Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(3), 139-142
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.103020

Hans汉斯

Another Solution Method of Singular Solutions of a Class of Differential Equations

Zhihong Kong

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: kzh196408@126.com

Received: Feb. 1st, 2020; accepted: Feb. 20th, 2020; published: Feb. 27th, 2020

Abstract

By constructing the general solution of differential equations or complementing function value. We obtain the singular solutions of a class of differential equations and correct the errors in solving the singular equations of these differential equations in other books and literatures.

Keywords

Envelope, Singular Solutions, C-Discriminant, C-Discriminant Curve, Constructing the General Solution

一类微分方程奇解的另一种求法

孔志宏

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: kzh196408@126.com

收稿日期：2020年2月1日；录用日期：2020年2月20日；发布日期：2020年2月27日

摘　要

通过构造微分方程通解的方法，求得一类微分方程的奇解，纠正了其它书籍、文献在求这些微分方程奇解过程中的错误([1]除外)。

关键词

包络，奇解，C-判别式，C-判别曲线，构造通解

文章引用: 孔志宏. 一类微分方程奇解的另一种求法[J]. 理论数学, 2020, 10(3): 139-142.
DOI: 10.12677/pm.2020.103020

1. 引言

根据解的存在唯一性定理[2]，如果微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

中右端函数 $f(x,y)$ 在某区域 G 上连续，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 G 上有界或连续，则在 G 内初值问题的解是存在且唯一的，从而在 G 内肯定不存在奇解。如果存在唯一性定理的条件不在整个 $f(x,y)$ 的定义域内成立，则奇解(如果存在的话)只有到那些破坏了存在唯一性定理条件的点集中去找，也就是到使得 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 无界的点集中去找。

对于某些微分方程，如 $y'=\sqrt{1-y^2}$， $y'=y^{\alpha}(0<\alpha<1)$ 等，它们的奇解(包络)是存在的。但是用 c-判别曲线法求通解曲线族的包络时，由于通解是在 y 的取值有一定限制的条件下求得的，所以根据 c-判别式求得的 c-判别曲线与通解是矛盾的，到目前为止，凡是涉及到求诸如 $y'=\sqrt{1-y^2}$， $y'=y^{\alpha}(0<\alpha<1)$ 之类的微分方程的包络(奇解)问题的书籍、文献(如[3]、[4]、[5])等，都是在这样的矛盾情形下，逻辑不自洽地“指导出”微分方程的奇解(包络)。结论是正确的，但求解过程是逻辑矛盾的。

本文通过构造通解法解决了这个矛盾。此前笔者曾通过补充定义法解决了这个矛盾(见[1])。

2. 构造通解法

例 1 判断微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2} \tag{1}$$

是否存在奇解，如果存在就求出来。

解 右端函数 $f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$，它在带形区域：$-\infty<x<+\infty,-1\le y\le 1$ 上定义、连续。

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$$

当 $y=\pm 1$ 时无界，所以方程(1)如果有奇解，只能是 $y=\pm 1$，显然 $y=\pm 1$ 是(1)的两个特解。下面求方程(1)的通解。

当 $y\ne\pm 1$ 时(注意这个限制条件)，(1)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\mathrm{d}x,$$

积分得

$$\arcsin y=x-c,\ x-c\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

于是

$$y=\sin(x-c),\ x-c\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \tag{2}$$

其中 c 为任意常数。由于 $y=\pm 1$ 也是(1)的解，故也可把(1)的通解表示为

$$y=\begin{cases}\sin(x-c), x-c\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \pm 1, x-c=\pm\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

或

$$y=\sin(x-c),\ x-c\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \tag{3}$$

其中 C 为任意常数。

现在求通解曲线族(3)的包络。这里 $\Phi(x,y,c)=\sin(x-c)-y$，$\Phi_c'(x,y,c)=-\cos(x-c)$，c-判别式为

$$\begin{cases}\sin(x-c)-y=0,\\ -\cos(x-c)=0.\end{cases}$$

c-判别曲线为

$$\begin{cases}x=c+\dfrac{\pi}{2}\\ y=1\end{cases}，与\begin{cases}x=c-\dfrac{\pi}{2}\\ y=-1\end{cases}$$

这两条 c-判别曲线均为有 $x_c'=1\neq 0$，$\Phi_c'=-1\neq 0$，满足非蜕化条件，故两条 c-判别曲线 $y=\pm 1$ 都是通解曲线族(3)的包络，从而 $y=\pm 1$ 都是方程(1)的奇解。

例 2 [6]　判断微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^{\alpha}\ (0<\alpha<1) \tag{4}$$

是否存在奇解，如果存在就求出来。

解　右端函数 $f(x,y)=y^{\alpha}$ 在其定义域内是连续的。

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha y^{\alpha-1}$$

当 $y=0$ 时无界，所以方程(4)如果有奇解，只能是 $y=0$，显然 $y=0$ 是(4)的一个特解。下面求(4)的通解。

当 $y\neq 0$ 时(注意这个限制条件)，(4)可改写为

$$y^{-\alpha}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,$$

积分得

$$y^{1-\alpha}=(1-\alpha)(x-c),\ \ x-c>0 \text{ 或 } x-c\neq 0,$$

或

$$y=(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(x-c)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ \ x-c>0 \text{ 或 } x-c\neq 0 \tag{5}$$

其中 c 为任意常数。由于 $y=0$ 也是(4)的解，故也可把(4)的通解表示为

$$y = (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (x-c)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{6}$$

易得 c-判别曲线为

$$\begin{cases} x = c, \\ y = 0. \end{cases}$$

同样易知 $y = 0$ 为通解曲线族(6)的包络，从而 $y = 0$ 是(4)的奇解。

参考文献

[1] 孔志宏. 微分方程中包络的定义及求奇解时必须注意的一个问题[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 274-276.

[2] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 103-104.

[3] 任永泰, 史希福. 常微分方程[M]. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1984: 137-139.

[4] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2005: 101-107.

[5] 周尚仁, 权宏顺. 常微分方程习题集[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980: 87.

[6] 孔志宏. 包络排除方法及奇解排除定理[J]. 高等数学研究, 2003, 16(4): 36-39.