Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 356-361
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104045

Hans汉斯

Ranks of Compact Operator Ideals on Hilbert C^*-Modules

Xin Wang

School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
Email: wangxqd@163.com

Received: Mar. 27th, 2020; accepted: Apr. 16th, 2020; published: Apr. 23rd, 2020

Abstract

Let A be a C^*-algebra and E be a Hilbert C^*-module over A. In this paper, the completely positive rank and homogeneous rank of the compact operator ideal $K(E)$ on E are studied, and it is proved that the ranks of $K(E)$ do not exceed n when the two ranks of A do not exceed n.

Keywords

Hilbert C^*-Module, Compact Operator Ideal, Completely Positive Rank, Homogeneous Rank

Hilbert C^*-模上紧算子理想的秩

王　欣

中国海洋大学数学科学学院，山东 青岛
Email: wangxqd@163.com

收稿日期：2020年3月27日；录用日期：2020年4月16日；发布日期：2020年4月23日

摘　要

设A为C^*-代数，E为A上的Hilbert C^*-模。本文研究了E上紧算子理想$K(E)$的完全正秩与齐次秩，证明了当A的这两种秩不超过n时，$K(E)$的秩亦不超过n。

关键词

Hilbert C^*-模，紧算子理想，完全正秩，齐次秩

文章引用: 王欣. Hilbert C^*-模上紧算子理想的秩[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 356-361.
DOI: 10.12677/pm.2020.104045

1. 引言

Hilbert C^*-模最初是 1953 年 I. Kaplansky [1]在交换单位代数上提出的，在 20 世纪 70 年代，该理论被拓展到非交换 C^*-代数。非交换维数是覆盖维数在非交换 C^*-代数的推广，21 世纪初 W. Winter 提出了完全正秩[2]和齐次秩[3]，有力地推动了 C^*-代数的分类。

在已有理论的基础上，本文研究了 Hilbert C^*-模上紧算子理想的保持完全正秩和齐次秩的条件，证明了当 A 的这两种秩不超过 n 时，$K(E)$ 的秩亦不超过 n。

2. 预备知识

定义 1.1 [2] 设 A 是 C^*-代数，F 是有限维 C^*-代数，对 $\{e_0,\cdots,e_{n+1}\}\subset F$ 如果 e_i 是相互正交的最小投影，则称 $\{e_0,\cdots,e_{n+1}\}$ 是基本集。

定义 1.2 [4] 设 A，B 是 C^*-代数，$\rho: A\to B$ 是线性映射且满足对任意的正元 $a\in A$，$\rho(a)\in B$ 也是正元，则称 ρ 是正线性映射，若对任意的 n，$\rho^{(n)}: M_n(A)\to M_n(B)$，$(a_{i,j})\mapsto(\rho(a_{i,j}))$ 都是正线性映射，则称 ρ 是完全正线性映射，简称完全正映射。

定义 1.3 [2] 设 A 是 C^*-代数，F 是有限维 C^*-代数。对完全正映射 $\varphi: F\to A$，如果 n 是满足对 F 中的任意基本集 $\{e_0,\cdots,e_{n+1}\}$ 都存在 $i,j\in\{0,1,\cdots,n+1\}$ 使得 $\varphi(e_i)\perp\varphi(e_j)$ 的最小整数，则称 φ 的严格阶等于 n。

定义 1.4 [2] 设 A 是 C^*-代数，如果对任意 $a_1,\cdots,a_k\in A$，$\varepsilon>0$，都存在对 $\{a_1,\cdots,a_k\}$ 的关于 ε 的完全正逼近 (F,ψ,φ) 使得 φ 的严格阶不超过 n，则称 A 的完全正秩小于等于 n，记作 $cprA\le n$。如果 n 是使得 $cprA\le n$ 成立的最小整数，则称 $cprA=n$。

定义 1.5 [3] 设 A 是 C^*-代数，$\varphi: F=\oplus_{i=1}^{s}M_{r_i}\to A$ 是完全正映射收缩，$l:\mathbb{C}^s\to F$ 为典范单位嵌入。如果任给 $i\in\{1,\cdots,s\}$，$ord\left(\varphi|_{M_{r_i}}\right)=0$，则称 φ 是分段齐次的，如果 φ 是分段齐次的，且 $ord(\varphi\circ l)=n$，则称 φ 是严格阶为 n 的分段齐次。

定义 1.6 [3] 设 A 是 C^*-代数，如果对任意 $a_1,\cdots,a_k\in A$，$\varepsilon>0$，都存在对 $\{a_1,\cdots,a_k\}$ 的关于 ε 的完全正逼近 (F,ψ,φ)，使得 φ 是严格阶不超过 n 的分段齐次，则称 A 的齐次秩不超过 n，记作 $hrA\le n$。

3. 完全正秩

引理 2.1 设 A 为单的 C^*-代数，H 为可分的 Hilbert 空间，则 $cpr(K(H_A))\le cprA$。

证明：因为 $cpr(M_n(\mathbb{C}))=0$，由[2]命题 2.11，

$$cpr(K(H))\le\underline{\lim}\ cpr(M_n(\mathbb{C}))=0.$$

因为 A 是单的，由[3]定理 3.2.4，

$$cprA=hrA,\quad hr(K(H))=cpr(K(H))=0.$$

由[3]命题 3.1.4，得

$$
\begin{aligned}
cpr\left(K(H)\otimes A\right) &\le hr\left(K(H)\otimes A\right)\\
&\le \left(hr\left(K(H)\right)+1\right)\left(hrA+1\right)-1\\
&=\left(cpr\left(K(H)\right)+1\right)\left(cprA+1\right)-1\\
&=cprA
\end{aligned}.
$$

即

$$cpr\left(K\left(H_A\right)\right)\le cprA.$$

引理 2.2 设 A 为 C^*-代数，令 $\Omega=\{B<A, B\text{为}A\text{的有限生成子代数}\}$。若任给 $B\in\Omega$，都有 $cprB\le n$，则 $cprA\le n$。

证明： 任给有限集 $F\subset A$，$\varepsilon>0$，令 B 为 F 生成的子代数，由 $cprB\le n$，对 $F\subset B$，$\varepsilon>0$，存在对 F 的关于 ε 的完全正逼近 (H,ψ,φ) 使得

$$ord\varphi\le n.$$

对 $\psi:B\to H$，由[5]定理 7.5，存在完全正映射收缩 $\Psi:A\to H$，使得

$$\Psi|_B=\psi,\ \|\Psi\|=\|\psi\|.$$

令 $i_B:B\to A$ 为包含映射，$\Phi=i_B\circ\varphi$。则 (H,Ψ,Φ) 为对 F 的关于 ε 的完全正逼近，并且 $ord\Phi\le n$。

综上所述，$cprA\le n$。

引理 2.3 设 A,F 为 C^*-代数，$a\in A^+$，$\varphi,\varphi':F\to A$ 为完全正映射，且满足任给 $b\in F$，$\varphi'(b)=a\varphi(b)a$。若 $e_1,e_2\in F^+$ 且满足 $\varphi(e_1)\perp\varphi(e_2)$，则 $\varphi'(e_1)\perp\varphi'(e_2)$。

证明： 令 $x=a\varphi(e_1)a^2\varphi(e_2)a^2\varphi(e_2)a^2\varphi(e_1)a$，则 $x\in A^+$。而

$$\sigma(x)\setminus\{0\}=\sigma\left(a^3\varphi(e_1)\varphi(e_2)a^2\varphi(e_2)\varphi(e_1)a^3\right)\setminus\{0\}=\phi,$$

所以 $\sigma(x)=\{0\}$，得

$$\left\|a\varphi(e_1)a^2\varphi(e_2)a\right\|^2=\|x\|=r(x)=0,$$

因此 $a\varphi(e_1)a^2\varphi(e_2)a=0$，即

$$\varphi'(e_1)\perp\varphi'(e_2).$$

定理 2.4 设 A 是 C^*-代数，B 为 A 的遗传子代数，则 $cpr(B)\le cpr(A)$。

证明： 设 $b_1,\cdots,b_k\in B$，存在关于 ε 的完全正逼近 (F,ψ,φ) 使得

$$ord\varphi\le cprA.$$

利用近似单位，可以找到 $b_0\in B^+$，$b_0\le 1$ 使得

$$\text{任给 } i\ge 1,\ \|b_0b_ib_0-b_i\|<\varepsilon.$$

令 $\psi'=\psi|_B$，$\varphi':F\to B$，$b\mapsto b_0\varphi(b)b_0$，则

$$
\begin{aligned}
\left\|b_i-\psi'\circ\varphi'(b_i)\right\| &=\left\|b_i-\psi\left(b_0\varphi(b_i)b_0\right)\right\|\\
&\le\left\|b_i-\psi\circ\varphi(b_i)\right\|+\left\|\psi\left(\varphi(b_i)\right)-b_0\varphi(b_i)b_0\right\|\\
&\le 2\varepsilon
\end{aligned}.
$$

不妨设 $cprA=n<\infty$，则对 F 的每个基本集 $\{e_0,\cdots,e_{n+1}\}$，存在 e_i,e_j 使得

$$\varphi(e_i)\perp\varphi(e_j),$$

由引理 2.3，$\varphi'(e_i)\perp\varphi'(e_j)$。因此

$$ord\varphi'\le cprA.$$

当 $cprA=\infty$ 时，显然有 $ord\varphi'\le cprA$。

定理 2.5 设 A 为单的 C^*-代数，E 为 Hilbert-A 模。若 $cprA\le n$，则 $cpr\left(K\left(E\right)\right)\le n$。

证明： 由引理 2.1，有

$$cpr\left(K\left(H_A\right)\right)=cprA,$$

E 可数生成时，$E\oplus H_A\approx H_A$，所以

$$K\left(E\oplus H_A\right)\cong K\left(H_A\right).$$

因为 $K(E)$ 为 $K\left(E\oplus H_A\right)$ 的遗传子代数，由引理 2.2 得

$$cpr\left(K\left(E\right)\right)\le cpr\left(K\left(E\oplus H_A\right)\right)=cpr\left(K\left(H_A\right)\right)\le n.$$

E 为任意 Hilbert-A 模时：

$K(E)$ 可分时，设 $K(E)=\overline{\{f_n\}_{n=1}^{\infty}}$，由 $K(E)=\overline{F(E)}$，存在 $\{g_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}\subset F(E)$，使得

$$\lim_{m\to\infty}g_{n_m}=f_n,$$

设 $g_{n_m}=\sum_{k=1}^{K_{n,m}}\theta_{x_k,y_k}$，$x_k\in E$，$y_k\in E$。令 E' 为 $\{x_k,y_k:1\le k\le K_{n,m},1\le m\le\infty,1\le n\le\infty\}$ 生成的 Hilbert-A 模。由 $g_{n_m}\in K(E')$，得 $f_n\in K(E')$，所以 $K(E)\subset K(E')$，又有 $K(E')\subset K(E)$，所以 $K(E)=K(E')$。由 E' 为可数生成，得 $cpr\left(K\left(E\right)\right)\le n$。

$K(E)$ 不可分时，$K(E)$ 的所有有限生成子代数可分，所以其完全正秩 $\le n$，由引理 2.2，$cpr\left(K\left(E\right)\right)\le n$。

4. 齐次秩

引理 3.1 设 A 为 C^*-代数，令 $\Omega=\{B<A:B\text{为}A\text{的有限生成子代数}\}$。若任给 $B\in\Omega$，都有 $hrB\le n$，则 $hrA\le n$。

证明： 任给有限集 $F\subset A$，$\varepsilon>0$，令 B 为 F 生成的子代数，由 $hrB\le n$，对 $F\subset B$，$\varepsilon>0$，存在对 F 的关于 ε 的完全正逼近 (H,ψ,φ) 使得

$$ord\varphi\le n.$$

对 $\psi:B\to H$，由[5]定理 7.5，存在完全正映射收缩 $\Psi:A\to H$，使得

$$\Psi|_B=\psi,\ \|\Psi\|=\|\psi\|.$$

令 $i_B:B\to A$ 为包含映射，$\Phi=i_B\circ\varphi$。则 (H,Ψ,Φ) 为对 F 的关于 ε 的分段齐次的完全正逼近，并且 $ord\Phi\le n$。

综上所述，$hrA\le n$。

引理 3.2 设 A，F 为 C^*-代数，$F=\oplus_{i=1}^{s}M_{n_i}(\mathbb{C})$，$a\in A^+$，$\varphi,\varphi':F\to A$ 为完全正映射，且满足 $\forall b\in F$，$\varphi'(b)=a\varphi(b)a$。设 $l:\mathbb{C}^s\to F$ 为典范单位嵌入，若 $e_1,e_2\in\mathbb{C}^s$ 为正元，且满足 $\varphi\circ l(e_1)\perp\varphi\circ l(e_2)$，则 $\varphi'\circ l(e_1)\perp\varphi'\circ l(e_2)$。

证明：令 $x=a\varphi\circ l(e_1)a^2\varphi\circ l(e_2)a^2\varphi\circ l(e_2)a^2\varphi\circ l(e_1)a$，则 $x\in A^+$。而

$$\sigma(x)\setminus\{0\}=\sigma\left(a^3\varphi\circ l(e_1)\varphi\circ l(e_2)a^2\varphi\circ l(e_2)\varphi\circ l(e_1)a^3\right)\setminus\{0\}=\phi,$$

所以 $\sigma(x)=\{0\}$。得

$$\left\|a\varphi\circ l(e_1)a^2\varphi\circ l(e_2)a\right\|^2=\|x\|=r(x)=0,$$

因此 $a\varphi\circ l(e_1)a^2\varphi\circ l(e_2)a=0$，即

$$\varphi'\circ l(e_1)\perp\varphi'\circ l(e_2).$$

定理 3.3 设 A 是 C^*-代数，B 为 A 的遗传子代数，则 $hr(B)\le hr(A)$。

证明：设 $b_1,\cdots,b_k\in B$，存在关于 ε 的完全正逼近 (F,ψ,φ)，$F=\oplus_{i=1}^{s}M_{n_i}(\mathbb{C})$，使得

$$ord\varphi_i=0,\ ord(\varphi\circ l)\le hrA.$$

其中 $\varphi_i=\varphi|_{M_{n_i}(\mathbb{C})}$，$l:\mathbb{C}^s\to F$ 为典范单位嵌入。利用近似单位，可以找到 $b_0\in B^+$，$b_0\le 1$ 使得

$$\text{任给}\ i\ge 1,\ \|b_0b_ib_0-b_i\|<\varepsilon.$$

令 $\psi'=\psi|_B$，$\varphi':F\to B$，$b\mapsto b_0\varphi(b)b_0$，则

$$\begin{aligned}\|b_i-\psi'\circ\varphi'(b_i)\|&=\|b_i-\psi(b_0\varphi(b_i)b_0)\|\\&\le\|b_i-\psi\circ\varphi(b_i)\|+\|\psi(\varphi(b_i))-b_0\varphi(b_i)b_0\|.\\&\le 2\varepsilon\end{aligned}$$

设 $\varphi_i'=\varphi'|_{M_{n_i}(\mathbb{C})}$，则由引理 2.3，$ord\varphi_i'=0$。不妨设 $hrA=n<\infty$，则对 $\mathbb{C}^s$ 的每个基本集 $\{e_0,\cdots,e_{n+1}\}$，存在 e_i,e_j 使得

$$\varphi\circ l(e_i)\perp\varphi\circ l(e_j),$$

由引理 3.2，$\varphi'\circ l(e_i)\perp\varphi'\circ l(e_j)$。因此

$$ord(\varphi'\circ l)\le hrA.$$

当 $hrA=\infty$ 时，显然有 $ord(\varphi'\circ l)\le hrA$。

综上所述，$hrB\le hrA$。

定理 3.4 设 A 为 C^*-代数，E 为 Hilbert-A 模。若 $hrA\le n$，则 $hr(K(E))\le n$。

证明：由[2]命题 3.1.4，有

$$hr(K(H_A))=hr(A\otimes K)\le hrA.$$

E 可数生成时，$E\oplus H_A\approx H_A$，所以

$$K(E\oplus H_A)\cong K(H_A).$$

因为 $K(E)$ 为 $K(E\oplus H_A)$ 的遗传子代数，由引理 3.3 得

$$hr(K(E))\le hr(K(E\oplus H_A))=hr(K(H_A))\le n.$$

E 为任意 Hilbert-A 模时：

$K(E)$ 可分时，设 $K(E)=\overline{\{f_n\}_{n=1}^{\infty}}$，由 $K(E)=\overline{F(E)}$，存在 $\{g_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}\subset F(E)$，使得

$$\lim_{m\to\infty} g_{n_m} = f_n .$$

设 $g_{n_m} = \sum_{k=1}^{K_{n,m}} \theta_{x_k,y_k}$，$x_k \in E$，$y_k \in E$。令 E' 为 $\{x_k, y_k : 1 \le k \le K_{n,m}, 1 \le m \le \infty, 1 \le n \le \infty\}$ 生成的 Hilber-A 模。由 $g_{n_m} \in K(E')$，得 $f_n \in K(E')$。所以 $K(E) \subset K(E')$，又有 $K(E') \subset K(E)$，所以 $K(E) = K(E')$。由 E' 为可数生成，得 $hr(K(E)) \le n$。

$K(E)$ 不可分时，$K(E)$ 的所有有限生成子代数可分，所以其齐次秩 $\le n$，由引理 3.1，$hr(K(E)) \le n$。

参考文献

[1] Kaplansky, I. (1953) Modules over Operator Algebras. *American Journal of Mathematics*, **75**, 839-858. https://doi.org/10.2307/2372552

[2] Winter, W. (2003) Covering Dimension for Nuclear C*-Algebras. *Journal of Functional Analysis*, **199**, 535-556. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(02)00109-X

[3] Winter, W. (2009) Covering Dimension for Nuclear C*-Algebras II. *American Mathematical Society*, **361**, 4143-4167. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-09-04602-9

[4] Lin, H. (2001) An Introduction to the Classification of Amenable C*-Algebras. World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong. https://doi.org/10.1142/4751

[5] Paulsen, V. (2002) Completely Bounded Maps and Operator Algebras. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511546631