Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(3), 143-149
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.103021

Moment Generating Function and Its Application

Yan Feng, Shan Song, Ziming Zhang, Changqing Xu

School of Mathematics and Science, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu
Email: 1753080215@qq.com, 2837388358@qq.com, 1559328404@qq.com, cqxurichard@usts.edu.cn

Received: Feb. 4th, 2020; accepted: Feb. 21st, 2020; published: Feb. 28th, 2020

Abstract

In this paper we mainly introduce moment generating function, cumulative generating function, high-order tensor moment generating function, and the cumulative tensor. For random matrix sequences of the same size, the properties of the higher-order tensor moments and cumulative tensor corresponding to the random matrix are also investigated.

Keywords

Moment Generating Function, Cumulative Generating Function, Tensor Moment Generating Function, Cumulative Tensor

矩生成函数及其应用

冯　岩，宋　珊，张子明，徐常青

苏州科技大学，数理学院，江苏 苏州
Email: 1753080215@qq.com, 2837388358@qq.com, 1559328404@qq.com, cqxurichard@usts.edu.cn

收稿日期：2020年2月4日；录用日期：2020年2月21日；发布日期：2020年2月28日

摘　要

本文主要介绍矩生成函数和累积生成函数，引入高阶张量矩生成函数和累积张量。对大小一致的随机矩阵序列，考察了随机矩阵 对应的高阶张量矩和累积张量的性质。

关键词

矩生成函数，累积生成函数，张量矩生成函数，累积张量

文章引用: 冯岩, 宋珊, 张子明, 徐常青. 矩生成函数及其应用[J]. 理论数学, 2020, 10(3): 143-149.
DOI: 10.12677/pm.2020.103021

1. 引言

假设X是一个实随机变量，那么它的矩函数就是 $X-\mu$ 的乘方的期望[1] [2]。X的矩函数可表示样本分布的均值、离散程度和斜度等样本统计特性。矩函数在统计中有重要的地位，如利用矩函数可以实现统计模型中的参数估计[3]。

矩生成函数可用于快速求解随机变量的各阶矩。利用矩生成函数，我们还可以研究不同阶矩之间的关系[4] [5]。进一步，矩生成函数与一个变量的分布构成1-1对应关系。因此，我们可以通过矩生成函数来刻画一个随机变量的概率分布特性。另外，矩生成函数和累积生成函数都可以用于估计多元响应降维子空间[6] [7]。而且，多元矩生成函数可以应用于射线照相胶片系统中信号和噪声传播分析[8]。本文主要研究多元随机向量的矩生成函数及其应用。我们还将研究矩生成函数和累积生成函数之间的关系，以及它们在正态分布和γ分布中的应用。

2. 预备知识

定义 2.1 实随机变量 X 的矩生成函数定义为随机变量 e^{tX} 的期望，即 $M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)$，$t$ 为实变量。若 $\mu_k=E\left[X^k\right]$ 为随机变量 X 的 k 阶矩(或记 k-矩)。则矩生成函数满足

$$M_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\frac{t^k}{k!} \tag{2.1}$$

一个随机向量 $X\in R^p$ 的矩生成函数定义为

$$M_X(u)=E\left(e^{u^tX}\right) \tag{2.2}$$

$u\in R^p$ 为实向量。进一步，随机矩阵 $X\in R^{m\times n}$ 的生成函数定义为

$$M_X(U)=E\left[e^{tr(U'X)}\right] \tag{2.3}$$

其中 $U\in R^{m\times n}$ 为实矩阵。$\langle U,X\rangle=tr(U'X)$ 为矩阵 U 和 X 的内积。注意到(2.2)为(2.3)的特殊情形。

定义 2.2 变量(包括向量与矩阵) X 的累积生成函数定义为

$$K_X(t)=\log\left(M_X(t)\right) \tag{2.4}$$

对 K_X 进行幂级数展开：

$$K_X(t)=\sum_{r=1}^{\infty}k_rt^r/r! \tag{2.5}$$

定义 k_r 是 Y 的累积量。

一个随机张量 $A=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)\in R^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_m}$ 为一个多元随机数组，它为随机矩阵的高阶情形，其中 m 称为 A 的阶。我们称 $n_1\times\cdots\times n_m$ 为 A 的大小。当 $n=n_1=\cdots=n_m$ 时，A 称为 m 阶 n 维张量。所有第 m 阶 n 维实张量构成的集合记为 $T_{m,n}$。

设 A,B 为大小相同的两个张量，定义它们的内积为 $\langle A,B\rangle=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m}a_{i_1i_2\cdots i_m}b_{i_1i_2\cdots i_m}$。$A,B$ 的内积也记为 AB。

3. 主要结果

记 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$ 为一个 2 维随机向量，$m_{ij}=E\left[x_1^i x_2^j\right]$。则

$$m_{10}=E[x_1],m_{01}=E[x_2],m_{20}=E\left[x_1^2\right],m_{02}=E\left[x_2^2\right],m_{11}=E[x_1x_2]=E[x_2x_1]$$

若记随机向量 x 的均值向量和协方差矩阵分别为 μ 和 Σ，那么有

定理 3.1 设 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$ 为随机向量。则其矩生成函数 M_x 满足以下条件：

1) $\left.\dfrac{\partial M_x}{\partial t}\right|_{t=0}=\mu=E[x]$；

2) $\left.\dfrac{\partial^2 M_x}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\mu\mu^{\mathrm{T}}+\Sigma$。

一个随机向量 $x\in R^n$ 的 k 阶矩共有 nk 个，它们构成一个 k 阶 n 维张量 $\Sigma^{(k)}=\left(m_{i_1i_2\cdots i_k}\right)$，定义为

$$m_{i_1i_2\cdots i_k}=E\left[x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\right],\ (i_1,i_2,\cdots,i_k)\in S(k;n) \tag{3.1}$$

这里 $S(k;n)\equiv\left\{(i_1,i_2,\cdots,i_k):i_p=1,2,\cdots,n\right\}$。对 $x\in R^n$，记 $x^m=\left(X_{i_1i_2\cdots i_m}\right)$ 为由 $\mathbf{x}$ 生成的秩-1 的 m 阶 n 维张量，其中 $X_{i_1i_2\cdots i_m}=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$。下面的定理为本文主要结论之一：

定理 3.2 设随机变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$。则有

$$M_X(u)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_k=1}^{P}u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_k}\,E\left[X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}\right]\Big/k! \tag{3.2}$$

证明：

$$\begin{aligned}
M_X(u)&=E\left[\mathrm{e}^{u^{\mathrm{T}}X}\right]=E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{P}u_iX_i\right)\right]=E\left[\mathrm{e}^{u_1X_1}\mathrm{e}^{u_2X_2}\cdots\mathrm{e}^{u_PX_P}\right]\\
&=E\Big[\left(1+u_1X_1+(u_1X_1)^2/2!+(u_1X_1)^3/3!+\cdots\right)\times\Big(1+u_2X_2+(u_2X_2)^2/2!\\
&\quad+(u_2X_2)^3/3!+\cdots\Big)\times\cdots\times\left(1+u_PX_P+(u_PX_P)^2/2!+(u_PX_P)^3/3!+\cdots\right)\Big]\\
&=E\left[1+\sum_{i=1}^{P}u_iX_i+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{P}u_iu_jX_iX_j+\frac{1}{3!}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{P}u_{i_1}u_{i_2}u_{i_3}X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}+\cdots\right]\\
&=E\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_k=1}^{P}u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_k}X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}\Big/k!\right]\\
&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_k=1}^{P}u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_k}\,E\left[X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}\right]\Big/k!
\end{aligned}$$

我们由定理 3.2，不难证明定理 3.1。

定理 3.3 设 $X_1,\cdots,X_p$ 为独立随机变量，$Y=\sum X_i$，则 Y 的矩生成函数是 X_i 的矩生成函数之积，即：

$$E\left[\mathrm{e}^{tY}\right]=\prod_i E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right] \tag{3.3}$$

或

$$M_Y=\prod M_{X_i} \tag{3.4}$$

证明：因为 $X_1,\cdots,X_p$ 是独立的且 $Y=\sum X_i$，所以

$$E\left(\mathrm{e}^{tY}\right)=E\left(\mathrm{e}^{t\sum X_i}\right)=E\left[\mathrm{e}^{tX_1+tX_2+tX_3+\cdots}\right]=E\left[\mathrm{e}^{tX_1}\mathrm{e}^{tX_2}\mathrm{e}^{tX_3}\cdots\right]=\prod_i E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right]$$

为了说明 M_Y 幂级数展开，我们先来考察 Y 的 1-3 阶矩。由 X_i 的独立性，有

$$E[Y]=E\left[\sum X_i\right]=\sum E[X_i]，\ Var[Y]=Var\left[\sum X_i\right]=\sum Var[X_i]$$

令 $Z_i=X_i-E[X_i]$，因 $X_1,\cdots,X_p$ 彼此独立，所以

$$E\left[Z_i^3\right]=E\left[X_i-E(X_i)\right]=E[X_i]-E[X_i]=0$$

因此

$$\begin{aligned}E\left[\left(Y-E(Y)\right)^3\right]&=E\left[\left(\sum X_i-\sum E(X_i)\right)^3\right]=E\left[\left(\sum\left(X_i-E(X_i)\right)\right)^3\right]\\&=E\left[\left(\sum Z_i\right)^3\right]=E\left[\sum Z_i^3+3\sum Z_i^2Z_j+\sum Z_iZ_jZ_k\right]\\&=\sum E\left[Z_i^3\right]+3\sum E\left[Z_i^2\right]E[Z_i]+\sum E[Z_i]E\left[Z_j\right]E[Z_k]\\&=\sum E\left[Z_i^3\right]=\sum E\left[\left(X_i-E(X_i)\right)^3\right]\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}E\left[\left(Y-E(Y)\right)^4\right]&=E\left[\left(\sum Z_i\right)^4\right]=E\left[\sum Z_i^4+3\sum_{i\neq j}Z_i^2Z_j^2\right]\\&=\sum E\left[Z_i^4\right]+3\sum_{i\neq j}E\left[Z_i^2\right]E\left[Z_j^2\right]\\&=\sum E\left[Z_i^4\right]+3\left[\left(\sum E\left[Z_i^2\right]\right)^2-\sum\left(E[Z_i]\right)^2\right]\\&=\sum\left\{E\left[\left(X_i-E(X_i)\right)^4\right]-3E^2\left[\left(X_i-E[X_i]\right)^2\right]\right\}\\&\quad+3\left\{\sum E\left[\left(X_i-E[X_i]\right)^2\right]\right\}^2\end{aligned}$$

因此，M_Y 的幂级数展开不等于 M_{X_i} 的幂级数展开之和。

定理 3.4 设 $X_1,\cdots,X_p$ 为独立随机变量，且 $Y=\sum X_i$，则

$$K_Y(t)=\sum K_{X_i}(t) \tag{3.5}$$

证明：(3.5)可由下式证得：

$$K_Y(t)=\log\left(M_Y(t)\right)=\log\left(E\left(\mathrm{e}^{t\sum X_i}\right)\right)=\log\left(\prod E\left(\mathrm{e}^{tX_i}\right)\right)=\sum\log E\left(\mathrm{e}^{tX_i}\right)=\sum K_{X_i}(t)$$

定理 3.5 随机变量 X 的累积量满足以下条件：

$$k_1=\mu \tag{3.6.1}$$

$$k_2=\mu_2'-\mu^2=\sigma^2 \tag{3.6.2}$$

$$k_3=\mu_3'-3\mu\mu_2'+2\mu^3=E\left[\left(X-\mu\right)^3\right] \tag{3.6.3}$$

$$k_4=\mu^4-4\mu_3'\mu-3\left(\mu_2'\right)^2+12\mu_2'\mu^2-6\mu^4=E\left[\left(X-\mu\right)^4\right]-3\sigma^4 \tag{3.6.4}$$

$$\cdots$$

证明：由(3.3)式知

$$k_r(Y)=\sum k_r(X_i) \tag{3.7}$$

由式(2.1)和(2.4)得，X 的累积生成函数可表为

$$K(t)=\log(M(t))=\log\left(1+\left[\mu_1 t+\mu_2' t^2/2+\mu_3' t^3/3!+\cdots\right]\right) \tag{3.8}$$

注意到 $\log(1+x)$ 的幂级数展开

$$\log(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots \tag{3.9}$$

取 $x=\mu t+\mu_2' t^2/2+\mu_3' t^3/3!+\cdots$，则

$$\begin{aligned} x^2 &= \mu^2 t^2+\mu\mu_2' t^3+\left[2\mu_3'\mu/3!+(\mu_2')^2/4\right]t^4+\cdots \\ x^3 &= \mu^3 t^3+3\mu_2'\mu^2 t^4/3+\cdots \\ x^4 &= \mu^4 t^4+\cdots \end{aligned} \tag{3.10}$$

由(3.8~3.10)知

$$\begin{aligned} K(t)=\mu t&+\left[\mu_2'-\mu^2\right]t^2/2!+\left[\mu_3'-3\mu\mu_2'+2\mu^3\right]t^3/3! \\ &+\left[\mu^4-4\mu_3'\mu-3(\mu_2')^2+12\mu_2'\mu^2-6\mu^4\right]t^4/4!+\cdots \end{aligned} \tag{3.11}$$

比较 $t^r/r!$ 的系数，可得(3.6.1~3.6.4)。

例 3.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_p$ 为随机变量且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$。则矩生成函数满足

$$K_{X_i}(t)=\log(M_{X_i}(t))=\frac{1}{2}t^2\sigma_i^2+t\mu_i \tag{3.12}$$

因此有 $k_1=\mu_i,k_2=\sigma_i^2$。若 $X_1,\cdots,X_p$ 是独立随机变量，则 $Y=\sum X_i$ 的累积生成函数为

$$K_Y(t)=\sum\frac{1}{2}t^2\sigma_i^2+t\sum\mu_i \tag{3.13}$$

它对应正态分布 $N\left(\sum\mu_i,\sum\sigma_i^2\right)$。现考虑 γ-分布 $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$，则 $M_X(t)=\beta^\alpha(\beta-t)^{-\alpha}$，故累积生成函数为

$$K_X(t)=\log(M_X(t))=\alpha\log\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right) \tag{3.14}$$

现设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_v$ 独立且服从标准正态分布，那么 $S_v=\sum_1^v Z_i^2$ 服从卡方分布。注意到

$$F(S_1<u)=P_r(Z_1^2<u)=P_r(-\sqrt{u}<Z_1<\sqrt{u})=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{u}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

因此 S_1 (因此每个 S_i)的密度函数为 $f_{S_1}(u)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{u}{2}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)=(u/2)^{-1/2}e^{-u/2}/(2\sqrt{\pi})$，从而

$M_{S_1}(t)=E(e^{tS_1})=(1-2t)^{-1/2}$，故

$$M_{S_v}(t)=(1-2t)^{-v/2} \tag{3.15}$$

(3.15)为 $X\sim\Gamma(v/2,1/2)$ 的矩生成函数。因此 χ_v^2 的密度函数和 $\Gamma(v/2,1/2)$ 密度函数相同：

$$(u/2)^{(v-2)/2}e^{-u/2}/(2\Gamma(v/2))$$

4. 张量矩生成函数和累积张量

随机向量的矩生成函数可以推广至随机张量的矩生成函数的情形：

定义 4.1 一个随机张量 $X \in T_{m,n}$ 的矩生成函数定义为

$$M_X(T) = E\left[\mathrm{e}^{\langle T, X\rangle}\right] \tag{4.1}$$

其中 $T \in T_{m,n}$ 为任意 m 阶 n 维张量。

推论 4.2 设 $X \in T_{m,n}$ 为随机张量。矩生成函数与矩函数之间满足关系：

$$M_X[U] = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m} U_{i_1 i_2 \cdots i_m} M_{i_1 i_2 \cdots i_m} / m! \tag{4.2}$$

其中 $M_{i_1 i_2 \cdots i_m} = E\left(X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_m}\right)$ 为 $X \in T_{m,n}$ 的矩函数。

定理 4.1 设 $X_1,\cdots,X_p \in T_{m,n}$ 为统计独立随机张量，且 $Y = \sum_{i=1}^{p} X_i$，则

$$E\left[\exp\left(\langle U, Y\rangle\right)\right] = \prod_{i=1}^{p} E\left[\exp\left(\langle U, X_i\rangle\right)\right] \tag{4.3}$$

即 Y 的矩生成函数为 X_i 生成函数的积，或

$$M_Y = \prod_{i=1}^{p} M_{X_i} \tag{4.4}$$

证明： 因为 $X_1,\cdots,X_p$ 是线性无关的，且 $Y = \sum_{i=1}^{p} X_i$，所以

$$E\left[\exp\left(\langle U, Y\rangle\right)\right] = E\left[\exp\left(\left\langle U, \sum_{i=1}^{p} X_i\right\rangle\right)\right] = E\left[\prod_{i=1}^{p}\exp\left(\langle U, X_i\rangle\right)\right] = \prod_{i=1}^{p} E\left[\exp\left(\langle U, X_i\rangle\right)\right]$$

定义 4.2 张量 $X \in T_{m,n}$ 的累积张量为

$$K_X(U) = \log\left(M_X(U)\right) \tag{4.5}$$

定理 4.2 Y 的张量矩生成函数的对数是 X_i 的张量矩生成函数的对数的总和。即

$$K_Y(U) = \sum K_{X_i}(U) \tag{4.6}$$

证明：

$$\begin{aligned} K_Y(U) &= \log\left(M_Y(U)\right) = \log\left(E\left[\exp\left(\langle U, Y\rangle\right)\right]\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{p} E\left[\exp\left(\langle U, X_i\rangle\right)\right]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \log\left(E\left[\exp\left(\langle U, X_i\rangle\right)\right]\right) = \sum_{i=1}^{p} \log\left(M_{X_i}(U)\right) = \sum K_{X_i}(U) \end{aligned}$$

同样，定义 k_r 是 Y 的累积量，则 K_Y 具有幂级数展开：

$$K_Y(U) = \sum_{r=1}^{\infty} k_r U^r / r! \tag{4.7}$$

并且

$$k_r(Y) = \sum k_r(X_i) \tag{4.8}$$

由公式(4.2)知，当 $X \in T_{m,n}$ 时，它的累积张量可以写为

$$K(U) = \log\left(M(U)\right) = \log\left(1 + \left[M_1 U + M_2 U^2/2 + M_3 U^3/3! + \cdots\right]\right) \tag{4.9}$$

取 $x = M_1U + M_2U^2/2 + M_3U^3/3! + \cdots$，则

$$\begin{aligned} x^2 &= M^2U^2 + MM_2U^3 + \left[2M_3M/3! + (M_2)^2/4\right]U^4 + \cdots \\ x^3 &= M^3U^3 + 3M_2M^2U^4/2 + \cdots \\ x^4 &= M^4U^4 + \cdots \end{aligned} \tag{4.10}$$

由公式(4.10)知，U^1 仅在 x 中出现，U^2 只出现在 x 和 x^2 中，依此类推，我们可以得到

$$\begin{aligned} K(U) = MU &+ \left[M_2 - M^2\right]U^2/2! + \left[M_3 - 3MM_2 + 2M^3\right]U^3/3! \\ &+ \left[M^4 - 4M_3M - 3(M_2)^2 + 12M_2M^2 - 6M^4\right]U^4/4! + \cdots \end{aligned} \tag{4.11}$$

将累积量与 $U^r/r!$ 的系数进行比较，我们可以得到

$$\begin{aligned} k_1 &= M \\ k_2 &= M_2 - M^2 \\ k_3 &= M_3 - 3MM_2 + 2M^3 = E\left[(X-M)^3\right] \\ k_4 &= M^4 - 4M_3M - 3(M_2)^2 + 12M_2M^2 - 6M^4 \\ &= E\left[(X-M)^4\right] - 3\left(E^4(X) - 2E\left(X^2\right)E^2(X) + E^2\left(X^2\right)\right) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.12}$$

参考文献

[1] Kollo, T., Von Rosen, D. and Hazewinkel, M. (2005) Advanced Multivariate Statistics with Matrices. Springer Netherlands, 171-219. https://doi.org/10.1007/1-4020-3419-9

[2] Bilodeau, M. (1999) Theory of Multivariate Statistics. Springer, New York, 36-38.

[3] 邓冬虎, 张群, 罗迎, 等. 基于高阶矩函数的雷达目标微动参数估计方法[J]. 电子学报, 2013, 41(12): 2339-2345.

[4] 吴朝霞, 文平. 矩生成函数及其应用[J]. 昌吉学院学报, 2003(2): 112-113.

[5] Beran, J. and Ghosh, S. (2011) Moment Generating Function. Springer, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-04898-2_375

[6] 甘胜进, 游文杰. 基于矩生成函数的多元响应降维子空间估计[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2017, 49(1): 43-47.

[7] 吴蕾, 甘胜进. 基于累积矩生成函数多元响应降维子空间估计[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2018, 39(2): 22-25.

[8] Van, M.R. and Rabbani, M.J. (1990) An Application of Multivariate Moment-Generating Functions to the Analysis of Signal and Noise Propagation in Radiographic Screen-Film Systems. *Medical Physics*, **17**, 65-71. https://doi.org/10.1118/1.596529