Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 100-105
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102016

Hans 汉斯

Triangular Schur Complement of Generalized Strictly Doubly Diagonally Dominant Matrices

Jing Ma

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi
Email: 1832725390@qq.com

Received: Jan. 24th, 2020; accepted: Feb. 12th, 2020; published: Feb. 19th, 2020

Abstract

When we study a particular matrix, we usually pay attention to whether its submatrix or related matrices have similar properties. When matrix A is a generalized strictly doubly diagonally dominant matrices, the triangular Schur complement of the generalized strictly doubly diagonally dominant matrix is analyzed. By using the properties of strictly dominant matrices, the relation between the infinite norm of matrices and the spectral radius of matrices, the conclusion that the trigonometric Schur complement of generalized strictly doubly diagonally dominant matrices is strictly diagonally dominant matrices is obtained through the expansion and contraction of inequalities.

Keywords

Generalized Strictly Doubly Diagonally Dominant Matrices, Triangle Schur Complement, Strictly Diagonally Dominant Matrices

广义严格双对角占优矩阵的三角-Schur补

马 静

陕西师范大学，数学与信息科学学院，陕西 西安
Email: 1832725390@qq.com

收稿日期：2020年1月24日；录用日期：2020年2月12日；发布日期：2020年2月19日

摘 要

在研究一类特殊的矩阵时，通常会关注其子矩阵或者其相关矩阵是否具有类似性质。当矩阵A是广义严

文章引用: 马静. 广义严格双对角占优矩阵的三角-Schur 补[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 100-105.
DOI: 10.12677/pm.2020.102016

格双对角占优矩阵时，对广义严格双对角占优矩阵的三角Schur补进行分析。利用严格对角占优矩阵的性质、矩阵无穷范数与谱半径之间的关系，通过不等式的放缩技巧，得到广义养个双对角占优矩阵的三角Schur补是严格对角占优矩阵的结论。

关键词

广义严格双对角占优矩阵，三角Schur补，严格对角占优矩阵

1. 引言

对于某一类特殊的矩阵，很多学者和专家都会关注其子矩阵或者其他相关矩阵是否具有类似的性质或者其他特殊的性质。自 Schur 补的概念提出之后，对于一些特殊矩阵的 Schur 补的研究与分析从未间断过。文献[1]-[6]中证明了 M-矩阵、H-矩阵、严格对角占优矩阵、严格双对角占优矩阵、块对角占优矩阵、严格 γ 对角占优矩阵的 Schur 补以及 diagonal-Schur 补都有与原矩阵类似的性质。文献[7] [8]给出了矩阵的三角 Schur 的定义，并证明了严格对角占优矩阵和严格双对角占优矩阵的三角 Schur 补依然能够保持原局长的特殊性质。本文将参考以上文献的思路以及方法，对广义严格双对角占优矩阵的三角 Schur 补的一些特殊性质进行分析与讨论，并得到广义严格双对角占优矩阵的三角 Schur 补是严格对角占优矩阵的结论。

2. 预备知识

为方便描述与讨论，用 n 表示大于 1 的整数，N 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$， $R^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶实矩阵。

设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为 n 阶复方阵， $n\geq 2$。记 $|A|=(|a_{ij}|)$， $\mu(A)=(\alpha_{ij})$，其中

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}|a_{ij}|,i=j\\-|a_{ij}|,i\neq j\end{cases}$$

记 $R_i(A)=\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|$， $g=\{i\,|\,|a_{ii}|>R_i(A)\}$。

定义 1 [9] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果对所有 $i\in N$，有 $|a_{ii}|>R_i(A)$。则称 A 是一个严格对角占优矩阵。记作 D_n。

定义 2 [4] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果对所有的 $i,j\in N$，有 $|a_{ii}||a_{jj}|>R_i(A)R_j(A)$，则称 A 是一个严格双对角占优矩阵。记作 DD_n。

定义 3 [10] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果存在 $n_1,n_2\in N$，使得 $n_1\cap n_2=\phi$， $n_1\cup n_2=N$，且

$$(|a_{ii}|-\alpha_i)(|a_{jj}|-\beta_j)>\beta_i\alpha_j,i\in n_1,j\in n_2$$

其中 $\alpha_s=\sum_{t\in n_1,t\neq s}|a_{st}|$， $\beta_s=\sum_{t\in n_2,t\neq s}|a_{st}|$， $s=i,j$。

则称 A 是一个广义严格双对角占优矩阵。记作 $SGDD_n$。

定义 4 [11] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$，如果 $A=sI-B$，其中 $s\ge 0,B\ge 0$，且 $s>\rho(B)$，$\rho(B)$ 为矩阵 B 的谱半径，则称 A 为 M 阵。如果 $\mu(A)$ 为 M 阵，则矩阵 A 称为 H 阵。

对于 $\alpha\subseteq N$，α 表示 N 的一个非空子集，α' 表示 α 相对于 N 的补集 $N-\alpha$，$|\alpha|$ 表示 α 的势。对 N 的非空子集 α,β，$A(\alpha,\beta)$ 表示一个以 α 为行指标，以 β 为列指标的子矩阵；$A(\alpha,\alpha)$ 简记为 $A(\alpha)$。

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，$A\circ B=\left(a_{ij}\times b_{ij}\right)_{n\times n}$ 称为 A 和 B 的 Hadmard 积。

定义 5 [4] 设 $A=\left(a_{ij}\right)$，α 是 N 的一个子集且 $A(\alpha)$ 是一个非奇异矩阵，称

$$A(\alpha')-A(\alpha',\alpha)\left[A(\alpha)\right]^{-1}A(\alpha,\alpha')$$

为矩阵 A 对应于 $A(\alpha)$ 的 Schur 补，记为 $A/A(\alpha)$ 或 A/α。

定义 6 [6] 设 $A=\left(a_{ij}\right)$，α 是 N 的一个子集且 $A(\alpha)$ 是一个非奇异矩阵，称

$$A(\alpha')-\left\{A(\alpha',\alpha)\left[A(\alpha)\right]^{-1}A(\alpha,\alpha')\right\}\circ I$$

为矩阵 A 对应于 $A(\alpha)$ 的对角-Schur 补，记为 $A/_{\circ}A(\alpha)$ 或 $A/_{\circ}\alpha$。

定义 7 [12] 设 $A=\left(a_{ij}\right)$，α 是 N 的一个子集且 $A(\alpha)$ 是一个非奇异矩阵，称

$$A(\alpha')-\sin\theta\left\{A(\alpha',\alpha)\left[A(\alpha)\right]^{-1}A(\alpha,\alpha')\right\}\circ I$$

为矩阵 A 对应于 $A(\alpha)$ 的三角-Schur 补，记为 $A/_{\circ}A(\alpha)_{\theta}$ 或 $A/_{\circ}\alpha_{\theta}$。

显然，当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，矩阵 A 对应于 $A(\alpha)$ 的三角-Schur 补即为矩阵 A 对应于 $A(\alpha)$ 的 diagonal-Schur 补；当 $\theta\ne\dfrac{\pi}{2}$ 时，我们给 θ 取其定义域内的一些固定值，就可以得到一些不同的三角-Schur 补。

3. 主要结论

在证明广义严格双对角占优矩阵的三角-Schur 补之前，首先给出一些证明过程中将会运用到的基本引理：

引理 1 [10] 如果 A 是一个广义严格双对角占优矩阵，则 $A(n_1),A(n_2)$ 是严格对角占优矩阵。其中，$A(n_k)(k=1,2)$ 表示位于矩阵 A 中标号 n_k 的诸行与标号 n_k 的诸列的主子阵。

引理 2 [13] 如果 $A\in C^{n\times n}$ 是一个 H-矩阵，那么

$$\left|A^{-1}\right|\le\mu(A)^{-1} \tag{1}$$

引理 3 [9] 如果 A 是一个严格对角占优矩阵，则 A 是一个非奇异 H 阵。

引理 4 [14] 如果 A 是一个广义严格双对角占优矩阵，则有 $n_1\subseteq g$ 或 $n_2\subseteq g$。

定理 1 若 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$ 是广义严格双对角占优矩阵，如果 $n_1=\alpha$ 或 $n_2=\alpha$，那么 A 的三角-Schur 补 $A/_{\circ}A(\alpha)_{\theta}$ 是严格对角占优矩阵。

证明：令 $n_1=\left\{i_1,i_2,\cdots,i_k\right\},n_2=\left\{j_1,j_2,\cdots,j_l\right\},k+l=n$

1) 若 $n_1=\alpha,\alpha'=n_2$，则有

$$A/_\circ \alpha_\theta = A(\alpha') - \sin\theta\left\{A(\alpha',\alpha)\left[A(\alpha)\right]^{-1}A(\alpha,\alpha')\right\}\circ I$$

$$=\begin{pmatrix} a_{j_1j_1} & \cdots & a_{j_1j_l} \\ a_{j_2j_1} & \cdots & a_{j_2j_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_lj_1} & \cdots & a_{j_lj_l}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin\theta\left(a_{j_1i_1},\cdots,a_{j_1i_k}\right)\left[A(\alpha)\right]^{-1}\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} \\ \vdots \\ a_{i_kj_1}\end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin\theta\left(a_{j_li_1},\cdots,a_{j_li_k}\right)\left[A(\alpha)\right]^{-1}\begin{pmatrix} a_{i_1j_l} \\ \vdots \\ a_{i_kj_l}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

因为 A 是广义严格双对角占优矩阵，由引理 1 可知 $A(\alpha)$ 是严格对角占优矩阵，故 $A(\alpha)$ 为 H 阵。对于 $t=1,2,\cdots,l$，由式(1)可得

$$\begin{aligned}
&\left|a_{j_tj_t} - \sin\theta\left(a_{j_ti_1},\cdots,a_{j_ti_k}\right)\left[A(\alpha)\right]^{-1}\begin{pmatrix} a_{i_1j_t} \\ \vdots \\ a_{i_kj_t}\end{pmatrix}\right| - \sum_{u=1,u\neq t}^{l}\left|a_{j_tj_u}\right| \\
&\geq \left|a_{j_tj_t}\right| - \left|\sin\theta\right|\left|\left(a_{j_ti_1},\cdots,a_{j_ti_k}\right)\left[A(\alpha)\right]^{-1}\begin{pmatrix} a_{i_1j_t} \\ \vdots \\ a_{i_kj_t}\end{pmatrix}\right| - \sum_{u=1,u\neq t}^{l}\left|a_{j_tj_u}\right| \\
&\geq \left|a_{j_tj_t}\right| - \sum_{u=1,u\neq t}^{l}\left|a_{j_tj_u}\right| - \left|\sin\theta\right|\left(\left|a_{j_ti_1}\right|,\cdots,\left|a_{j_ti_k}\right|\right)\left|\left[A(\alpha)\right]^{-1}\right|\begin{pmatrix} \left|a_{i_1j_t}\right| \\ \vdots \\ \left|a_{i_kj_t}\right|\end{pmatrix} \\
&\geq \left|a_{j_tj_t}\right| - \sum_{u=1,u\neq t}^{l}\left|a_{j_tj_u}\right| - \left|\sin\theta\right|\left(\left|a_{j_ti_1}\right|,\cdots,\left|a_{j_ti_k}\right|\right)\left|\left\{\mu\left[A(\alpha)\right]\right\}^{-1}\right|\begin{pmatrix} \left|a_{i_1j_t}\right| \\ \vdots \\ \left|a_{i_kj_t}\right|\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det\mu\left[A(\alpha)\right]}\det B_t
\end{aligned} \tag{2}$$

可知

$$B_t = \begin{pmatrix} \left|a_{j_tj_t}\right| - \sum_{u=1,u\neq t}^{l}\left|a_{j_tj_u}\right| & \vdots & -\left|\sin\theta\right|\left|a_{j_ti_1}\right| & \cdots & -\left|\sin\theta\right|\left|a_{j_ti_k}\right| \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\left|a_{i_{1t}j_t}\right| & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & \mu\left[A(\alpha)\right] & \\ -\left|a_{i_kj_t}\right| & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

其中，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\left|\sin\theta\right|\leq 1$，由于 A 是广义严格双对角占优矩阵，由定义有

$$\left(\left|a_{i_vi_v}\right| - \sum_{u=1,u\neq v}^{k}\left|a_{i_vj_u}\right|\right)\left(\left|a_{j_tj_t}\right| - \sum_{u=1,u\neq t}^{l}\left|a_{j_tj_u}\right|\right) \geq \sum_{u=1}^{k}\left|a_{j_tj_u}\right|\sum_{u=1}^{l}\left|a_{i_vj_u}\right|$$

由引理 4 可知，当 $n_1 \subseteq g$ 时，有：

$$\begin{aligned}\left|a_{j_t j_t}\right| &> \sum_{u=1,u\neq v}^{k}\left|a_{i_v j_u}\right| + \sum_{u=1}^{l}\left|a_{i_v j_u}\right| \\ &> \sum_{u=1,u\neq v}^{k}\left|a_{i_v j_u}\right| + \left|a_{i_v j_u}\right| \\ &> \sum_{u=1,u\neq v}^{k}\left|a_{i_v j_u}\right| + \left|\sin\theta\right|\left|a_{i_v j_u}\right|\end{aligned}$$

或当 $n_2 \subseteq g$ 时，有

$$\left|a_{j_t j_t}\right| > \sum_{u=1,u\neq t}^{l}\left|a_{j_t j_u}\right| + \sum_{u=1}^{k}\left|a_{j_t j_u}\right| \tag{4}$$

由式(3)与(4)有：B_t 为 $|\alpha|+1$ 阶严格对角占优矩阵，$\mu\left[A(\alpha)\right]$ 为 $|\alpha|$ 阶严格对角占优矩阵。且

$$\left|a_{j_t j_t}\right| - \sum_{u=1,u\neq t}^{l}\left|a_{j_t j_u}\right| > 0,\ \ \left|a_{i_v i_v}\right| > 0$$

进一步由引理 5 可得：

$$\det B_t > 0,\ \det \mu\left[A(\alpha)\right] > 0 \tag{5}$$

结合式(2)与(5)，对 $t = 1,2,\cdots,l$ ，有

$$\left| a_{j_t j_t} - \sin\theta\left(a_{j_t i_1},\cdots,a_{j_t i_k}\right)\left[A(\alpha)\right]^{-1}\begin{pmatrix} a_{i_1 j_t} \\ \vdots \\ a_{i_k j_t}\end{pmatrix} \right| > 0$$

因此 $A/_{\circ}\,\alpha_\theta$ 是严格对角占优矩阵。

2) 当 $n_2 = g$ 时，可以类似得证。

参考文献

[1] Liu, Z. and Huang, Y.Q. (2004) Some Properties on Schur Complement of H-Matrices and Diagonally Dominant Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **389**, 365-380. https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.04.012

[2] Horm, R.A. and Johnnson, C.R. (1991) Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press, New York, 117-131.

[3] Liu, J.Z., Li, J.C. and Huang, Z.H. (2008) Some Properties of Schur Complements and Diagonal-Schur Complement of Diagonally Dominant Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **428**, 1009-1030. https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.09.008

[4] Liu, J.Z., Zhang, J. and Liu, Y. (2010) The Schur Complement of Strictly Doubly Diagonally Dominant Matrices and its Application. *Linear Algebra and its Applications*, **437**, 163-183.

[5] Bru, R., Corral, C., Gimenez, I. and Mas, J. (2009) Schur Complements of General H-Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **16**, 935-947. https://doi.org/10.1002/nla.668

[6] Liu, J.Z. and Huang, Z.J. (2010) The Schur Complements of γ -Schur Diagonally and Product γ -Schur Diagonally Dominant Matrix and Their Disc Separation. *Linear Algebra and its Applications*, **432**, 1090-1104.

[7] 常萌萌. 三类广义对角占优矩阵逆的数值特征[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2012.

[8] 杜菲. 两类对角占优矩阵的数值特征[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2014.

[9] 胡家赣. 线性方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

[10] Liu, J.Z. (2004) The Schur Complements of Generalized Doubly Diagonally Dominant Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **378**, 231-244. https://doi.org/10.1016/j.laa.2003.09.012

[11] Johnnson, C.R. (1982) Inverse M-Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **47**, 195-216. https://doi.org/10.1016/0024-3795(82)90238-5

[12] 常萌萌, 李华慧. 双严格 γ-对角占优矩阵的三角-schur 补[J]. 河北科技师范学院学报, 2016(3).

[13] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511810817

[14] Liu, J.R., Huang, Y.Q. and Zhang, F.Z. (2004) The Schur Complements of Generalized Doubly Diagonally Dominant Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **378**, 231-244. https://doi.org/10.1016/j.laa.2003.09.012