Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 307-317
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104039

Hans汉斯

The Generalized Tracial Rank of C^*-Algebra

Chenchen Liu

School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
Email: 2622702026@qq.com

Received: Mar. 21st, 2020; accepted: Apr. 9th, 2020; published: Apr. 16th, 2020

Abstract

In this paper, the properties of generalized tracial rank are studied. We prove equivalence of generalized tracial rank and weak generalized tracial rank, and also prove that generalized tracial rank is closed with respect to direct sum, and unital subalgebra. Finally, the generalized tracial rank of the ideal of compact operators on a Hilbert module is given.

Keywords

Tracial Rank, Generalized Tracial Rank, Weak Generalized Tracial Rank

C^*-代数的广义迹秩

刘晨晨

中国海洋大学数学科学学院，山东 青岛
Email: 2622702026@qq.com

收稿日期：2020年3月21日；录用日期：2020年4月9日；发布日期：2020年4月16日

摘 要

本文研究广义迹秩的性质，证明了广义迹秩与弱广义迹秩的等价性，给出了广义迹秩对直和、有单位元子代数的封闭性等性质，并研究了Hilbert模上紧算子理想的广义迹秩。

关键词

迹秩，广义迹秩，弱广义迹秩

文章引用: 刘晨晨. C^*-代数的广义迹秩[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 307-317.
DOI: 10.12677/pm.2020.104039

1. 引言

2001 年林华新教授因核 C^*-代数分类的需要[1]首次提出迹秩的概念。迹秩类似于拓扑空间的维数，是非交换代数的一种拓扑秩。它是 C^*-代数同构的不变量，在 C^*-代数分类研究中起着重要的作用。

广义迹秩是起源于 S. Eilers，T. A. Loring 和 G. K. Pedersen 定义一维非交换 CW 复形，林华新等人在此基础上定义了广义迹秩[2]，它是迹秩概念的推广，是 C^*-代数分类的又一重要不变量。本文研究了广义迹秩关于直和、商、遗传子代数以及归纳极限等的性质，并证明了 $GTR(K(E))\le 1$。

2. 预备知识

在此先列出本文用到的记号与定义。

设 A 是 C^*-代数。

(1) 记 $\mathcal{P}(A)$ 是 A 中的正元集和投射集。

(2) 记 $\tilde{A}$ 是 A 的单位化。

(3) 若存在一列投射 $\{p_n\}$ 是 A 的近似单位，则称 A 是 σ_p-unital 的。

(4) 设 $0<\sigma_2<\sigma_1<1$，定义函数 $f_{\sigma_2}^{\sigma_1}$ 为

$$f_{\sigma_2}^{\sigma_1}(t)=\begin{cases}1, & t\ge\sigma_1;\\ \text{linear}, & \sigma_2\le t\le\sigma_1;\\ 0, & 0\le t\le\sigma_2.\end{cases}$$

(5) 令 $a,b\in A^+$，若存部分等距 $u\in A''$ 满足对任意的 $c\in Her(a)$，有 $u^*c, cu\in A$，$uu^*=p_a$，其中 p_a 是 a 的值投影，且 $u^*cu\in Her(b)$，则记 $[a]\le[b]$。

设 E 是 C^*-代数 A 上的 Hilbert C^*-模。

(1) 对任意的 $x,y\in E$，对任意的 $z\in E$，定义 $\theta_{x,y}(z)=x\langle y,z\rangle$。

(2) 令 $K(E)=\overline{span}\{\theta_{x,y}:x,y\in E\}$，称 $K(E)$ 中的元素为 E 上的紧算子。

(3) 令 D 为 E 的子集，如果 D 中元素的有限 A-线性组合构成的子模在 E 中稠密，则称 D 是 E 的生成集。如果 E 有有限或可数生成集，则称 E 是可数生成的。

(4) 记 $H_A=\left\{(x_k)\in\prod_1^\infty A:\sum x_k^*x_k\text{在}A\text{中范数下收敛}\right\}$，则 H_A 是 Hilbert A-模。

3. 主要结果

定义 3.1. A 是 unital 的 C^*-代数，若对于任意 $\varepsilon>0$，$0<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<1$，任意有限集 $\mathcal{F}\subset A$ 包含非零正元 a，任意 $n\in\mathbb{N}^+$，存在 C^*-子代数 $B\in\mathcal{C}_0$ 以及投射 $p\in A$，$p=I_B$ 满足：

(1) 任给 $x\in\mathcal{F}$，$\|px-xp\|\le\varepsilon$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{F}$，$pxp\in_\varepsilon B$；

(3) $n[1-p]\le[p]$，$n\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}((1-p)a(1-p))\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(pap)\right]$。

则称 $GTR(A)\le 1$。

当 A 是 non-unital 的 C^*-代数时，若 $GTR(\tilde{A})\le 1$，则称 $GTR(A)\le 1$。

注 3.2. 若 X 是有限维紧的 *Hausdorff* 空间则 $C(X)$ 亦为有限维空间，所以 $C(X)\in\mathcal{C}_0$，因此 $GTR(C(X))\le 1$。

定理 3.3. 设 A_1,A_2 是 unital C^*-代数，若 $GTR(A_i)\le 1\ \ (i=1,2)$，则 $GTR(A_1\oplus A_2)\le 1$。

证明. 任意 $\varepsilon>0$，$0<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<1$，$n\in N^+$ 以及任意有限集 $\mathcal{F}=\{(a_1,b_1),\cdots,(a_t,b_t),(a,b)\}\subset A_1\oplus A_2$，其中 $(a,b)\ge 0$，所以 $a,b\ge 0$。令 $\mathcal{G}_1=\{a_1,\cdots,a_t,a\}$，$\mathcal{G}_2=\{b_1,\cdots,b_t,b\}$，则由 $GTR(A_i)\le 1\ \ (i=1,2)$ 知对上述 ε，σ_i 分别存在 $B_1,B_2\in C_0$，$p_1\in\mathcal{P}(A_1)$，$p_2\in\mathcal{P}(A_2)$，$p_i=I_{B_i}$ 满足：

(1) 任给 $x\in\mathcal{G}_i$，$\|p_ix-xp_i\|\le\varepsilon$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{G}_i$，$p_ixp_i\in_\varepsilon B_i$；

(3) $n[1-p_1]\le[p_1]$，$n\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p_1)a(1-p_1)\right)\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(p_1ap_1)\right]$；

(4) $n[1-p_2]\le[p_2]$，$n\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p_2)b(1-p_2)\right)\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(p_2bp_2)\right]$。

令 $B=B_1\oplus B_2$，下证 $B\in\mathcal{C}_0$。

因为存在有限维代数 F_1，F_2 及同态 ϕ_0，$\phi_1:F_1\to F_2$ 使得 $B_1=\{(f,a)\in C([0,1],F_2)\oplus F_1: f(0)=\phi_0(a), f(1)=\phi_1(a)\}$ 及有限维代数 G_1，G_2 及同态 φ_0，$\varphi_1:G_1\to G_2$ 使得 $B_2=\{(g,b)\in C([0,1],G_2)\oplus G_1: g(0)=\varphi_0(b), g(1)=\varphi_1(b)\}$。

令 $E_1=F_1\oplus G_1$，$E_2=F_2\oplus G_2$ 则 E_1，E_2 是有限维代数，$\psi_0=\phi_0\oplus\varphi_0$，$\psi_1=\phi_1\oplus\varphi_1$，是 ψ_0，ψ_1 从 E_1 到 E_2 的同态且 $C=\{(h,e)\in C([0,1],F_2\oplus G_2)\oplus(F_1\oplus G_1): h(0)=\psi_0(e), h(1)=\psi_1\}$，则 $C=B_1\oplus B_2$，且 $p=(p_1,p_2)=I_B$，所以

(1) 任给 $x\in\mathcal{F}$，$\|px-xp\|=\|p_1a_i-a_ip_1\|+\|p_2b_i-b_ip_2\|<2\varepsilon$；

(2) 因为存在 $c_i,c\in B_1$，$d_i,d\in B_2$ $(i=1,\cdots,t)$ 使得

$$\|p_1a_ip_1-c_i\|<\varepsilon,\|p_2b_ip_2-d_i\|<\varepsilon,\|p_1ap_1-c\|<\varepsilon,\|p_2bp_2-d\|<\varepsilon$$

所以

$$\|p(a_i,b_i)p-(c_i,d_i)\|=\|p_1a_ip_1-c_i\|+\|p_2b_ip_2-d_i\|<2\varepsilon\,(i=1,\cdots,t),$$
$$\|p(a,b)p-(c,d)\|=\|p_1ap_1-c\|+\|p_2bp_2-d\|<2\varepsilon.$$

所以 $pxp\in_{2\varepsilon}B$（任给 $x\in\mathcal{F}$）。

(3) $n\left[(I_{A_1},I_{A_2})-(p_1,p_2)\right]=n\left(\left[I_{A_1}-p_1\right]+\left[I_{A_2}-p_2\right]\right)\le[p_1]+[p_2]=[p_1+p_2]$

$$\begin{aligned}&n\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p)(a,b)(1-p)\right)\right]\\&=n\left(\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1_{A_1}-p_1)a(1_{A_1}-p_1)\right)\right]+\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1_{A_2}-p_2)b(1_{A_2}-p_2)\right)\right]\right)\\&\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(p_1ap_1)\right]+\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(p_2bp_2)\right]\\&=\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(p(a,b)p)\right]\end{aligned}$$

综上得 $GTR(A_1\oplus A_2)\le 1$。

□

注 3.4. 设 $\{A_1,\cdots,A_n\}$ 是任意有限个 C^*-代数，若对于任意 i，$GTR(A_i)\le 1$，则 $GTR\left(\oplus_{i=1}^n A_i\right)\le 1$。特殊

的，当 A 是 unital C^*-代数时，因为 $\tilde{A}\cong A\oplus\mathcal{C}$，所以 $GTR(A)\le 1$ 当且仅当 $GTR(\tilde{A})\le 1$。

定理 3.5. 令 A 是 unital C^*-代数，若任意 $\varepsilon>0$，任意有限集 $\mathcal{F}\subset A$，存在 unital C^*-子代数 $B\subset A$ 满足 $GTR(B)\le 1$ 且 $\mathcal{F}\subset_{\varepsilon} B$， $I_B=I_A$，则 $GTR(A)\le 1$。

特殊的，对 $A=\lim_{\to}A_n$，其中 $GTR(A_n)\le 1$，则 $GTR(A)\le 1$。

证明. 任意 $\varepsilon>0$， $0<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<1$， $n\in N^+$，任意有限集 $\mathcal{F}=\{a_1,\cdots,a_t,a\}$，其中 $a\ge 0$。令 $\sigma_3<d_4<d_3<d_2<d_1<\sigma_2$，则由[3]引理 2.8 知存在 $\delta_1=\delta(d_1,d_2)$， $\delta_2=\delta(\sigma_3,\sigma_4)$ 满足引理 2.8 不妨设 $\varepsilon<\min\{\delta_1,\delta_2\}$，对于 $\eta=\varepsilon/3$ 由条件知存在 unital C^*-子代数 $B\subset A$， $GTR(B)\le 1$ 且 $\mathcal{F}\subset_{\eta} B$，所以对于任意 i，存在 $b_i\in B$ 使 $\|a_i-b_i\|<\eta$，存在 $b\in B_+$，使 $\|a-b\|<\eta$。令 $\mathcal{G}=\{b_1,\cdots,b_t,b\}$，则由 $GTR(B)\le 1$ 知对上述 ε， d_i 以及 $\mathcal{G}$ 存在 $C\in C_0$， $C\subset B$， $p\in\mathcal{P}(B)$， $p=I_C$ 满足：

(1) 任给 $x\in\mathcal{G}$， $\|px-xp\|<\varepsilon/3$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{G}$， $pxp\in_{\varepsilon/3} C$；

(3) $n[1-p]\le[p]$， $n\left[f_{d_2}^{d_1}\left((1-p)b(1-p)\right)\right]\le\left[f_{d_4}^{d_3}(pbp)\right]$，

所以

(1') 任意 $0\le i\le t$，

$$\|pa_i-a_ip\|\le\|pa_i-pb_i\|+\|pb_i-b_ip\|+\|b_ip-a_ip\|\le\eta+\eta+\eta=\varepsilon.$$

$$\|pa-ap\|\le\|pa-pb\|+\|pb-bp\|+\|bp-ap\|\le\eta+\eta+\eta=\varepsilon$$

(2') 因为对于任意的 i，存在 $c_i\in C$ 使得 $\|pb_ip-c_i\|\le\eta$，则

$$\|pa_ip-c_i\|\le\|pa_ip-pb_ip\|+\|pb_ip-c_i\|\le\eta+\eta=2\eta\le\varepsilon.$$

同理因为存在 $c\in C$，满足 $\|pbp-c\|\le\eta$，所以

$$\|pap-c\|\le\|pap-pbp\|+\|pbp-c\|\le\eta+\eta=2\eta\le\varepsilon.$$

因此任给 $x\in\mathcal{F}$， $pxp\in_{\varepsilon} C$。

因为 $\|a-b\|\le\eta$，所以 $\|pap-pbp\|\le\varepsilon$， $\|(1-p)a(1-p)-(1-p)b(1-p)\|\le\varepsilon$，且因为 $\varepsilon<\min\{\delta_1,\delta_2\}$，所以由[3]引理 2.8 知

$$n\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p)a(1-p)\right)\right]\le n\left[f_{d_2}^{d_1}\left((1-p)a(1-p)\right)\right]\le\left[f_{d_4}^{d_3}(pap)\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(pap)\right].$$

综上得 $GTR(A)\le 1$。

□

定义 3.6. 设 A 是 unital C^*-代数，若对于任意 $\varepsilon>0$， $0<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<1$，任意有限集 $\mathcal{F}\subset A$ 包含非零正元 a，存在 C^*-子代数 $B\in\mathcal{C}_0$ 以及投射 $p\in A$， $p=I_B$ 满足：

(1) 任给 $x\in\mathcal{F}$， $\|px-xp\|\le\varepsilon$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{F}$， $pxp\in_{\varepsilon} B$；

(3) $\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p)a(1-p)\right)\right]\le[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(pap)$，

则称 $GTR_w(A)\le 1$。

当 A 是 non-unital 的 C^*-代数时，若 $GTR_w(\tilde{A})\le 1$ 则称 $GTR_w(A)\le 1$。

引理 3.7. 设 A 为 C^*-代数，若 $GTR_w(A)\le 1$，则对任意 $p\in\mathcal{P}(A)$ 有 $GTR_w(pAp)\le 1$。

证明. 任意 $\varepsilon>0$， $0<\sigma_4<\sigma_3<d_4<d_3<d_2<d_1<\sigma_2<\sigma_1<1$，令 $\delta_1=\delta(\sigma_3,\sigma_4)$， $\delta_2=\delta(d_3,d_4)$，

$\delta_3=\delta(d_1,d_2)$，令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$， $\eta=\min\{\varepsilon/34,\delta/10,1/10\}$。

对于任意有限集 $\mathcal{F}\subset pAp, b\in(pAp)_+$，且 $b\in\mathcal{F}$，令 $\mathcal{G}=\mathcal{F}\cup\{p\}$，对于上述 η， d_i 以及 $\mathcal{G}$ 由 $GTR_w(A)\le 1$ 知存在 C^*-子代数 $C\subset A$， $C\in C_0$， $q\in\mathcal{P}(A)$， $q=I_C$ 满足：

(1) 任给 $x\in\mathcal{G}$， $\|qx-xq\|<\eta$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{G}$， $qxq\in_\eta C$；

(3) $\left[f_{d_2}^{d_1}((1-q)b(1-q))\right]\le\left[f_{d_4}^{d_3}(qbq)\right]$，

由此得

$$\begin{aligned}\left\|pqp-(pqp)^2\right\|&=\|pqp-pqpq+pqpq-pqpqp\|\\&\le\|pqp-pqpq\|+\|pqpq-pqpqp\|\\&\le\|pq\|\|pq-qp\|+\|pqp\|\|pq-qp\|\\&\le\|qp-pq\|+\|pq-qp\|\\&=2\|pq-qp\|<2\eta\end{aligned}$$

同理$\left\|qpq-(qpq)^2\right\|<2\eta$。

由[4]引理 2.5.5 知存在投射 $p_1\in C^*(pqp)$， $p_2'\in C^*(qpq)$满足$\|pqp-p_1\|\le 4\eta$， $\|qpq-p_2'\|<4\eta$。由(2)知存在 $c\in C_{sa}$， $\|p_2'-c\|\le 5\eta$，所以由[4]引理 2.5.4 知存在 $p_2\in C^*(c)\subset C$，使$\|p_2-p_2'\|\le 10\eta$。则由[4]引理 2.5.1 知存在 $u\in\mathcal{U}(A)$满足 $p_1=up_2u^*$ 且$\|u-1\|<\sqrt{2}\|p_1-p_1\|20\eta$。

令 $B=p_1(uCu^*)p_1$，则由[3]知 $B\in\mathcal{C}_0$，且 $I_B=p_1$ 满足：

(1') 任给 $x\in\mathcal{F}$)， $\|p_1x-xp_1\|=\varepsilon$；

(2') 任给 $x\in\mathcal{F}$)， $p_1xp_1\in_\varepsilon B$；

(3') $\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}((p-p_1)b(p-p_1))\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(p_1bp_1)\right]$，

所以 $GTR_w(pAp)\le 1$。

□

定理 3.8. 设 A 是 unital C^*-代数，则 $GTR(A)\le 1$ 当且仅当 $GTR_w(A)\le 1$。

证明. 设 $GTR_w(A)\le 1$，则对于任意 $\varepsilon>0$， $0<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<1$， $n\in N^+$，以及任意有限集 $\mathcal{F}=\{b_1,\cdots,b_t,b\}\subset A$，其中 $b\ge 0$，则由 GTR_w 定义知当 $n=1$ 时结论成立。下对 n 运用数学归纳法，假设 $n=j$ 时结论成立，下证 $n=j+1$ 时结论成立。

取 d_i 满足 $\sigma_3<d_6<d_5<d_4<d_3<d_2<d_1<\sigma_2$，由则由[3]引理 2.9 知存在 $\delta_1=\delta(\sigma_3,\sigma_4)$， $\delta_2=\delta(d_3,d_4,2)$， $\delta_3=\delta(d_5,d_6,2)$满足引理 2.9，令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\varepsilon\}$，则由归纳假设知存在 C^*-子代数 $B_1\in\mathcal{C}_0$， $p_1\in\mathcal{P}(A)$， $p=I_{B_1}$ 满足：

(1) 任给 $x\in\mathcal{F}$， $\|p_1x-xp_1\|\le\delta/4$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{F}$， $p_1xp_1\in_{\delta/4}B_1$；

(3) $j[1-p_1]\le[p_1]$， $j\left[f_{d_4}^{d_3}((1-p_1)b(1-p_1))\right]\le\left[f_{d_6}^{d_5}(p_1bp_1)\right]$。

由引理 3.7 只对于 C^*-代数$(1-p_1)A(1-p_1)$，有限集$\mathcal{G}=(1-p_1)\mathcal{F}(1-p_1)$存在 C^*-子代数 $B_2\in\mathcal{C}_0$， $p_2\in(1-p_1)A(1-p_1)$， $p_2=I_{B_2}$ 满足：

(1') 任给 $x\in\mathcal{G}$， $\|p_2x-xp_2\|\le\delta/4$；

(2') 任给 $x \in \mathcal{G}$， $p_2 x p_2 \in_{\delta/4} B_2$；

(3') $\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p_1-p_2)b(1-p_1-p_2)\right)\right] \le \left[f_{d_2}^{d_1}\left(p_2 b p_2\right)\right]$。

令 $B = B_1 + B_2$， $p = p_1 + p_2$， 则由定理 1 的证明知 $B \in \mathcal{C}_0$， 且 $I_B = p$， 经过简单的计算可知

(a) 任给 $x \in \mathcal{F}$， $\|px - xp\| < \varepsilon$；

(b) 任给 $x \in \mathcal{F}$， $pxp \in_{\varepsilon} B$；

(c) $(j+1)\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p)b(1-p)\right)\right] \le \left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left(pbp\right)\right]$。

由(3')知 $[1-p] \le [p_2]$，又因为 $1-p = 1-p_1-p_2 \le 1-p_1$，所以 $Her(1-p) \subset Her(1-p_1)$，则由[5]定理 3.3 知 $[1-p] \le [1-p_1]$，所以 $(j+1)[1-p] = j[1-p] + [1-p] \le j[1-p_1] + [p_2] \le [p_1] + [p_2] = [p]$ 综上得 $GTR(A) \le 1$。

□

附注 3.9. 由引理 3.7 和定理 3.8 知若 $GTR(A) \le 1$，B 是 A 的单位遗传子代数，则 $GTR(B) \le 1$。特殊的，对于 A 的单位理想 I 有 $GTR(I) \le 1$。

定理 3.10. 设 A 是 unital C^*-代数，则 $GTR(A) \le 1$ 当且仅当任意 $n \in N^+$， $GTR(M_n(A)) \le 1$。

证明. 若 $GTR(M_n(A)) \le 1$，由于 $A \triangleright M_n(A)$，所以由注 3.9 知 $GTR(A) \le 1$。

若 $GTR(A) \le 1$，则任意 $\varepsilon > 0$， $0 < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < 1$，以及任意有限集 $\mathcal{F} \subset M_n(A)$ 且存在 $b \in M_n(A)_+$， $b \in \mathcal{F}$。设 $\{e_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$ 是 $M_n(A)$ 的标准正交基，不妨认为 $I_A = e_{11}$，取 d_i 满足 $\sigma_3 < d_4 < d_3 < d_2 < d_1 < \sigma_2$，设 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cup \left\{ f_{\sigma_2}^{\sigma_1}(b), f_{\sigma_4}^{\sigma_3}(b), f_{d_2}^{d_1}(b)\right\}$ 以及任意取定 $\delta > 0$，令 $\mathcal{G} = \left\{a_{ij} : (a_{ij}) \in \mathcal{F}_1\right\}$，则存在 C^*-代数 $C_0 \subset A$， $C_0 \in \mathcal{C}_0$， $p \in \mathcal{P}$， $p = I_{C_0}$，满足：

(1) 任给 $x \in \mathcal{G}$， $\|px - xp\| < \delta/4n^2$；

(2) 任给 $x \in \mathcal{G}$， $pxp \in_{\delta/4n^2} C_0$；

(3) $n[1-p] \le [p]$。

由(3)知 $n[1-p] \le [p] \le [I_A]$。

令 $P_1 = diag(p,\cdots,p)$， $C_1 = M_n(C_0)$，则 $P = I_{C_1}$， 且

(1') 任给 $x \in \mathcal{F}_1$， $\|P_1 x - x P_1\| < \delta/4$；

(2') 任给 $x \in \mathcal{F}_1$， $P_1 x P_1 \in_{\delta/4} C_1$；

(3') $[1-P_1] \le [P_1]$， $[1-P_1] \le [e_{11}]$。

令 $B = (1-P_1)M_n(A)(1-P_1)$，则由(3')知存在部分等距元 $v \in M_n(A)$，满足 $vv^* = P_1$， $v^*v \le e_{11}$，又因为我们将 I_A 看做 e_{11}，所以 v^*Bv 是 A 的单位遗传子代数。令 $\mathcal{G}_1 = \left\{(1-P_1)x(1-P_1) : x \in \mathcal{F}\right\}$，则由引理 3.7 知存在 C^*-子代数 $C_2 \subset B$， $C_2 \in \mathcal{C}_0$ 以及投射 $P_2 \le 1-P$ 且 $P_2 = I_{C_2}$ 满足：

(1') 任给 $x \in \mathcal{G}_1$， $\|P_2 x - x P_2\| < 1/4\delta$；

(2') 任给 $x \in \mathcal{G}_1$， $P_2 x P_2 \in_{1/4} C$；

(3') $\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}(1-P_1-P_2)b(1-P_1-P_2)\right] \le \left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left(P_2(1-P_1)b(1-P_1)P_2\right)\right]$。

令 $C = C_1 + C_2$，易证 $C \in \mathcal{C}_0$， $P = P_1 + P_2 = I_C$，当 δ 足够小时，对上述 ε，有

(a) 任给 $x \in \mathcal{F}$， $\|Px - xP\| < \varepsilon$；

(b) 任给 $x \in \mathcal{F}$， $PxP \in_{\varepsilon} C$；

(c) $\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-P)b(1-P)\right)\right] \le \left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left(PbP\right)\right]$。

综上可得 $GTR\left(M_n\left(A\right)\right)\le 1$。

□

推论 3.11. 设 A 是 unital C^*代数，$GTR\left(A\right)\le 1$，则对于任意的 AF-代数 B，有 $GTR\left(A\otimes B\right)\le 1$。

证明. 由定理 3.10 知对于任意 n 有 $GTR\left(M_n\left(A\right)\right)\le 1$，又因为存在正整数列 $\{n_k\}$ 使 $A\otimes B$ 是 $\left\{M_{n_k}\left(A\right)\right\}$ 的归纳极限，所以由定理 3.5 知 $GTR\left(A\otimes B\right)\le 1$。

□

引理 3.12. 设 A 是 unital 的 C^*-代数，D 是在 A 中稠密的自伴子代数，若对于任意的 $\varepsilon>0$，任意的 $0<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<1$，任意有限子集 $\mathcal{F}\subset D$，$b\in D^+$，且 $b\in\mathcal{F}$，存在非零投射 $p\in A$ 及 A 的 C^*-子代数 $B\in\mathcal{C}_0$，且 $I_B=p$，满足以下条件：

(1) 任给 $x\in\mathcal{F}$，$\left\|px-xp\right\|<\varepsilon$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{F}$，$pxp\in_{\varepsilon}B$；

(3) $\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left(\left(1-p\right)b\left(1-p\right)\right)\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}\left(pbp\right)\right]$。

则 $GTR\left(A\right)\le 1$。

证明. 首先证明 $\overline{D^+}=A^+$。因为 D 是 A 的稠密自伴子代数，所以对于任给 $a\in A^+,\sigma>0$ 存在 $d\in D$ 使得 $\left\|d-a\right\|<\sigma$。由 $C\left(\sigma\left(a\right)\right)$ 上的函数演算知 $\left\|a^*a-d^*d\right\|<2\sigma$，即 $\left\|a^2-d^*d\right\|<2\sigma$，再用一次 $C\left(\sigma\left(a\right)\right)$ 上的函数演算可知 $\left\|a-\left|d\right|\right\|<\sigma$，且 $\left|d\right|\in D^+$，所以由 σ 的任意性知 $\overline{D^+}=A^+$。

任给 $\delta>0, 0<d_4<d_3<d_2<d_1<1$，任意的有限集 $\mathcal{F}$，$a\in A^+$，且 $a\in\mathcal{F}$。取 σ_i 使得 $0<d_4<d_3<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<d_2<d_1<1$，由[3]引理 2.8 知，存在 $\delta_1=\delta\left(d_3,d_4\right)$，$\delta_2=\delta\left(\sigma_1,\sigma_2\right)>0$ 满足引理 2.8 的条件，令 $\varepsilon=\min\{\delta,\delta_1,\delta_2\}$，不妨设 $\mathcal{F}=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,a\}$ 且 $\left\|a\right\|\le 1$，由于 $\mathcal{F}\subseteq A=\bar{D}$，所以对于上述 $\varepsilon>0$，分别存在 $b_i\in D$，使得

$$\left\|a_i-b_i\right\|<\varepsilon/3$$

又因为 $A^+=\overline{D^+}$，所以存在 $b\in D^+$，使得 $\left\|a-b\right\|<\varepsilon/3$ 且 $\left\|b\right\|\le 1$。令 $\mathcal{G}=\{b_1,b_2,\cdots,b_m,b\}\subseteq D$，由于 D 满足题设条件，所以对于 $\eta=\varepsilon/3$ 及上述 σ_i 存在 A 的 C^*-子代数 $B\in\mathcal{C}_0$ 以及非零投射 $p=I_B$ 满足下列条件：

(1) 任给 $x\in\mathcal{G}$，$\left\|px-xp\right\|<\varepsilon/3$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{G}$，$pxp\in_{\varepsilon/3}B$；

(3) $\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left(\left(1-p\right)b\left(1-p\right)\right)\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}\left(pbp\right)\right]$。

所以对于任意的 i，

(1') $\left\|pa_i-a_ip\right\|\le\left\|pa_i-pb_i\right\|+\left\|pb_i-b_ip\right\|+\left\|b_ip-a_ip\right\|<\varepsilon<\delta$.

(2') 因为对于任意的 i，存在 $c_i,c\in B$，使 $\left\|pb_ip-c_i\right\|<\varepsilon/3$，$\left\|pbp-c\right\|<\varepsilon/3$，所以

$$\left\|pa_ip-c_i\right\|<\left\|pa_ip-pb_ip\right\|+\left\|pb_ip-c_i\right\|<2\varepsilon/3<\varepsilon<\delta$$

同理 $\left\|pap-c\right\|<\varepsilon<\delta$。故 $pyp\in_{\delta}B$，任意 $y\in\mathcal{F}$。

(3') 因为 $\left\|a-b\right\|<\varepsilon/3$，所以 $\left\|\left(1-p\right)a\left(1-p\right)-\left(1-p\right)b\left(1-p\right)\right\|<\delta_2$，$\left\|pap-pbp\right\|<\delta_1$。

因此由[4]引理 2.8 知

$$\left[f_{d_2}^{d_1}\left(\left(1-p\right)a\left(1-p\right)\right)\right]\le\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left(\left(1-p\right)b\left(1-p\right)\right)\right],$$

$$\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}\left(pbp\right)\right]\le\left[f_{d_4}^{d_3}\left(pap\right)\right],$$

即

$$\left[f_{d_2}^{d_1}\left((1-p)a(1-p)\right)\right]\le\left[f_{d_4}^{d_3}\left(pap\right)\right].$$

因此 $GTR(A)\le 1$。

引理 3.13. 设 A 为 unital C^*-代数，$\xi=\{x_k\}$，$\eta=\{y_k\}\in H_A$。设 $\delta>0$，若存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\left\|\sum_{k=n}^{\infty}x_k^*x_k\right\|^{1/2}\le\delta$，$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}y_k^*y_k\right\|^{1/2}\le\delta$，则

$$\left\|\theta_{\xi,\eta}-\theta_{\xi',\eta'}\right\|\le\delta\left(\|\eta\|+\|\xi\|\right).$$

其中 $\xi'=(x_1,\cdots,x_{n-1},0,\cdots)$，$\eta'=(y_1,\cdots,y_{n-1},0,\cdots)$。

证明. 因为

$$\begin{aligned}\left\|\theta_{\xi,\eta}-\theta_{\xi',\eta'}\right\|&\le\left\|\theta_{\xi,\eta}-\theta_{\xi',\eta}\right\|+\left\|\theta_{\xi',\eta}-\theta_{\xi',\eta'}\right\|\\&\le\|\xi-\xi'\|\|\eta\|+\|\xi'\|\|\eta-\eta'\|\\&=\delta\|\eta\|+\delta\|\xi'\|\\&\le\delta\left(\|\eta\|+\|\xi\|\right)\end{aligned}$$

□

引理 3.14. 设 A 为 unital C^*-代数，$GTR(A)\le 1$，则 $GTR\left(K\left(H_A\right)\right)\le 1$。

证明. 任意取定 m，定义 H_A 上的投射

$$p_m:H_A\to H_A$$

$$\{a_k\}\mapsto(a_1,\cdots,a_m,0\cdots)$$

则 $p_mH_A\cong A^m$，所以 $K\left(A^m\right)\cong K\left(p_mH_A\right)\cong p_mK\left(H_A\right)p_m\subset K\left(H_A\right)$，因此可以将 $K\left(A^m\right)$ 看作是 $K\left(H_A\right)$ 的 C^*-子代数。

下面证明 $GTR\left(\widetilde{K(H_A)}\right)\le 1$。设 I 为 H_A 自身上的恒等算子，则 $\widetilde{K(H_A)}\cong K(H_A)+\mathbb{C}I$，且 $F(H_A)+\mathbb{C}I$ 为 $K(H_A)+\mathbb{C}I$ 的稠密自伴子代数。

对于任意 $\varepsilon>0$，$0<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<1$，取 d_i 满足 $0<\sigma_4<\sigma_3<d_4<d_3<d_2<d_1<\sigma_2<\sigma_1<1$，由 [3]引理 2.8 知存在 $\delta_1=\delta(\sigma_3,\sigma_4)$，$\delta_2=\delta(d_1,d_2)$ 满足引理 2.8 的条件，不妨设 $\varepsilon\le\delta_i$。

任意有限集 $\mathcal{F}=\{f_1,\cdots,f_t,f\}\subset F(H_A)+\mathbb{C}I$。其中 $f\ge 0$，$f_i=\sum_{j=1}^{n_i}\left(\theta_{x_{ij},y_{ij}}+\lambda_{ij}I\right)$，$f=\sum_{j=1}^{n}\left(\theta_{x_j,y_j}+\lambda_jI\right)$，$x_{ij},y_{ij},x_j,y_j\in H_A$，$\lambda_{ij},\lambda_j\in\mathbb{C}$，$n,n_i\in\mathbb{N}$，$i=1,2,\cdots,t$。

不妨设 $\|f\|\le 1$，$x_{ij}=\left(x_{ij}^k\right)$，$y_{ij}=\left(y_{ij}^k\right)$，$x_j=\left(a_j^k\right)$，$y_j=\left(b_j^k\right)$，则 $\sum\left(x_{ij}^k\right)^*\left(x_{ij}^k\right)$，$\sum\left(y_{ij}^k\right)^*\left(y_{ij}^k\right)$，$\sum\left(a_j^k\right)^*\left(a_j^k\right)$，$\sum\left(b_j^k\right)^*\left(b_j^k\right)$ 在范数拓扑下收敛。

令 $l_i=\max\left\{\|x_{ij}\|,\|y_{ij}\|\,|\,1\le j\le k_i\right\}$，$k=\max\left\{\|x_j\|,\|y_j\|\,|\,1\le j\le n\right\}$，$l=\max\{l_i\,|\,1\le i\le t\}$。

且对于任意 $\delta>0$，对每个 $i=1,\cdots,t;j=1,\cdots,n_i$ 分别存在 N_{ij}，M_{ij}，K_j 使得

当 $k>\max\left\{N_{ij},M_{ij},K_j\right\}$ 时有，

$$\left\|\sum_k\left(x_{ij}^k\right)^*x_{ij}^k\right\|<\delta,\left\|\sum_k\left(y_{ij}^k\right)^*y_{ij}^k\right\|<\delta,\left\|\sum_k\left(a_j^k\right)^*a_j^k\right\|<\delta,\left\|\sum_k\left(b_j^k\right)^*b_j^k\right\|<\delta,$$

令 $N=\max\left\{N_{ij},M_{ij},K_j \mid 1\le j\le n_i,1\le i\le t\right\}$

设

$$g_i=\sum_{j=1}^{n_i}\theta_{\left(x_{ij}^1,\cdots,x_{ij}^N\right),\left(y_{ij}^1,\cdots,y_{ij}^N\right)}+\lambda_{ij}I,$$

$$g=\sum_{j=1}^{n}\theta_{\left(a_j^1,\cdots,a_j^N\right),\left(b_j^1,\cdots,b_j^N\right)}+\lambda_j I,$$

则由引理 3.13 知 $\|f-g\|\le 2kn\delta$，$\|f_i-g_i\|\le 2ln_i\delta$。

不妨设 $g\ge 0$，若不然因为 $\|f-g\|\le 2kn\delta$，则由 $C(\sigma(f))$ 上的函数演算知 $\left\|f^2-g^*g\right\|\le 4kn\delta$，由此得 $\|f-|g|\|\le(4kn\delta)^{1/2}$，且因为 $K\left(A^N\right)+\mathbb{C}I$ 是 $K\left(H_A\right)+\mathbb{C}I$ 的 C^*-子代数知 $|g|\in K\left(A^N\right)+\mathbb{C}I$，因此用 $|g|$ 代替 g 即可。令 $\mathcal{F}_0=\{g_1,\cdots,g_t,g\}$，则 $\mathcal{F}_0$ 为 $K\left(A^N\right)$ 的有限子集。

因为 $K\left(A^N\right)\cong M_N(A)$ 有单位元，所以 $K\left(A^N\right)+\mathbb{C}I\cong K\left(A^N\right)\oplus\mathbb{C}$，因此 $GTR\left(K\left(A^N\right)+\mathbb{C}I\right)=GTR\left(K\left(A^N\right)\oplus\mathbb{C}I\right)\le 1$，所以对 $\delta=\min\left\{\varepsilon/(4ln_i+1),\varepsilon/(4kn+1)\mid 1\le i\le t\right\}$ 以及上述 d_i，$\mathcal{F}_0$，存在 $B\in\mathcal{C}_0$，$B\subseteq K\left(A^N\right)+\mathbb{C}I$，$p\in\mathcal{P}\left(K\left(A^N\right)+\mathbb{C}I\right)$，使 $p=I_B$。

满足：

(1) 任给 $g_i\in\mathcal{F}_0$，$\|pg_i-g_ip\|<\delta$；

(2) 任给 $g_i\in\mathcal{F}_0$，$pg_ip\in_\delta B$；

(3) $\left[f_{d_2}^{d_1}\left((1-p)g(1-p)\right)\right]\le\left[f_{d_4}^{d_3}(pgp)\right]$。

则对任意 $f_i\in\mathcal{F}$，任给 $\varepsilon>0$ 有

(1')

$$\begin{aligned}\|pf_i-f_ip\|&\le\|pf_i-pg_i\|+\|pg_i-g_ip\|+\|g_ip-f_ip\|\\&\le\|f_i-g_i\|+\delta+\|f_i-g_i\|\\&\le 4ln_i\delta+\delta<\varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|pf-fp\|&\le\|pf-pg\|+\|pg-gp\|+\|gp-fp\|\\&\le 4kn\delta+\delta<\varepsilon\end{aligned}$$

(2') 因为 $pg_ip\in_\delta B$，所以存在 $c_i\in B$ 使 $\|pg_ip-c_i\|<\delta$，$i=1,2,\cdots,t$。则

$$\begin{aligned}\|pf_ip-c_i\|&\le\|pf_ip-pg_ip\|+\|pg_ip-c_i\|\\&\le\|f_i-g_i\|+\delta<2l_in_i\delta+\delta\\&<(4ln_i+1)\delta<\varepsilon\end{aligned}$$

同理因为 $pgp\in_\delta B$ 所以存在 $c\in B$ 使 $\|pgp-c\|<\delta$，则

$$\begin{aligned}\|pfp-c\|&\le\|pfp-pgp\|+\|pgp-c\|\\&\le\|f-g\|+\delta<2kn\delta+\delta\\&<(4kn+1)\delta<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $pf_ip,pfp\in_\varepsilon B$，$i=1,2,\cdots,t$。

(3') 因为 $\|f-g\|\le 2kn\delta$，所以有

$$\|(1-p)g(1-p)-(1-p)f(1-p)\|<\delta_1$$

$$\|pgp-pfp\|<\delta_2$$

所以由[3]引理 2.8 知

$$\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p)f(1-p)\right)\right]\le\left[f_{d_2}^{d_1}\left((1-p)g(1-p)\right)\right];$$

$$\left[f_{d_4}^{d_3}\left(pgp\right)\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}\left(pfp\right)\right],$$

所以

$$\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left((1-p)f(1-p)\right)\right]\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}\left(pfp\right)\right].$$

由上述证明知 $F(H_A)+\mathbb{C}I$， $K(H_A)+\mathbb{C}I$ 满足引理 3.12 的条件，所以可得 $GTR\left(\widetilde{K(H_A)}\right)\le 1$。

□

引理 3.15. 设 A 是 unital C^*-代数，$TR(A)=k$，B 是 A 的 σ_p -unital 遗传 C^*-子代数则有 $GTR(B)\le 1$。

证明. 设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 B 的一列近似单位，其中 $p_n\in\mathcal{P}(B)$。

对任意的 $\varepsilon>0, 0<\sigma_4<\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1<1$，有限集 $\mathcal{F}\subseteq\tilde{B}$，不妨设 $\mathcal{F}=\{b_1+\lambda_1,\cdots,b_n+\lambda_n,b+\lambda\}\subseteq B+\mathbb{C}$，其中 $b+\lambda\ge 0$。

选取 d_i 满足 $\sigma_3<d_4<d_3<d_2<d_1<\sigma_2$，则由[3]引理 2.8 知存在 $\delta_1=\delta(\sigma_3,\sigma_4)$， $\delta_2=\delta(d_1,d_2)$ 满足引理 2.8 的条件，不妨设 $\varepsilon<\delta_i\quad(i=1,2)$。

由于 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 B 的近似单位，所以对于 $\eta=\min\{\varepsilon/3,\delta_1,\delta_2\}$ 存在 N 使

$$\|b_i-p_Nb_ip_N\|<\eta,\|b-p_Nbp_N\|<\eta$$

由 B 是 A 的遗传子代数易证 p_NBp_N 亦为 A 的 unital 遗传子代数。所以 $GTR(p_NBp_N)\le 1$。

对于 $\mathcal{G}=\{p_Nb_1p_N+\lambda_1,\cdots,p_Nb_np_N+\lambda_n,p_Nbp_N+\lambda\}\subseteq p_NBp_N+\mathbb{C}$。由于 $GTR(p_NBp_N+\mathbb{C})=GTR(p_NBp_N)\le 1$，所以对上述 η， d_i， $\mathcal{G}$ 存在 $C\in\mathcal{C}_0$， $C\subset p_NBp_N+\mathcal{C}$， $q\in\mathcal{P}(p_NBp_N+\mathcal{C})$， $q=I_C$。

满足：

(1) 任给 $x\in\mathcal{G}$， $\|qx-xq\|<\eta$；

(2) 任给 $x\in\mathcal{G}$， $qxq\in_{\eta}C$；

(3) $\left[f_{d_1}^{d_2}\left((1-q)(p_Nbp_N+\lambda)(1-q)\right)\right]\le\left[f_{d_3}^{d_4}\left(q(p_Nbp_N+\lambda)q\right)\right]$。

则

(1')

$$\begin{aligned}
&\|q(b_i+\lambda_i)-(b_i+\lambda_i)q\|\\
&\le\|q(b_i+\lambda_i)-q(p_Nb_ip_N+\lambda_i)\|+\|q(p_Nb_ip_N+\lambda_i)-(p_Nb_ip_N+\lambda_i)q\|\\
&\quad+\|(p_Nb_ip_N+\lambda_i)q-(b_i+\lambda_i)q\|\\
&\le\|q\|\|(b_i+\lambda_i)-(p_Nb_ip_N+\lambda_i)\|+\eta+\|q\|\|(p_Nb_ip_N+\lambda_i)-(b_i+\lambda_i)\|\\
&<\eta+\eta+\eta=3\eta<\varepsilon
\end{aligned}$$

(2') 由(2)知对任给 i，存在 $c_i,c\in C$ 使

$$\|q(p_Nb_ip_N+\lambda_i)q-c_i\|<\varepsilon,\|q(p_Nbp_N+\lambda)q-c\|<\varepsilon$$

则

$$\begin{aligned}&\left\|q\left(b_i+\lambda_i\right)q-c_i\right\|\\&<\left\|q\left(b_i+\lambda_i\right)q-q\left(p_Nb_ip_N+\lambda_i\right)q\right\|+\left\|q\left(p_Nb_ip_N+\lambda_i\right)q-c_i\right\|\\&\le\eta+\eta=2\eta<\varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\|q\left(b+\lambda\right)q-c\right\|\\&<\left\|q\left(b+\lambda\right)q-q\left(p_Nbp_N+\lambda\right)q\right\|+\left\|q\left(p_Nbp_N+\lambda\right)q-c\right\|\\&\le\eta+\eta=2\eta<\varepsilon\end{aligned}$$

(3') 由于 $\left\|p_Nbp_N-b\right\|<\eta$，所以 $\left\|\left(p_Nbp_N+\lambda\right)-\left(b+\lambda\right)\right\|$，所以

$$\left\|\left(1-q\right)\left(p_Nbp_N+\lambda\right)\left(1-q\right)-\left(1-q\right)\left(b+\lambda\right)\left(1-q\right)\right\|<\eta<\delta_1;$$

$$\left\|q\left(p_Nbp_N+\lambda\right)q-q\left(b+\lambda\right)q\right\|<\eta<\delta_2,$$

所以由[3]引理 2.8 知

$$\begin{aligned}&\left[f_{\sigma_2}^{\sigma_1}\left(\left(1-q\right)\left(b+\lambda\right)\left(1-q\right)\right)\right]\\&\le\left[f_{d_2}^{d_1}\left(\left(1-q\right)\left(p_Nbp_N+\lambda\right)\left(1-q\right)\right)\right]\\&\le\left[f_{d_4}^{d_3}\left(q\left(p_Nbp_N+\lambda\right)q\right)\right]\\&\le\left[f_{\sigma_4}^{\sigma_3}\left(q\left(b+\lambda\right)q\right)\right]\end{aligned}$$

所以 $TR\left(B+\mathbb{C}\right)\le k$，即 $TR\left(B\right)\le k$。

□

定理 3.16 设 A 为 C^*-代数，$GTR\left(A\right)\le1$，E 是 HAM。若 $K\left(E\right)$ 是 σ_p-unital 的紧算子理想，则 $GTR\left(K\left(E\right)\right)\le1$。

证明. 因为 $GTR\left(A\right)=GTR\left(\tilde{A}\right)\le1$，且 $K_A\left(E\right)=K_{\tilde{A}}\left(E\right)$，所以不妨设 A 是 unital 的。

因为 $K\left(E\right)$ 是 σ_p-unital 的紧算子理想，所以 E 是可数生成的 HAM。则由[6]定理 15.4.6 知 $E\oplus H_A\cong H_A$，所以 $K\left(E\right)$ 是 $K\left(H_A\right)$ 的遗传子代数。若

(1) $K\left(E\right)$ 是 unital 紧算子理想，则由引理 3.9 以及定理 3.14 知 $GTR\left(K\left(E\right)\right)\le1$。

(2) $K\left(E\right)$ 是 σ_p-unital 的紧算子理想，则由引理 $GTR\left(K\left(E\right)\right)\le1$。

参考文献

[1] Lin, H. (2001) The Tracial Topological Rank of C^*-Algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **83**, 199-234. https://doi.org/10.1112/plms/83.1.199

[2] Gong, G., Lin, H. and Niu, Z. (2019) A Classification of Finite Simple Amenable Z-Stable C^*-Algebras, I: C^*-Algebras with Generalized Tracial Rank One. arXiv:1909.13382 [math.OA]

[3] Hu, S., Lin, H. and Xue, Y. (2004) The Tracial Topological Rank of Extensions of C^*-Algebras. *Mathematica Scandinavica*, **94**, 125-147. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-14433

[4] Lin, H. (2001) An Introduction to the Classification of Amenable C^*-Algebras. World Scientific, Singapore: https://doi.org/10.1142/4751

[5] 魏常果, 王利广. 遗传子代数与正元的比较[J]. 中国科学: A 辑, 2009(10): 1261-1266.

[6] Wegge-Olsen, N. (1993) *K*-Theory and C^*-Algebras. Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo.