Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 80-90
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102013

Gradient Estimate for Harmonic Maps from Finsler Manifolds to Riemannian Manifolds

Zhenhai Fan, Yibin Ren*

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: *allenryb@zjnu.edu.cn

Received: Jan. 21st, 2020; accepted: Feb. 6th, 2020; published: Feb. 13th, 2020

Abstract

In this paper, we study gradient estimate for harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds. As an application, we obtain Liouville type theorem of harmonic maps from a weak Landsberg manifold to a Cartan-Hadamard manifold. Moreover, we generalize the Liouville type theorem to a regular ball of Riemannian manifold.

Keywords

Gradient Estimate, Harmonic Map, Liouville Theorem, Landsberg Manifold

从Finsler流形到Riemann流形的调和映射梯度估计

范振海，任益斌*

浙江师范大学，数学与计算机科学学院，浙江 金华
Email: *allenryb@zjnu.edu.cn

收稿日期：2020年1月21日；录用日期：2020年2月6日；发布日期：2020年2月13日

摘 要

本文主要研究了从**Finsler**流形到**Riemann**流形的调和映射的梯度估计，并由此得到从弱**Landsberg**流形到**Cartan-Hadamard**流形的调和映射**Liouville**型定理。此外，我们还将这一定理推广至目标流形为正则球的情形。

*通讯作者。

文章引用: 范振海, 任益斌. 从 Finsler 流形到 Riemann 流形的调和映射梯度估计[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 80-90.
DOI: 10.12677/pm.2020.102013

关键词

梯度估计，调和映射，Liouville型定理，Landsberg流形

1. 引言

1975 年，丘成桐[1]建立了非负 Ricci 曲率完备 Riemann 流形上正调和函数的梯度估计，并给出了相应的 Liouville 型定理。之后，郑绍远[2]和 H.I.Choi [3]分别推导了从 Ricci 曲率有下界的完备 Riemann 流形到 Cartan-Hadamard 流形和正则球的调和映射的梯度估计，同时得到了相应的 Liouville 型定理。他们主要运用了 Bochner 技巧和最大值原理。

夏超[4]将 Cheng-Yau [6]在 Riemann 流形上调和函数的梯度估计推广到了 Finsler 流形。Ohata-Sturm [5]研究了 Finsler 流形上的热方程全局解的梯度估计。莫小欢[7]定义了从 Finsler 流形到 Riemann 流形的调和映射并研究了它的第一变分公式。之后，Shen-Zhang [8]计算了这类映射的能量泛函的第二变分公式。一个自然的问题是研究 Finsler 流形上这类调和映射的梯度估计和 Liouville 型定理。设 M 是 Finsler 流形，SM 是其上的射影球丛，N 是 Riemann 流形，光滑映射 $\varphi: M \to N$ 的能量为

$$E(\varphi)=\frac{1}{c}\int_{SM}\frac{1}{2}|d\varphi|^2\,\Pi,$$

我们称映射 φ 是调和映射，如果它是能量泛函 E 的极值点[7]。它的张力场表示为：

$$\tau(\varphi)=trace\nabla d\varphi+\langle d\varphi,J\rangle\in\Gamma\left(\varphi^{*}TN\right),\tag{1}$$

本文将推导 φ 的 Bochner 公式：

$$\frac{1}{2}\Delta^{H}|d\varphi|^2=\left|\nabla^{H}d\varphi\right|^2+\left\langle\nabla^{H}\tau(\varphi),d\varphi\right\rangle+\left\langle d\varphi\left(\tilde{R}\right),d\varphi\right\rangle$$
$$-\sum_{i,j=1}^{m}\hat{R}\left(d\varphi(e_i),d\varphi(e_j),d\varphi(e_i),d\varphi(e_j)\right)-\langle d\varphi,\nabla J\otimes d\varphi\rangle.$$

其中 $\tilde{R}$ 是 M 上 Riemann 曲率张量 R 的对称化(具体见(6)式)，Δ^{H} 是水平 Laplacian。由于水平 Laplacian 具有极大值原理，因此我们可以将调和映射的梯度估计推广到 Finsler 流形上来。具体结果如下：

定理 1 设 (M,F) 是非紧的弱 Landsberg 流形满足

$$\tilde{R}\geq -k_1,$$

其中 $k_1\geq 0$，设 (N,h) 是 Cartan-Hadamard 流形。如果 M 上存在一个满足比较定理性质的正函数 $r\in C^2(SM)$ (具体见定义 1)，那么任意限制在 $\Omega_{2R}=\{x\in M\mid r(x)<2R\}$ 上的调和映射 $\varphi: M\to N$ 有如下梯度估计

$$\max_{x\in\Omega_R}|d\varphi|^2\leq\left(\frac{C_1}{R}+k_1\right)b_R^2.\tag{2}$$

其中 $b_R=2\sup\{\rho\circ\varphi(x)\mid x\in\Omega_{2R}\}$，$\rho$ 是定义在 $y_0\in N$ 的距离函数，且 C_1 由 r 决定。

我们称调和函数 φ 满足次线性增长条件，如果

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{1}{\sqrt{R}}\sup\left\{\rho\circ\varphi(x)\mid x\in\Omega_{2R}\right\}=0,$$

由定理 1，我们可直接得到如下的 Liouville 型定理：

定理 2 设 (M,F) 是非紧的弱 Landsberg 流形满足 $\tilde{R}\geq 0$，设 (N,h) 是 Cartan-Hadamard 流形。如果 M 上存在一个满足比较定理性质的正函数 $r\in C^2(SM)$，那么任意满足次线性增长条件的调和映射 $\varphi:M\to N$ 必定是常值映射。

当目标流形具有正截面曲率时，我们也可以得到类似梯度估计。设 N 是 Riemann 流形且截曲率有上界 k_2，$k_2\geq 0$，若 $B_D(y_0)$ 落在 $y_0\in N$ 的割迹之内且 $D<\frac{\pi}{2\sqrt{k_2}}$，则我们称 $B_D(y_0)$ 是 Rieman 流形 N 的正则球，当 $k_2=0$ 时，我们要求 $D<+\infty$。

定理 3 设 (M,F) 是非紧的弱 Landsberg 流形满足

$$\tilde{R}\geq -k_1,$$

其中 $k_1\geq 0$。设 N 是 Riemann 流形且截曲率有上界 k_2，$k_2\geq 0$，$B_D(y_0)$ 是 N 的正则球。如果 M 上存在一个满足比较定理性质的正函数 $r\in C^2(SM)$，那么任意限制在 $\Omega_{2R}=\{x\in M\mid r(x)<2R\}$ 上的调和映射 $\varphi:M\to B_D(y_0)$ 有

$$\max_{x\in\Omega_R}|d\varphi|^2\leq C_2\left(k_1+\frac{1}{R}\right). \tag{3}$$

其中 C_2 由 r，k_2 和 D 决定。

进而，由定理 3 我们得到相应的 Liouville 型定理：

定理 4 设 (M,F) 是非紧的弱 Landsberg 流形满足 $\tilde{R}\geq 0$。如果 M 上存在一个满足比较定理性质的正函数 $r\in C^2(SM)$，那么从 M 到正则球的调和映射必是常值映射。

2. 预备知识

在这一节，我们介绍 Finsler 几何的一些基础知识和 Finsler 流形到 Riemann 流形的调和映射。另外，我们还将推导最大值原理和 Bochner 公式。

设 M 是 m 维光滑流形，(x^i,y^i) 是切丛 TM 上的局部坐标，若函数 $F:TM\to[0,+\infty)$ 满足：

i) 正齐性：$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y),\forall\lambda>0$；

ii) 光滑性：$F|_{TM\setminus\{0\}}$ 是 C^∞ 的；

iii) 正定性：对于任意向量 $y\in TM\setminus\{0\}$，

$$g_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2}{\partial y^i\partial y^j}(x,y)=\frac{1}{2}\left(F^2\right)_{y^iy^j}.$$

是正定矩阵，则称 F 为流形 M 上的 Finsler 度量。具备 Finsler 度量的光滑流形 M 称为 Finsler 流形，记为 (M,F)。记 M 的射影球丛为 SM，切丛 TM 的自然投影确定了射影球丛 SM 上的一个投影 $\pi:SM\to M$。我们仍用 (x^i,y^i) 表示球丛上的局部坐标，其中 (y^i) 是齐次坐标。记 π^*TM 是切丛 TM 的拉回，其局部自然标架为 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$。我们用 $\{dx^i\}$ 表示自然标架 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 的对偶。基本张量 g 定义为

DOI: 10.12677/pm.2020.102013

$$g=\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j,$$

其中 $g_{ij}=\left[\frac{1}{2}F^2\right]_{y^iy^j}$。如果 $g_{ij}(x,y)$ 不依赖于向量 y 的选取，那么 F 是 Riemann 度量。令

$$\omega=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial y^i}dx^i\in\Gamma\left(\pi^*T^*M\right),$$

称为 Hilbert 形式。其对偶向量场记为

$$l=\sum_{i=1}^{m}\frac{y^i}{F}\frac{\partial}{\partial x^i}\in\Gamma\left(\pi^*TM\right).$$

Cartan 张量 C 是定义在 π^*TM 上的三阶对称张量：

$$C=\sum_{i,j,k=1}^{m} C_{ijk}(x,y)dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k,$$

其中 $C_{ijk}=\frac{1}{4}\left[F^2\right]_{y^iy^jy^k}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$。它的平均值 η 称为 Cartan 形式：

$$\eta=\sum_{i,j,k=1}^{m} C_{ijk}g^{jk}dx^i,$$

其中 $g^{jk}=\left(g_{jk}\right)^{-1}$。Deicke 定理[9]表明，正定的 Finsler 度量是 Riemann 度量的充要条件为 Cartan 形式消失。

设 (M,F) 是 m 维 Finsler 流形，由于 l 是单位长的向量场，因此总存在 π^*TM 上的局部正交标架场 $\{e_i\}$ 使得 $e_n=l$，它的对偶标架场记为 $\{\omega^i\}$ 且 $\omega^n=\omega$。在此标架下陈联络 ∇ 的结构方程可表为：

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{m}\omega^j\wedge\omega_j^i,\ \ \omega_j^i+\omega_i^j=-2\sum_{\lambda=1}^{m-1}H_{ij\lambda}\omega_n^\lambda \tag{4}$$

其中 ω_i^j’s 是陈联络 1 形式，H_{ijk}’s 是 Cartan 张量在 $\{e_i\}$ 下的分量。曲率形式 Ω_j^i 可表示为：

$$\Omega_j^i=\sum_{k,s=1}^{m}\frac{1}{2}R_{jks}^i\omega^k\wedge\omega^s+\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{m-1}P_{jk\lambda}^i\omega^k\wedge\omega_n^\lambda.$$

其中 R_{jks}^i 和 $P_{jk\lambda}^i$ 分别称为 Finsler 流形 M 的 Riemann 曲率和 Minkowski 曲率。记 Riemann 曲率张量

$$R=R_{jks}^i\omega^j\otimes\omega^k\otimes\omega^s\otimes e_i, \tag{5}$$

由于 $tr\langle R(X,\cdot)\cdot,Y\rangle$ 一般不具有对称性[9]，因此我们定义对称张量 $\tilde{R}$ 如下：

$$\tilde{R}(X,Y)=\frac{1}{2}tr\left[\langle R(X,\cdot)\cdot,Y\rangle+\langle R(Y,\cdot)\cdot,X\rangle\right]. \tag{6}$$

Landsberg 曲率 L 和平均 Landsberg 曲率 J 分别定义为：

$$L=-\nabla_l C,\ \ J=-\nabla_l\eta.$$

若(平均)Landsberg 曲率恒为零，则称 Finsler 流形 (M,F) 是(弱) Landsberg 流形。众所周知，$\{\omega^i,\omega_n^\lambda\}$ 是 T^*SM 上的局部标架场[7]，它的对偶标架场记为 $\{\varepsilon_i,\eta_\lambda\}$。球丛 SM 上的 Sasaki 型 Riemann 度量定义为：

$$G=\sum_{i=1}^{m}\omega^{i}\otimes\omega^{i}+\sum_{\alpha=1}^{m-1}\omega_{n}^{\alpha}\otimes\omega_{n}^{\alpha}.$$

它与局部坐标系的选取无关。为简便起见，我们规定指标$1\le i,j,k,\cdots\le m$，$1\le\alpha,\beta,\lambda,\cdots\le m-1$遵循Einstein 求和约定。记垂直子丛$VSM=Ker(d\pi)$，其中$d\pi:TSM\to TM$是自然投影$\pi$的切映射。在Sasaki型Riemann度量$G$之下，切丛$TSM$可以分解为

$$TSM=HSM\oplus VSM,$$

其中HSM称为水平子丛。局部上，$\{\eta_\lambda\}$是垂直子丛VSM的一组基，$\{\varepsilon_i\}$是水平子丛HSM的一组基。

设(N,h)是Riemann流形，$\{\theta^a\}$是T^*N上的局部正交标架场，它的对偶向量场记为$\{v_a\}$。Levi-Civita联络的结构方程可表示为：

$$d\theta^{a}=\theta^{b}\wedge\theta_{b}^{a},\ \theta_{b}^{a}+\theta_{a}^{b}=0,\ d\theta_{b}^{a}=\theta_{b}^{c}\wedge\theta_{c}^{a}+\frac{1}{2}\hat{R}_{bcd}^{a}\theta^{c}\wedge\theta^{d}\tag{7}$$

其中$\hat{R}_{bcd}^{a}$是Riemann流形N的Riemann曲率张量。

设$\varphi:M\to N$是光滑映射。它在SM上的提升仍然记为φ，能量定义为：

$$E(\varphi)=\frac{1}{c}\int_{SM}\frac{1}{2}|d\varphi|^{2}\Pi,$$

这里c是$(m-1)$维标准球面的体积，Π是G下的标准体积形式。值得注意的是，φ是水平的，*i.e.* $d\varphi(V)=0$对任意$V\in\Gamma(VSM)$都成立。由引言可知能量泛函的极值点是调和映射，它具有如下重要性质：

定理 5 [7] 设φ是从Finsler流形M到Riemann流形N的光滑映射。则φ是调和映射当且仅当φ具有消失的张力场。

设$f:SM\to R$是光滑函数。水平Laplace算子定义为

$$\Delta^{H}f=div_{G}\left(d^{H}f\right)=g^{ij}\left(\frac{\delta^{2}f}{\delta x^{i}\delta x^{j}}-\frac{\delta f}{\delta x^{k}}\Gamma_{ij}^{k}+\frac{\delta f}{\delta x^{k}}L_{ij}^{k}\right).\tag{8}$$

其中

$$\frac{\delta}{\delta x^{i}}=\frac{\partial}{\partial x^{i}}-N_{i}^{j}\frac{\partial}{\partial y^{j}},\ N_{i}^{k}=\gamma_{ij}^{k}y^{j}-C_{ij}^{k}\gamma_{rs}^{j}y^{r}y^{s},\ \gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}}\right).$$

这里$\left\{\frac{\delta}{\delta x^{i}}\right\}$是$HSM$的局部标架场。若$f$是流形$M$上的函数的提升[10] [11]，则$\Delta^{H}f=\tau(f)$。水平Laplace算子同样满足最大值原理。

引理 1 设$A_{n\times n}$是半正定矩阵，$B_{n\times n}$是半负定矩阵，那么$tr(AB)\le 0$。

证明 因为A是一个半正定矩阵，所以存在一个$n\times n$矩阵C使得$A=CC^{\mathrm{T}}$，又因为B是一个半负定矩阵，我们有，

$$tr(AB)=tr\left(CC^{\mathrm{T}}B\right)=tr\left(C^{\mathrm{T}}BC\right)\le 0.$$

引理 2 (最大值原理)设$f:SM\to R$是光滑函数。若$x_0\in M$是函数f的最大值点，则$\Delta^{H}f\le 0$。

证明 在最大值点x_0处，$\frac{\partial f}{\partial x^{i}}$和$\frac{\partial f}{\partial y^{i}}$恒为零。因此，利用(8)，我们有在$x_0$处

$$\Delta^{H}f=g^{ij}\frac{\delta^{2}f}{\delta x^{i}\delta x^{j}}=g^{ij}\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{i}\partial x^{j}}-g^{kj}N_{k}^{i}\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{j}\partial y^{i}}-g^{ik}N_{k}^{j}\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{i}\partial y^{j}}+N_{k}^{i}g^{kl}N_{l}^{j}\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{i}\partial x^{j}}$$

它的系数矩阵：

$$\begin{pmatrix} A & -AN^{\mathrm{T}} \\ -NA & NAN^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

是半正定的，这里 $A=\left(g^{ij}\right),N=\left(N_k^i\right)$。根据引理 1，得证。

现在，我们将推导 Bochner 公式。光滑映射的提升 $\varphi:SM\to N$ 的协变导数可表示为：

$$d\varphi=\varphi_i^a\omega^i\otimes v_a \tag{9}$$

$$\nabla d\varphi=\varphi_{i|j}^a\omega^i\otimes\omega^j\otimes v_a+\varphi_{i;\lambda}^a\omega^i\otimes\omega_n^\lambda\otimes v_a \tag{10}$$

$$\nabla^2 d\varphi=\varphi_{i|j|k}^a\omega^i\otimes\omega^j\otimes\omega^k\otimes v_a+\varphi_{i|j;\lambda}^a\omega^i\otimes\omega^j\otimes\omega_n^\lambda\otimes v_a. \tag{11}$$

引理 3 设 $\varphi:M\to N$ 是光滑映射，我们有如下交换关系：

$$\varphi_{i|j}^a=\varphi_{j|i}^a,\ \varphi_{i;\lambda}^a=0, \tag{12}$$

$$\varphi_{i|j|k}^a=\varphi_{i|k|j}^a+\varphi_s^aR_{ijk}^s-\varphi_i^b\varphi_j^c\varphi_k^d\hat{R}_{bcd}^a, \tag{13}$$

$$\varphi_{j|k;\lambda}^a=\varphi_i^aP_{jk\lambda}^i. \tag{14}$$

证明 利用(9)，可得

$$\varphi^*\theta^a=\varphi_i^a\omega^i. \tag{15}$$

对(15)两边外微分得到，

$$\left(d\varphi_i^a-\varphi_j^a\omega_i^j+\varphi_i^b\varphi^*\theta_b^a\right)\wedge\omega^i=0,$$

因为

$$d\varphi_i^a-\varphi_j^a\omega_i^j+\varphi_i^b\varphi^*\theta_b^a=\varphi_{i|j}^a\omega^j+\varphi_{i;\lambda}^a\omega_n^\lambda, \tag{16}$$

所以，

$$\varphi_{i|j}^a\omega^j\wedge\omega^i+\varphi_{i;\lambda}^a\omega_n^\lambda\wedge\omega^i=0.$$

于是(12)成立。

再对(16)两边外微分得到，

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\varphi_i^aR_{jks}^i\omega^k\wedge\omega^s-\varphi_i^aP_{jk\lambda}^i\omega^k\wedge\omega_n^\lambda+\frac{1}{2}\varphi_i^b\varphi_j^c\varphi_k^d\hat{R}_{bcd}^a\omega^j\wedge\omega^k\\&=\left(d\varphi_{i|j}^a-\varphi_{i|k}^a\omega_j^k-\varphi_{k|j}^a\omega_i^k+\varphi_{i|j}^b\varphi^*\theta_b^a\right)\wedge\omega^j,\end{aligned} \tag{17}$$

因为

$$d\varphi_{i|j}^a-\varphi_{i|k}^a\omega_j^k-\varphi_{k|j}^a\omega_i^k+\varphi_{i|j}^b\varphi^*\theta_b^a=\varphi_{ij|k}^a\omega^k+\varphi_{ij;\lambda}^a\omega_n^\lambda, \tag{18}$$

所以

$$-\frac{1}{2}\varphi_i^aR_{jks}^i\omega^k\wedge\omega^s+\frac{1}{2}\varphi_i^b\varphi_j^c\varphi_k^d\hat{R}_{bcd}^a\omega^j\wedge\omega^k=\varphi_{ij|k}^a\omega^k\wedge\omega^j,$$

$$\varphi_{j|k;\lambda}^a\omega^k\wedge\omega_n^\lambda=\varphi_i^aP_{jk\lambda}^i\omega^k\wedge\omega_n^\lambda.$$

即(13)和(14)得证。

为了证明 Bochner 公式，我们先介绍如下结论：

引理 4 [7]对 $S = S_i\omega^i \in \Gamma\left(\pi^* T^* M\right)$，我们有

$$divS = \sum_i S_{i|i} + \sum_{\lambda,\mu} S_\mu L_{\lambda\lambda\mu},$$

其中 $divS$ 表示 S 关于度量 G 的散度。

引理 5 设 $\varphi : M \to N$ 是光滑映射，那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta^H |d\varphi|^2 &= \left|\nabla^H d\varphi\right|^2 + \left\langle \nabla^H \tau(\varphi), d\varphi \right\rangle + \left\langle d\varphi\left(\tilde{R}\right), d\varphi \right\rangle \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^m \hat{R}\left(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j), d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\right) - \langle d\varphi, \nabla J \otimes d\varphi \rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

证明根据定义

$$\frac{1}{2}\Delta^H |d\varphi|^2 = \frac{1}{2} div\left(d^H |d\varphi|^2\right),$$

因为

$$d^H |d\varphi|^2 = e_j\left(\left|\varphi_i^a\right|^2\right)\omega^j = 2\varphi_{i|j}^a \varphi_i^a \omega^j,$$

所以，利用引理 3 和引理 4，可得

$$\frac{1}{2}\Delta^H |d\varphi|^2 = \varphi_{i|j}^a \varphi_{i|j}^a + \varphi_i^a \varphi_{j|j|i}^a + \varphi_i^a \varphi_k^a R_{jij}^k - \varphi_i^a \varphi_j^b \varphi_i^c \varphi_j^d \hat{R}_{bcd}^a + L_{\lambda\lambda\mu} \varphi_{i|\mu}^a \varphi_i^a. \tag{20}$$

由于

$$\varphi_i^a \varphi_k^a R_{jij}^k = \frac{1}{2}\left(\varphi_i^a \varphi_k^a R_{jij}^k + \varphi_i^a \varphi_k^a R_{jkj}^i\right) = \frac{1}{2}\varphi_i^a \varphi_k^a \left(R_{jij}^k + R_{jkj}^i\right) = \varphi_i^a \varphi_k^a \tilde{R}_i^k$$

根据(1)，证毕。

引理 6 设 M 是非紧弱 Landsberg 流形满足 $\tilde{R} \ge -k_1$，其中 $k_1 \ge 0$，N 是 Riemann 流形且截曲率有上界 k_2。

若 $\varphi : M \to N$ 是调和映射，则

$$\Delta^H |d\varphi|^2 \ge 2\left|\nabla^H d\varphi\right|^2 - 2k_1 |d\varphi|^2 - 2k_2 |d\varphi|^4. \tag{21}$$

证明 由于 M 是弱 Landsberg 流形，则 $J = 0$。又因为 φ 是调和映射，所以 $\tau(\varphi) = 0$。从而结合引理 5，我们有

$$\frac{1}{2}\Delta^H |d\varphi|^2 = \left|\nabla^H d\varphi\right|^2 + \left\langle d\varphi\left(\tilde{R}\right), d\varphi \right\rangle - \sum_{i,j=1}^m \hat{R}\left(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j), d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\right).$$

再利用 M 与 N 的曲率条件，我们可得

$$\Delta^H |d\varphi|^2 \ge 2\left|\nabla^H d\varphi\right|^2 - 2k_1 |d\varphi|^2 - 2k_2 |d\varphi|^4.$$

在 Riemann 几何中，距离函数对于梯度估计具有重要作用。为了解决 Finsler 流形的梯度估计问题，我们需要一些类似的辅助函数。

定义 1 我们称 C^2 函数 $r : SM \to R_+ \cup \{0\}$ 满足比较定理性质，如果

i) 对于任意 $R \ge 0$，$r^{-1}\left([0, R]\right)$ 都是 SM 上的紧集；

ii) 存在常数 C_3，使得 $\left|d^H r\right| \le C_3$，且 $\Delta^H r \le C_3\left(1 + \frac{1}{r}\right)$。

例 1 设(M,g)是完备非紧 Riemann 流形，γ是定义在$x_0 \in M$处的距离函数。设SM是流形M的射影球丛，自然地，Riemann 度量可以诱导一个 Finsler 度量$F(x,y)$。由于M是一个 Riemann 流形，则陈联络正是 Levi-Civita 联络。故而γ在自然投影$\pi: SM \to M$的提升$\pi^*\gamma$的梯度和 Laplace 算子满足

$$d^H(\gamma\circ\pi)=\pi^* d\gamma,\ \Delta^H(\gamma\circ\pi)=(\Delta\gamma)\circ\pi.$$

其中Δ^H是水平 Laplace 算子。若流形M的 Ricci 曲率有下界，则根据 Laplace 比较定理，有$\Delta^H(\pi^*\gamma)\le C\left(1+\frac{1}{R}\right)$，因此，$\pi^*\gamma$满足比较定理性质。

3. 定理 1 的证明：目标流形是 Cartan-Hadamard 流形

设(M,F)是非紧弱 Landsberg 流形且满足$\tilde{R}\ge -k_1$，其中$k_1\ge 0$，设(N,h)是 Cartan-Hadamard 流形。设函数r满足比较定理性质，$\Omega_{2R}=\{x\in M \mid r(x)<2R\}$，$\rho$是定义在$y_0\in N$的距离函数。根据 Hessian 比较定理，可得

$$\Delta^H(\rho^2\circ\varphi)\ge 2|d\varphi|^2, \tag{22}$$

令ψ是一个光滑函数满足

$$\psi|_{[0,1]}\equiv 1,\ \psi|_{[2,+\infty)}\equiv 0,\ -c|\psi|^{\frac{1}{2}}\le\psi'\le 0,\ |\psi''|<+\infty$$

那么截断函数

$$\chi(x)=\psi\left(\frac{r}{R}\right). \tag{23}$$

满足

$$\frac{|d^H\chi|^2}{\chi}\le\frac{C_4}{R^2},\ \Delta^H\chi\ge-\frac{C_4}{R}. \tag{24}$$

为了估计$|d\varphi|^2$，我们考虑辅助函数

$$F=\frac{|d\varphi|^2}{b_R^2-\rho^2\circ\varphi}. \tag{25}$$

这里$b_R=2\sup\{\rho(\varphi(x)) \mid x\in\Omega_{2R}\}$。设$x_0$是函数$\chi F$在区域$\Omega_{2R}$内的最大值点，则结合引理 2 在$x_0$我们有

$$0=d^H\ln(\chi F)=\frac{d^H\chi}{\chi}+\frac{d^H|d\varphi|^2}{|d\varphi|^2}+\frac{d^H(\rho^2\circ\varphi)}{b_R^2-\rho^2\circ\varphi}. \tag{26}$$

$$0\ge-\frac{|d^H\chi|^2}{\chi^2}+\frac{\Delta^H\chi}{\chi}+\frac{\Delta^H|d\varphi|^2}{|d\varphi|^2}-\frac{\left|d^H|d\varphi|^2\right|^2}{|d\varphi|^4}+\frac{\Delta^H(\rho^2\circ\varphi)}{b_R^2-\rho^2\circ\varphi}+\frac{\left|d^H(\rho^2\circ\varphi)\right|^2}{(b_R^2-\rho^2\circ\varphi)^2}. \tag{27}$$

因为N是 Cartan-Hadamard 流形，并利用引理 6 (此时$k_2=0$)，我们有

$$\frac{\Delta^H|d\varphi|^2}{|d\varphi|^2}\ge\frac{\left|d^H|d\varphi|^2\right|^2}{2|d\varphi|^4}-2k_1, \tag{28}$$

将(28)式代入(27)式，可得

$$0 \geq -\frac{|d^H \chi|^2}{\chi^2} + \frac{\Delta^H \chi}{\chi} - \frac{\left|d^H |d\varphi|^2\right|^2}{2|d\varphi|^4} - 2k_1 + \frac{\Delta^H(\rho^2 \circ \varphi)}{b_R^2 - \rho^2 \circ \varphi} + \frac{\left|d^H(\rho^2 \circ \varphi)\right|^2}{(b_R^2 - \rho^2 \circ \varphi)^2}. \tag{29}$$

利用(26)式和 Cauchy 不等式，我们有在 x_0 处

$$\frac{\left|d^H |d\varphi|^2\right|^2}{|d\varphi|^4} = \left|\frac{d^H \chi}{\chi} + \frac{d^H(\rho^2 \circ \varphi)}{b_R^2 - \rho^2 \circ \varphi}\right|^2 \leq 2\frac{|d^H \chi|^2}{\chi^2} + 2\frac{\left|d^H(\rho^2 \circ \varphi)\right|^2}{(b_R^2 - \rho^2 \circ \varphi)^2}, \tag{30}$$

应用上式和(22)式，(29)式可化为

$$0 \geq \frac{\Delta^H \chi}{\chi} - 2\frac{|d^H \chi|^2}{\chi^2} + \frac{2|d\varphi|^2}{b_R^2 - \rho^2 \circ \varphi} - 2k_1, \tag{31}$$

两边同乘以 $\frac{1}{2}\chi$，并结合 F 的定义，以及 χ 的估计(24)，我们可得在 x_0 处

$$(\chi F)(x_0) \leq \frac{C_1}{R} + k_1. \tag{32}$$

C_1 依赖于 r。于是

$$\max_{x \in \Omega_R} F(x) \leq \chi F(x_0) \leq \frac{C_1}{R} + k_1, \tag{33}$$

证毕。

4. 定理 3 的证明：目标流形是正则球

设 (M, F) 是非紧弱 Landsberg 流形满足 $\tilde{R} \geq -k_1$，其中 $k_1 \geq 0$，设 $B_D(y_0)$ 是 Riemann 流形 N 的正则球且截曲率有上界 k_2，其中 $k_2 \geq 0$。设函数 r 满足比较定理性质，$\Omega_{2R} = \{x \in M \mid r(x) < 2R\}$，$\rho$ 是定义在 $y_0 \in N$ 的距离函数。令

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(\sqrt{k_2}\rho)}{k_2} & k_2 > 0 \\ \dfrac{\rho^2}{2} & k_2 = 0 \end{cases}$$

根据 Hessian 比较定理，在 $B_D(y_0)$ 上，可得

$$Hess(\sigma) \geq \left(\cos\sqrt{k_2}\rho\right)h, \tag{34}$$

调和映射 $\varphi: M \to N$ 满足 $\varphi(M) \subset B_D(y_0)$，由复合映射求导法则易知，

$$\Delta^H(\sigma \circ \varphi) \geq \left(\cos\sqrt{k_2}\rho\right)|d\varphi|^2. \tag{35}$$

因为 $D < \frac{\pi}{2\sqrt{k_2}}$，所以存在依赖于 D 和 k_2 的常数 b 和 C_5 使得

$$\frac{2\cos\sqrt{k_2}\rho}{b - \sigma \circ \varphi} - 2k_2 \geq C_5, \tag{36}$$

考虑辅助函数

$$F=\frac{|d\varphi|^2}{(b-\sigma\circ\varphi)^2},$$

令 χ 是由(23)式定义的截断函数。设 x_0 是函数 χF 在 Ω_{2R} 内的最大值点，则结合引理 2，在最大值点 x_0 我们有

$$0=d^H\ln(\chi F)=\frac{d^H\chi}{\chi}+\frac{d^H|d\varphi|^2}{|d\varphi|^2}+\frac{2d^H(\sigma\circ\varphi)}{b-\sigma\circ\varphi}. \tag{37}$$

$$0\ge-\frac{|d^H\chi|^2}{\chi^2}+\frac{\Delta^H\chi}{\chi}+\frac{\Delta^H|d\varphi|^2}{|d\varphi|^2}-\frac{\left|d^H|d\varphi|^2\right|^2}{|d\varphi|^4}+\frac{2\Delta^H(\sigma\circ\varphi)}{b-\sigma\circ\varphi}+\frac{2|d^H(\sigma\circ\varphi)|^2}{(b-\sigma\circ\varphi)^2}. \tag{38}$$

由引理 6 可知

$$\frac{\Delta^H|d\varphi|^2}{|d\varphi|^2}\ge\frac{\left|d^H|d\varphi|^2\right|^2}{2|d\varphi|^4}-2k_1-2k_2|d\varphi|^2, \tag{39}$$

利用上式，(38)式可化为

$$0\ge-\frac{|d^H\chi|^2}{\chi^2}+\frac{\Delta^H\chi}{\chi}-2k_1-2k_2|d\varphi|^2-\frac{\left|d^H|d\varphi|^2\right|^2}{2|d\varphi|^4}+\frac{2\Delta^H(\sigma\circ\varphi)}{b-\sigma\circ\varphi}+\frac{2|d^H(\sigma\circ\varphi)|^2}{(b-\sigma\circ\varphi)^2}. \tag{40}$$

从(37)式可知

$$\frac{\left|d^H|d\varphi|^2\right|^2}{|d\varphi|^4}\le\frac{|d^H\chi|^2}{\chi^2}+\frac{4|d^H\chi||d^H(\sigma\circ\varphi)|}{\chi(b-\sigma\circ\varphi)}+\frac{4|d^H(\sigma\circ\varphi)|^2}{(b-\sigma\circ\varphi)^2}, \tag{41}$$

将(35)，(41)式代入(40)式，可得

$$0\ge-\frac{3|d^H\chi|^2}{2\chi}+\Delta^H\chi-2\chi k_1-2\chi k_2|d\varphi|^2+\frac{2\chi\left(\cos\sqrt{k_2}\rho\right)|d\varphi|^2}{b-\sigma\circ\varphi}-\frac{2|d^H\chi||d^H(\sigma\circ\varphi)|}{b-\sigma\circ\varphi}, \tag{42}$$

利用(24)式和 $|d^H(\sigma\circ\varphi)|\le\frac{|d\varphi|}{\sqrt{k_2}}$，(42)式可化为

$$0\ge\frac{-3C_4}{2R^2}-\frac{C_4}{R}-2k_1-\frac{2\sqrt{C_4}}{R\sqrt{k_2}}\frac{1}{b-\sigma\circ\varphi}\chi^{\frac12}|d\varphi|+C_5\left(\chi^{\frac12}|d\varphi|\right)^2. \tag{43}$$

利用一元二次方程解的估计[3]，在 x_0 处我们有，

$$\chi|d\varphi|^2\le C_6\left(k_1+\frac1R\right),$$

于是

$$\max_{x\in\Omega_R}F(x)\le\frac{\chi(x_0)|d\varphi|^2(x_0)}{(b-\sigma\circ\varphi(x_0))^2}\le C_7\left(k_1+\frac1R\right). \tag{44}$$

其中 C_7 依赖于 r,k_2,D。由上式可立即推出(3)。

参考文献

[1] Yau, S. (1975) Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 201-228. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280203

[2] Cheng, S. (1980) Liouville Theorem for Harmonic Maps. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **36**, 147-151. https://doi.org/10.1090/pspum/036/573431

[3] Choi, H. (1982) On the Liouville Theorem for Harmonic Maps. *Proceeding of the American Mathematical Society*, **85**, 91-94. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0647905-3

[4] Xia, C. (2014) Local Gradient Estimate for Harmonic Functions on Finsler Manifolds. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **51**, 849-865. https://doi.org/10.1007/s00526-013-0697-2

[5] Ohta, S. and Sturm, K. (2014) Bochner-Weitzenböck Formula and Li-Yau Estimates on Finsler Manifolds. *Advances in Mathematics*, **252**, 429-448. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.10.018

[6] Cheng, S. and Yau, S. (1975) Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 333-354. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280303

[7] 莫小欢. 黎曼-芬斯勒几何基础[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007: 35-120.

[8] Shen, Y.B. and Zhang, Y. (2004) Second Variation of Harmonic Maps between Finsler Manifolds. *Science China-mathematics*, **4**, 39-51. https://doi.org/10.1360/03ys0040

[9] 沈一兵, 沈忠民. 现代芬斯勒几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 21-25.

[10] 贺群, 尹松庭, 赵玮. Finsler 调和映射与 Laplace 算子[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 24-26.

[11] Mo, X.H. (2001) Harmonic Maps from Finsler Manifolds. *Illinois Journal of Mathematics*, **45**, 1331-1345. https://doi.org/10.1215/ijm/1258138069