)$：多项式 h 和 f 的最大公因式；

$\gcd\left(i,n\right)$：整数 i 和 n 的最大公约数；

$\mathrm{lcm}\left[h,f\right]$：多项式 h 和 f 的最小公倍式；

$\mathrm{lcm}\left[i,n\right]$：整数 i 和 n 的最小公倍数；

$\varphi\left(n\right),\varphi\left(f\right)$：欧拉函数。