Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 345-355
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104044

Hans汉斯

Fully Degenerate Poly-Genocchi Polynomials

Song Qin

Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 893450459@qq.com

Received: Mar. 27th, 2020; accepted: Apr. 16th, 2020; published: Apr. 23rd, 2020

Abstract

Combing A. Genocchi's definition of the Genocchi numbers in 1852, L. Carlitz's definition of the degenerate Bernoulli numbers in 1956, M. Kaneko's definition of poly-Bernoulli numbers in 1999 and T. Kim *et al.*'s definition of fully degenerate poly-Bernoulli polynomials in 2016, in this paper, we introduce the notion of the fully degenerate poly-Genocchi polynomials, we also investigate their properties and prove five combinatorial identities of them.

Keywords

Genocchi Polynomial, The Fully Degenerate Poly-Genocchi Polynomials

完全退化的Poly-Genocchi多项式

秦　松

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: 893450459@qq.com

收稿日期：2020年3月27日；录用日期：2020年4月16日；发布日期：2020年4月23日

摘　要

结合意大利学者A. Genocchi于1852年关于经典Genocchi数的定义，美国学者L. Carlitz于1956年关于退化Bernoulli数的定义，日本学者M. Kaneko于1999年关于poly-Bernolli数的定义，以及韩国学者T. Kim等人于2016年关于完全退化的poly-Bernoulli多项式的定义，本文给出了完全退化的poly-Genocchi多项式的定义，研究了它们的性质，并得到了关于它们的五个组合恒等式。

文章引用: 秦松. 完全退化的 Poly-Genocchi 多项式[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 345-355.
DOI: 10.12677/pm.2020.104044

关键词

Genocchi多项式，完全退化的Poly-Genocchi多项式

1. 引言

1713 年，瑞士数学家 Jocob Bernoulli 引进了 Bernoulli 数的概念，用以解决 Leibniz 关于自然数的幂和问题[1]。他证明了

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n=\frac{B_{n+1}(m+1)-B_{n+1}}{n+1}.$$

这里 Bernoulli 多项式 $B_n(x)$ 由生成函数

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

所定义，而数 $B_n=B_n(0)$ 称为 Bernoulli 数(见文献[1]定理 2)。1874 年，德国数论学家 E. Kummer 利用 Bernoulli 数给出了非正则素数的定义，并用以解决代数数论中关于分圆域的类数和素数幂次 Fermat 方程的解的问题(见文献[2])。

1755 年，L. Euler 为计算交错幂和引入了 Euler 多项式的定义。他证明了

$$1^n-2^n+3^n+\cdots+(-1)^{(m+1)}m^n=\frac{(-1)^m E_n(m+1)+E_n(0)}{2}.$$

这里 Euler 多项式 $E_n(x)$ 由生成函数

$$\frac{2e^t}{e^t+1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

所定义(见文献[1]定理 2)。1852 年，德国数学家 Scherk 在著作中首次明确了 Euler 数和 Euler 多项式的称谓[3]。按照他的叫法，故 $E_k=2^kE_k\left(\frac{1}{2}\right), k=0,1,2,\cdots$ 被称为 Euler 数。

1852 年，为了研究对称群 S_{2n-1} 中置换的组合性质，意大利数学家 Angelo Genocchi 给出了 Genocchi 数 G_n 的定义：

$$\frac{2t}{e^t+1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

而 k 阶 Genocchi 多项式 $G_n^{(k)}(x)$ 定义为：

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^k e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{1}$$

当 $x=0$ 时，$G_n^{(k)}=G_n^{(k)}(0)$ 为 k 阶 Genocchi 数，当 $k=1$ 时，$G_n^{(1)}(x)=G_n(x)$ 为 Genocchi 多项式[4]。

2019 年，类比 Kummer 在 1874 年的工作，胡甦老师，Min-Soo Kim，沙敏老师以及德国学者 Pieter Moree 在文[5]中给出了 Genocchi 数对应的非正则多项式的定义，并得到了它们与分圆域类数之间的联系。

从数学分析我们知道

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

(见文献[6]的第 74 页)。类比 Bernoulli 数的定义，美国著名数论学家 L. Carlitz [7]在 1956 年提出退化的 Bernoulli 数的定义：

$$\frac{t}{e_{\lambda}(t)-1}=\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda}\frac{t^{n}}{n!}, \tag{2}$$

并得到了相应的 Staudt-Clausen 定理，见文献[8]。

1999 年，日本数论学家 Arakawa 和 Kaneko [9]通过 Mellin 变换给出了一类新的 zeta 函数 $\zeta_k(s,x)$ 的定义：

$$\Gamma(s)\zeta_k(s,x)=\int_0^{\infty}t^{s-1}\frac{Li_k\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t,$$

其中 $Li_k(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m^k}$ 为 k 阶超对数(polylogarithm)函数。他们发现上面所定义的 zeta 函数 $\zeta_k(s,x)$ 在负整数处的特殊值通过 poly-Bernoulli 多项式加以表达，即

$$\zeta_k(-n,x)=(-1)^n B_n^{(k)}(x).$$

这里 poly-Bernoulli 多项式定义为：

$$\frac{Li_k\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{3}$$

并且 $B_n^{(k)}=B_n^{(k)}(0)$ 称为 poly-Bernoulli 数。

2015 年，韩国特殊函数方向的专家 T. Kim 研究了一类退化的 zeta 函数并发现它在复平面上是解析的，并且在负整数处的特殊值即为 Carlitz 的退化 Euler 多项式[10]。随后，他又在 2016 年推导出退化 q-Bernoulli 多项式的系列性质[11] [12]。与此同时，他与俄罗斯学者 D. V. Dolgy 合作，用 p-进~q-积分得出了退化 q-Euler 多项式的对称性[13]。之后，他与 D. S. Kim 等学者合作对退化的 Frobenius-Euler 数和退化的 poly-Bernoulli 数，poly-Bernoulli 多项式进行了研究，将若干经典的性质推广到了退化情形[14] [15]。另外，他们还给出了完全退化的 poly-Bernoulli 多项式的定义：

$$\frac{Li_k\left(1-(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right)}{1-(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{4}$$

并对其性质进行了详细证明[16]。

受经典 Genocchi 多项式的定义(1)，退化的 Bernoulli 数的定义(2)，poly-Bernoulli 多项式的定义(3)以及完全退化的 poly-Bernoulli 多项式的定义(4)的启发，我们通过下面的生成函数给出退化的 Genocchi 多项式 $\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)$ 的定义：

$$\frac{2t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{5}$$

当 $x=0$ 时，$\mathcal{G}_{n,\lambda}(0)=\mathcal{G}_{n,\lambda}$ 被称为退化的 Genocchi 数。注意到，

$$\frac{2t}{e^t+1}e^{xt}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{2t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\lambda\to 0}\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!},$$

故 $G_n(x)=\lim_{\lambda\to 0}\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)$。我们也通过下面的生成函数给出 poly-Genocchi 多项式的定义：

$$\frac{Li_k(1+e^t)}{1+e^t}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{6}$$

当 $x=0$ 时，$G_n^{(k)}=G_n^{(k)}(0)$ 是 poly-Genocchi 数。当 $k=1$ 时，有 $G_n^{(1)}(x)=\frac{1}{2}G_n(x)$，这是因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(1)}(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{1+e^t}e^{xt}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

我们还通过下面的生成函数给出完全退化的 poly-Genocchi 多项式的定义：

$$\frac{Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{7}$$

当 $x=0$ 时，$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}=\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(0)$ 被称为完全退化的 poly-Genocchi 数。注意到，

$$\frac{2t}{e^t+1}e^{xt}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{2t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\lambda\to 0}\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!},$$

故 $G_n^{(k)}(x)=\lim_{\lambda\to 0}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)$。

本文沿着前人的道路研究了上面定义的完全退化的 poly-Genocchi 多项式 $\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)$ 的性质，并得到了关于它们的下面五个组合恒等式。

定理 1 下面等式成立：

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x+y)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{y}{\lambda}\right)_{n-l}\lambda^{n-l}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x),\ (n\geq 0,k\in\mathbb{Z}).$$

特别地，

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{x}{\lambda}\right)_{n-l}\lambda^{n-l}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)},\ (n\geq 0,k\in\mathbb{Z}).$$

定理 2 记 $(j\,|\,\lambda)_n=j(j-\lambda)(j-2\lambda)\cdots(j-(n-1)\lambda)$，有

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}+\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(1)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\frac{(j\,|\,\lambda)_n}{(m+1)^k},\ (n\geq 0,k\in\mathbb{Z}).$$

定理 3 记 $(j\,|\,\lambda)_n=j(j-\lambda)(j-2\lambda)\cdots(j-(n-1)\lambda)$，有

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(j\,|\,\lambda)_n}{(m+1)^k},\ (n\geq 0,k\in\mathbb{Z}).$$

定理 4 记 $(j\mid\lambda)_n = j(j-\lambda)(j-2\lambda)\cdots(j-(n-1)\lambda)$，有

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k-1)} = (1+\lambda n)\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)} + \mathcal{G}_{n+1,\lambda}^{(k)} + \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(\lambda-1\mid\lambda)_{n-m}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)},\quad (n\ge 1, k\in\mathbb{Z}).$$

定理 5 记 $(j\mid\lambda)_n = j(j-\lambda)(j-2\lambda)\cdots(j-(n-1)\lambda)$，有

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(-k)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(j\mid\lambda)_n(m+1)^k,\quad (n\ge 1, k\in\mathbb{Z}).$$

2. 预备知识

2.1. Stirling 序列的定义[5]

第一类 Stirling 数 $S_1(n,l)$ 通过下降阶乘 $(x)_n$ 的展开式中 x 的幂的系数定义：

$$(x)_n = \sum_{l=0}^{n} S_1(n,l)x^l,$$

第二类 Stirling 数 $S_2(n,l)$ 则被定义为：

$$x^n = \sum_{l=0}^{n} S_2(n,l)(x)_l.$$

这里，当 $n\ge 1$ 时，下降阶乘 $(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$，$(x)_0$ 定义为 1。

2.2. 退化的概念[5]

对 $\lambda\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$，退化的指数函数 $e_\lambda^x(t)$ 定义为：

$$e_\lambda^x(t) = (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}(x)_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!},$$

其中 $(x)_{n,\lambda}$ 是退化的下降阶乘，当 $n\ge 1$，$(x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)(x-2\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda), (x)_{0,\lambda} = 1$。

当 $x=1$ 时，

$$e_\lambda(t) = (1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}},$$

注意到，$\lim_{\lambda\to 0+} e_\lambda^x(t) = \lim_{\lambda\to 0+}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xt)^n}{n!} = \mathrm{e}^{xt}$。

2.3. 退化的 Stirling 数，Euler 多项式，Bernoulli 多项式[5]

对 $\lambda\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$，退化的第二类 Stirling 数 $S_{2,\lambda}(n,k)$ 定义为：

$$\frac{1}{k!}(e_\lambda(t)-1) = \sum_{n=k}^{\infty} S_{2,\lambda}(n,k)\frac{t^n}{n!}.$$

注意到，$\lim_{\lambda\to 0} S_{2.\lambda}(n,k) = S_2(n,k), (n,k\ge 0)$。

对 $\lambda\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$，退化的 Euler 多项式 $\mathscr{E}_{n,\lambda}(x)$ 由如下的生成函数给出：

$$\frac{2}{e_\lambda(t)+11}e_\lambda^x(t) = \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{E}_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!},$$

当 $x=0, \mathscr{E}_{n,\lambda}=\mathscr{E}_{n,\lambda}(0)$ 称为退化的 Euler 数。注意到，

$$\frac{2}{\mathrm{e}^{t}+1}\mathrm{e}^{xt}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\lambda\to 0}\beta_{n,\lambda}(x)\frac{t^{n}}{n!},$$

所以有 $E_n(x)=\lim_{\lambda\to 0}\mathscr{E}_{n,\lambda}(x)$。

对 $\lambda\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$，退化的 Bernoulli 多项式 $\beta_{n,\lambda}(x)$ 由如下生成函数给出：

$$\frac{t}{e_{\lambda}(t)-1}e_{\lambda}^{x}(t)=\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda}(x)\frac{t^{n}}{n!},$$

当 $x=0, \beta_{n,\lambda}=\beta_{n,\lambda}(0)$ 称为退化的 Bernoulli 数。注意到，

$$\frac{2}{\mathrm{e}^{t}+1}\mathrm{e}^{xt}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\lambda\to 0}\beta_{n,\lambda}(x)\frac{t^{n}}{n!},$$

所以有 $B_n(x)=\lim_{\lambda\to 0}\beta_{n,\lambda}(x)$。

2.4. 完全退化的 Poly-Bernoulli 多项式[14]

设 $k\in\mathbb{Z}$，完全退化的 poly-Bernoulli 多项式 $\beta_{n,\lambda}^{(k)}$ 的生成函数如下：

$$\frac{Li_k\left(1-(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right)}{1-(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^{n}}{n!},$$

当 $x=0, \beta_{n,\lambda}^{(k)}=\beta_{n,\lambda}^{(k)}(0)$ 称为完全退化的 poly-Bernoulli 数。注意到，

$$\frac{Li_k\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{xt}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{Li_k\left(1-(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right)}{1-(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\lambda\to 0}\beta_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^{n}}{n!},$$

所以有 $B_n^{(k)}(x)=\lim_{\lambda\to 0}\beta_{n,\lambda}^{(k)}(x)$。

3. 关于完全退化的 Poly-Genocchi 数和多项式的组合恒等式

我们需要下面的引理。

引理 对退化的 Genocchi 多项式 $\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)$，我们有

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathcal{G}_{n,\lambda}(1)+\mathcal{G}_{n,\lambda}\right)\frac{t^{n}}{n!}=2t, \mathcal{G}_{n,\lambda}(1)+\mathcal{G}_{n,\lambda}=2\delta_{1,n}\,(n\geq 0), \mathcal{G}_{0,\lambda}=0$，

(2) $\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{n}{l}\mathcal{G}_{n,\lambda}\lambda^{n-l}\left(\frac{x}{\lambda}\right)_{n-l}$。

证明 (1) 根据退化的 Genocchi 多项式 $\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)$ 的定义(5)，当 x 分别取 1 和 0 时有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathcal{G}_{n,\lambda}(1)+\mathcal{G}_{n,\lambda}\right)\frac{t^{n}}{n!}=\frac{2t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+1}(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+\frac{2t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+1}=2t.$$

(2) 根据退化的 Genocchi 多项式 $\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)$ 的定义(5)有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!}&=\frac{2t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}\cdot e^{\frac{x}{\lambda}\ln(1+\lambda t)}\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\lambda^{-k}\frac{\left[\ln(1+\lambda t)\right]^k}{k!}\right)\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty}x^k\lambda^{-k}\sum_{n=k}^{\infty}S_1(n,k)\frac{\lambda^n t^n}{n!}\right]\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\lambda^{n-k}S_1(n,k)\right)\frac{t^n}{n!}\right]\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(\frac{x}{\lambda}\right)_n\frac{t^n}{n!}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\binom{n}{l}\mathcal{G}_{l,\lambda}\lambda^{n-l}\left(\frac{x}{\lambda}\right)_{n-l}\right]\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

这里 $S_1(n,k)$ 是第一类 Stirling 数。 □

定理 1 下面等式成立：

$$
\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x+y)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{y}{\lambda}\right)_{n-l}\lambda^{n-l}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x),\quad (n\ge 0,k\in\mathbb{Z}). \tag{8}
$$

特别地，

$$
\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{x}{\lambda}\right)_{n-l}\lambda^{n-l}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)},\quad (n\ge 0,k\in\mathbb{Z}). \tag{9}
$$

定理 1 的证明 根据完全退化的 poly-Genocchi 多项式 $\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)$ 的定义(7)有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x+y)\frac{t^n}{n!}&=\frac{Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x+y}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}\cdot e^{\frac{y}{\lambda}\ln(1+\lambda t)}\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}y^k\lambda^{-k}\frac{\left[\ln(1+\lambda t)\right]^k}{k!}\right)\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty}y^k\lambda^{-k}\sum_{n=k}^{\infty}S_1(n,k)\frac{\lambda^n t^n}{n!}\right]\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}y^k\lambda^{n-k}S_1(n,k)\right)\frac{t^n}{n!}\right]\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(\frac{y}{\lambda}\right)_n\frac{t^n}{n!}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\binom{n}{l}\mathcal{G}_{l,\lambda}^{(k)}(x)\lambda^{n-l}\left(\frac{y}{\lambda}\right)_{n-l}\right]\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

这里 $S_1(n,k)$ 是第一类 Stirling 数，比较上式两端关于项 t^n 的系数，得到

$$
\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x+y)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{y}{\lambda}\right)_{n-l}\lambda^{n-l}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x).
$$

特别地，当 $y=0$ 时，有

DOI: 10.12677/pm.2020.104044

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}\cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{\lambda}\ln(1+\lambda t)}$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\lambda^{-k}\frac{\left[\ln(1+\lambda t)\right]^k}{k!}\right)$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty}x^k\lambda^{-k}\sum_{n=k}^{\infty}S_1(n,k)\frac{\lambda^n t^n}{n!}\right]$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\lambda^{n-k}S_1(n,k)\right)\frac{t^n}{n!}\right]$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(\frac{x}{\lambda}\right)_n\frac{t^n}{n!}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\binom{n}{l}\mathcal{G}_{l,\lambda}^{(k)}\lambda^{n-l}\left(\frac{x}{\lambda}\right)_{n-l}\right]\frac{t^n}{n!}.$$

比较上式两端关于项t^n的系数即得定理的结论。 □

定理 2 记$(j\,|\,\lambda)_n=j(j-\lambda)(j-2\lambda)\cdots(j-(n-1)\lambda)$，有

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}+\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(1)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\frac{(j\,|\,\lambda)_n}{(m+1)^k},\quad (n\ge 0,k\in\mathbb{Z}). \tag{10}$$

定理 2 的证明 根据完全退化的 poly-Genocchi 多项式$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)$的定义(7)有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}+\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(1)\right]\frac{t^n}{n!}=Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^m}{m^k}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{m+1}}{(m+1)^k}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}\left[\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}(1+\lambda t)^{\frac{j}{\lambda}}\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}\left[\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{j}{\lambda}}{n}\frac{\lambda^n t^n}{n!}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\frac{(j\,|\,\lambda)_n}{(m+1)^k}\right]\frac{t^n}{n!}.$$

比较上式两端关于项t^n的系数即得定理的结论。 □

定理 3 记$(j\,|\,\lambda)_n=j(j-\lambda)(j-2\lambda)\cdots(j-(n-1)\lambda)$，有

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(j\,|\,\lambda)_n}{(m+1)^k},\quad (n\ge 1,k\in\mathbb{Z}). \tag{11}$$

定理 3 的证明 根据完全退化的 poly-Genocchi 多项式$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)$的定义(7)有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}=\frac{Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^m}{(m+1)^k}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(1+\lambda t)^{\frac{j}{\lambda}}\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\sum_{n=0}^{\infty}(j\,|\,\lambda)_n\frac{t^n}{n!}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\frac{(j\,|\,\lambda)_n}{(m+1)^k}\binom{m}{j}\right]\frac{t^n}{n!}.$$

比较上式两端关于项 t^n 的系数即得定理的结论。 □

定理 4 记 $(j\,|\,\lambda)_n=j(j-\lambda)(j-2\lambda)\cdots(j-(n-1)\lambda)$，有

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k-1)}=(1+\lambda n)\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}+\mathcal{G}_{n+1,\lambda}^{(k)}+\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(\lambda-1\,|\,\lambda)_{n-m}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)},\quad(n\geq 0,k\in\mathbb{Z}).\tag{12}$$

定理 4 的证明 根据完全退化的 poly-Genocchi 多项式 $\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)$ 的定义(7)有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)&=\frac{\left[1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^{n-1}}{n^{k-1}}\cdot(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}\\&=\frac{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}Li_{k-1}\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\\&=(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k-1)}\frac{t^n}{n!}\end{aligned}\tag{13}$$

和

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\frac{Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}\right]\\&=(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}\cdot\frac{Li_k\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}+\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}\right)\\&=(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.\end{aligned}\tag{14}$$

比较等式(13)，(14)得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k-1)}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+\frac{\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

进一步化简得：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k-1)}\frac{t^n}{n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+(1+\lambda t)\left[1+(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+(1+\lambda t)\left[1+(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right]\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^m}{m!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+(1+\lambda t)\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^m}{m!}+(1+\lambda t)^{1-\frac{1}{\lambda}}\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^m}{m!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^m}{m!}+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^{m+1}}{m!}+(1+\lambda t)^{1-\frac{1}{\lambda}}\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^m}{m!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^m}{m!}+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^{m+1}}{m!}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda-1|\lambda)_j t^j}{j!}\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^m}{m!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^n}{n!}+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n+1,\lambda}^{(k)}\frac{t^{n+1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(\lambda-1|\lambda)_{n-m}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)}\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

比较上式两端关于项 t^n 的系数，得到

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k-1)}=(1+\lambda n)\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}+\mathcal{G}_{n+1,\lambda}^{(k)}+\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(\lambda-1|\lambda)_{n-m}\mathcal{G}_{m+1,\lambda}^{(k)},$$

此即得定理的结论。 □

定理 5 记 $(j|\lambda)_n=j(j-\lambda)(j-2\lambda)\cdots(j-(n-1)\lambda)$，有

$$\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(-k)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(j|\lambda)_n(m+1)^k,\quad (n\geq 1,k\in\mathbb{Z}). \tag{15}$$

定理 5 的证明 根据完全退化的 poly-Genocchi 多项式 $\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(k)}(x)$ 的定义(7)有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(-k)}\frac{x^n}{n!}&=\frac{Li_{(-k)}\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}=\frac{n^k\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^n}{1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}\\
&=(m+1)^k\sum_{m=0}^{\infty}\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^m.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,\lambda}^{(-k)}\frac{x^n}{n!}\right)\frac{y^n}{k!}&=\sum_{k=0}^{\infty}\left((m+1)^k\sum_{m=0}^{\infty}\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^m\right)\frac{y^n}{k!}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}(m+1)^k\frac{y^n}{k!}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(1+(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^m e^{(m+1)y}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(1+\lambda x)^{\frac{j}{\lambda}}\right]e^{(m+1)y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(j\mid\lambda)_n x^n}{n!}\right)\right]e^{(m+1)y} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}e^{(m+1)y}(j\mid\lambda)_n\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(m+1)^k(j\mid\lambda)_n\right)\frac{x^n}{n!}\frac{y^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

比较上式两端关于项 t^n 的系数即得定理的结论。 □

参考文献

[1] Sun, Z.W. (2002) Introduction to Bernoulli and Euler Polynomials.

[2] Washington, L.C. (1997) Introduction to Cyclotomic Fields. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1934-7

[3] Hu, S., Kim, D. and Kim, M.-S. (2016) On Reciprocity Formula of Apostol-Dedekind Sum with Quasi-Periodic Euler Functions. *Journal of Number Theory*, **162**, 54-67. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2015.10.022

[4] Horadam, A.F. (1991) Applications of Fibonacci Numbers. Springer, Dordrecht, 145-166. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3586-3_18

[5] Hu, S., Kim, M.-S., Moree, P. and Sha, M. (2019) Irregular Primes with Respect to Genocchi Numbers and Artin's Primitive Root Conjecture. *Journal of Number Theory*, **205**, 59-80. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2019.03.012

[6] 菲赫金哥尔茨. 数学分析原理(第二卷) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 74.

[7] Carlitz, L. (1979) Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian Numbers. *Utilitas Mathematica*, **15**, 51-88.

[8] Carlitz, L. (1956) A Degenerate Staudt-Clausen Theorem, Utilitas Math. *Archiv der Mathematik* (*Basel*), **7**, 28-33. https://doi.org/10.1007/BF01900520

[9] Arakawa, T. and Kaneko, M. (1999) Multiple Zeta Values, Poly-Bernoulli Numbers and Related Zeta Functions. *Nagoya Mathematical Journal*, **153**, 189-209. https://doi.org/10.1017/S0027763000006954

[10] Kim, T. (2015) Degenerate Euler Zeta Function. *Russian Journal of Mathematical Physics*, **22**, 469-472. https://doi.org/10.1134/S1061920815040068

[11] Kim, T. (2016) On Degenerate q-Bernoulli Polynomials. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **53**, 1149-1156. https://doi.org/10.4134/BKMS.b150583

[12] Dolgy, D.V., Kim, T. and Seo, J.J. (2016) On the Symmetric Identities of Modified Degenerate Bernoulli Polynomials. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, **19**, 301-308.

[13] Kim, T., Dolgy, D.V., Jang, L.C., *et al*. (2016) Some Identities of Degenerate q-Euler Polynomials under the Symmetry Group of Degree. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **9**, 4707-4712. https://doi.org/10.22436/jnsa.009.06.109

[14] Kim, T., Kim, D.S., Kwon, H.I., *et al*. (2016) Some Identities for Degenerate Frobenius-Euler Numbers Arising from Nonlinear Differential Equations. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **36**, 843-850.

[15] Kim, D.S. and Kim, T. (2015) A Note on Poly-Bernoulli and Higher-Order Poly-Bernoulli Polynomials. *Russian Journal of Mathematical Physics*, **22**, 26-33. https://doi.org/10.1134/S1061920815010057

[16] Kim, T., Kim, D.S. and Seo, J.J. (2016) Fully Degenerate Poly-Bernoulli Numbers and Polynomials. *Open Mathematics*, **14**, 545-555. https://doi.org/10.1515/math-2016-0048