Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 414-424
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105051

Exact Controllability of a Class of Fractional Evolution Equations Involving Integral Boundary Conditions

Yong Zhang, He Yang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: *yanghe256@163.com

Received: Apr. 16th, 2020; accepted: May 5th, 2020; published: May 12th, 2020

Abstract

In this paper, by using the Sadovskii fixed point theorem, the exact controllability for a class of fractional evolution equations with nonlocal integral boundary conditions is studied.

Keywords

Fractional Evolution Equations, Exact Controllability, Integral Boundary Condition, Fixed Point Theorem

一类带积分边界条件的分数阶发展方程的精确可控性

张 永，杨 和*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: *yanghe256@163.com

收稿日期：2020年4月16日；录用日期：2020年5月5日；发布日期：2020年5月12日

摘 要

本文运用Sadovskii不动点定理研究了一类带有非局部积分边界条件的分数阶发展方程的精确可控性。

*通讯作者。

文章引用: 张永, 杨和. 一类带积分边界条件的分数阶发展方程的精确可控性[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 414-424.
DOI: 10.12677/pm.2020.105051

关键词

分数阶发展方程，精确可控性，积分边界条件，不动点定理

1. 引言

设 X 是 Banach 空间。考虑 X 中带非局部积分边界条件的非线性分数阶发展方程

$$\begin{cases} {}^{C}D^{q}x(t)=Ax(t)+Bu(t)+f\left(t,x(t)\right),\ t\in I \\ x(0)=H(x) \end{cases} \tag{1}$$

的精确可控性。其中 $I:=[0,a]$，$a>0$ 是常数，${}^{C}D^{q}$ 是 $q(0<q\le 1)$ 阶 Caputo 型分数阶导数；$A:D(A)\subset X\to X$ 是 X 中一致有界的等度连续半群 $\{T(t);t\ge 0\}$ 的无穷小生成元，即 $\exists M\ge 1$，使得对 $t\ge 0$，有 $\|T(t)\|\le M$，控制函数 $u(\cdot)\in L^{2}(I,U)$，U 是 Hilbert 空间，$B:U\to X$ 线性有界算子；$f:I\times X\to X$ 是给定的函数；$H(x)$ 是非局部函数 $H:C(I,X)\to X$，定义如下：

$$H(x)=\int_{0}^{a}g\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $g:I\times X\to X$ 是一个给定的函数。

1993 年，Leela 等[1]在 A 生成紧算子半群时，研究了具有固定脉冲的控制系统的可控性(此处的“控制系统的可控性”就是指控制系统的精确可控性)，后来有许多学者考虑 Banach 空间中微分系统的可控性。但是，文献[2] [3]指出：在无穷维抽象空间中，如果算子半群是紧半群，且控制函数满足某些有界性条件，那么抽象微分方程解的精确可控性的结论只能在有限维空间中成立。因此，近年来，一些学者在非紧半群条件下，运用非紧性测度估计技巧及相应的不动点定理讨论了微分系统或微分包含的精确可控性，参见文献[4] [5] [6]。但是，关于带有积分边界条件的分数阶抽象发展方程的研究比较少[7] [8]，尤其是对由这类方程描述的控制系统的精确可控性的研究结果更为鲜见。

受上述工作的启发，本文在较弱的“紧型”条件和非紧性测度条件下，当 A 生成一致有界的等度连续半群时，运用 Sadovskii 不动点定理讨论了带积分边界条件的分数阶发展系统(1)的精确可控性。需要特别指出的是，本文采用了与现有文献不同的方法证明了分数阶发展方程(1)的精确可控性，即在假设了相应的线性系统是精确可控的条件下，证明了分数阶发展方程(1)的精确可控性，此方法详见文献[6] [9]。

2. 预备知识

设 X 为 Banach 空间，其范数为 $\|\cdot\|$。又设 $C(I,X)$ 为定义于 I 取值于 X 的连续函数之集，按范数

$$\|x\|_{C}=\max_{t\in I}\|x(t)\|$$

构成 Banach 空间，本文记 N 为正整数集。

下列关于分数阶微积分的概念参见文献[10]。

定义 2.1 区间 I 上的函数 f 的 $q>0$ 阶分数阶积分定义为

$$I^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{q-1}}\mathrm{d}s\text{，}\ t>0\text{，}$$

其中$\Gamma(\cdot)$是 Gamma 函数。

定义 2.2 区间 I 上的函数 f 的 $q\in[n-1,n]$ 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数定义为

$$^{L}D^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{q+1-n}}\mathrm{d}s\text{，}\ t>0\text{，}$$

其中 $n=[q]$ 表示大于或者等于 q 的最小整数。

定义 2.3 区间 I 上的函数 f 的 $q\in[n-1,n]$ 阶 Caputo 型分数阶导数定义为

$$^{C}D^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{q+1-n}}\mathrm{d}s=I_t^{n-q}f^{(n)}(t)\text{，}\ t>0\text{，}$$

其中 $n=[q]$。

注 2.1 (I) Riemann-Liouville 型分数阶导数和 Caputo 型分数阶导数有下列关系：

$$^{C}D^q f(t)={}^{L}D^q\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right).$$

(II) 常数的 Caputo 型导数为 0。

(III) 如果 f 是 X 中的抽象函数，则定义 2.1，2.2，2.3 中的积分为 Bochner 意义下的积分。

由文献[11]的引理 3.1 可知，控制系统(1) mild 解的定义如下：

定义 2.4 [11] 如果函数 $x\in C(I,X)$ 满足下列积分方程

$$x(t)=S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_0^t (t-s)^{q-1}T_q(t-s)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\text{，}\ t\in I\text{，}$$

则称 x 是控制系统(1)的 mild 解，其中

$$S_q(t)=\int_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)\mathrm{d}\theta\text{；}$$

$$T_q(t)=q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)\mathrm{d}\theta\text{；}\ \xi_q(\theta)=\frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\varpi_q\left(\theta^{-\frac{1}{q}}\right)\ge 0\text{；}$$

$$\varpi_q(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q)\text{，}\ \theta\in(0,\infty)\text{，}$$

这里 ξ_q 是定义在 $(0,\infty)$ 上的单边概率密度函数，且 $\int_0^\infty \xi_q(\theta)\mathrm{d}\theta=1$，$\theta\in(0,\infty)$。

引理 2.1 [11] 对任意给定的 $t\ge 0$，$S_q(t)$，$T_q(t)$ 是有界线性算子，即对 $\forall x\in X$，有

$$\left\|S_q(t)x\right\|\le M\|x\|\text{，}\ \left\|T_q(t)x\right\|\le\frac{qM}{\Gamma(1+q)}\|x\|\text{，}$$

其中 $\|T(t)\|\le M$，$\forall t\ge 0$。

下面给出精确可控的概念及相关结论：

定义 2.5 [6] [9] (精确可控性) 若对任一给定的 $x_a\in X$，存在控制函数 $u(\cdot)\in L^2(I,U)$，使得系统(1)的 mild 解 x 满足

$$x(a)=x_a\text{，}$$

则称控制系统(1)在区间 I 上是精确可控的。

首先考虑相应的分数阶线性微分方程

$$\begin{cases} {}^{C}D^{q}x(t)=Ax(t)+Bu(t),\ t\in I \\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{2}$$

定义方程(2)的控制算子如下：

$$\Gamma_0^a=\int_0^a (a-s)^{q-1}T_q(a-s)BB^*T_q^*(a-s)\mathrm{d}s,$$

其中 B^*，$T_q^*(t)$ 分别是 B，$T_q(t)$ 的共轭算子。显然 Γ_0^a 是线性算子。

设 $x_a(x_0;u)$ 为系统(2)相应于控制函数 u 和初值 x_0 在右端点 $t=a$ 处的状态值，记

$$\Re(a,x_0):=\left\{x_a(x_0;u)\middle|u\in L^2(I,U)\right\},$$

称 $\Re(a,x_0)$ 为系统(2)的可达集。

引理 2.2 [9] 若

$$\Re(a,x_0)=X,$$

则称线性系统(2)在区间 I 上精确可控。换而言之，如果对给定的终状态值 $x_a\in X$，存在控制函数 $u\in L^2(I,U)$，使得线性系统(2)的 mild 解 x 满足

$$x(a)=x_a,$$

则称系统(2)在区间 I 上精确可控。

引理 2.3 [9] 若线性方程(2)精确可控，则 $\left(\Gamma_0^a\right)^{-1}$ 存在，且存在 $\gamma>0$，使得

$$\left\langle \Gamma_0^a x,x\right\rangle\ge\gamma\|x\|^2,\ \ \forall x\in X.$$

引理 2.3 蕴含了 $\left\|\left(\Gamma_0^a\right)^{-1}\right\|\le\dfrac{1}{\gamma}$。

下面我们给出一些关于非紧性测度的概念和结论，这些结论将在后续证明中用到。设 X 是 Banach 空间，$D\subset X$ 是非空有界集。令

$$\beta(D)=\inf\left\{\mu>0\middle|D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i,d(D_i)\le\mu\right\},$$

其中 $d(D_i)$ 表示 D_i 的直径，则称 $\beta(D)$ 为 X 中 D 的 Kuratowski 非紧性测度。显然，

$$0\le\beta(D)<+\infty,$$

$\beta_C(D)$ 表示 $C(I,X)$ 中 D 的 Kuratowski 非紧性测度。

引理 2.4 [12] 设 X 为 Banach 空间，$D_1,D_2\subset X$ 非空有界集，则有

(i) $\beta(D_1)=0$ 当且仅当 D_1 是相对紧集；

(ii) 若 $D_1\subset D_2$，则 $\beta(D_1)\le\beta(D_2)$；

(iii) $\beta(D_1+D_2)\le\beta(D_1)+\beta(D_2)$。

引理 2.5 [13] 设 X 为 Banach 空间，若 $D\subset C(I,X)$ 为有界且等度连续集，则 $\beta(D(t))$ 在 I 上连续，且

$$\beta_C(D)=\max_{t\in I}\beta(D(t))=\beta(D(I)).$$

引理 2.6 [14] 设 X 为 Banach 空间，$D=\{x_n\}\subset C(I,X)$ 为可列集，若存在 $\phi\in L^1(I)$，使得 $\|x_n(t)\|\le\phi(t)$，$a.e.t\in I$，$n=1,2,\cdots$，则 $\beta(D(t))$ 在 I 上 Lebesgae 可积，且

$$\beta\left(\left\{\int_I x_n(t)\mathrm{d}t \middle| n\in N\right\}\right)\le 2\int_I \beta(D(t))\mathrm{d}t .$$

引理 2.7 [15] 设 X 是 Banach 空间，$D\subset X$ 有界，则存在可列集 $D_0\subset D$，使得

$$\beta(D)\le 2\beta(D_0).$$

定义 2.6 [16] 设 X 是 Banach 空间，$A:D(A)\subset X\to X$ 连续，如果对任意 $S\subset X$ 有界集，满足下列不等式

$$\beta(A(S))<\beta(S),$$

则称 A 是凝聚映射。

引理 2.8 [16] (Sadovskii 定理) 设 X 为 Banach 空间，$D\subset X$ 为有界凸闭集，$A:D\to D$ 为凝聚映射，则 A 在 D 中至少有一个不动点。

为了证明主要结论，我们给出下列假设条件：

(H_1) 线性方程(2)在区间 I 上精确可控。

(H_2) $g:I\times X\to X$ 是连续函数，对 $\forall t\in I$，$x,y\in X$，$\exists L_1>0$，使得

$$\|g(t,x)-g(t,y)\|\le L_1\|x-y\|.$$

(H_3) $f:I\times X\to X$ 是连续函数，$\exists\psi\in C(I,R^+)$，使得

$$\|f(t,x)\|\le\psi(t)\|x\|,\ \forall x\in X,\ t\in I.$$

(H_4) 对 $\forall\eta\in(0,t)$，$t\in I$，$\delta>0$，集合

$$W_{\eta,\delta}(t)=\left\{(F_{2,\eta,\delta}x)(t)\middle|x\in D\right\}$$

在 X 中相对紧，其中 $D\subset X$ 为任意有界集，

$$(F_{2,\eta,\delta})(t)=\int_0^{t-\eta}\int_\delta^\infty (t-s)^{q-1}\theta\xi_q(\theta)qT\left((t-s)^q\theta\right)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s .$$

3. 主要结果及其证明

对 $\forall k>0$，取 $C(I,X)$ 中非空有界闭凸集

$$\Omega_k=\left\{x\in C(I,X)\middle|\|x\|_C\le k\right\}.$$

根据假设条件，对 $\forall x_a\in X$，定义控制函数如下：

$$u(t)=B^*T_q^*(a-t)\left(\Gamma_0^a\right)^{-1}P(x), \tag{3}$$

其中

$$\Gamma_0^a=\int_0^a(a-s)^{q-1}T_q(a-s)BB^*T_q^*(a-s)\mathrm{d}s ,$$

$$P(x)=x_a-S_q(a)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s-\int_0^a(a-s)^{q-1}T_q(a-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s .$$

引理 3.1 对 $\forall\gamma>0$ 及 $\forall x\in\Omega_k$，有

$$\|u(t)\|\le\frac{qMM_B}{\gamma\Gamma(1+q)}\left[\|x_a\|+aMkL_1+aM\sup_{t\in I}\|g(t,0)\|+\frac{a^qMk}{\Gamma(1+q)}\|\psi\|_C\right],$$

其中 $M_B = \|B\|$。

证明：利用引理 2.1，引理 2.3，以及假设条件(H_2)，(H_3)，通过直接计算即可得所求结论，因此我们在此省略细节。

如果 $x(t;u)$ 是控制系统(1)相应于控制函数 u 的 mild 解。则由定义 2.4 可知，

$$x(t;u) = S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s)\left[f(s,x(s)) + Bu(s)\right]\mathrm{d}s,\quad t \in I.$$

当 $t = a$ 时，由(3)式，有

$$\begin{aligned}
x(a) &= x(a;u) \\
&= S_q(a)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s + \int_0^a (a-s)^{q-1} T_q(a-s)\left[f(s,x(s)) + Bu(s)\right]\mathrm{d}s \\
&= S_q(a)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s + \int_0^a (a-s)^{q-1} T_q(a-s) f(s,x(s))\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^a (a-s)^{q-1} T_q(a-s) Bu(s)\mathrm{d}s \\
&= S_q(a)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s + \int_0^a (a-s)^{q-1} T_q(a-s) f(s,x(s))\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^a (a-s)^{q-1} T_q(a-s) BB^* T_q^*(a-s)\left(\Gamma_0^a\right)^{-1} P(x)\mathrm{d}s \\
&= x_a
\end{aligned}$$

故控制系统(1)在 I 上精确可控。

因此，要证明控制系统(1)精确可控，只需证明控制系统(1)存在相应于控制函数 u 的 mild 解。接下来，我们根据假设条件，运用 Sadovskii 不动点定理证明控制系统(1) mild 解的存在性。

定理 3.1 设条件(H_1)~(H_4)满足。如果不等式

$$\left(1 + \frac{q a^q M^2 M_B^2}{\gamma\left(\Gamma(1+q)\right)^2}\right)\left(aML_1 + \frac{a^q M}{\Gamma(1+q)}\|\psi\|_C\right) < 1 \tag{4}$$

成立，则方程(1)在区间 I 上精确可控。

证明：定义算子 $F: C(I,X) \to C(I,X)$，如下：

$$(Fx)(t) = S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s)\left[f(s,x(s)) + Bu(s)\right]\mathrm{d}s.$$

要证明方程(1)在区间 I 上精确可控，只需要利用上面控制函数证明算子 F 有不动点。

首先证明：存在 $k > 0$，使得 $F(\Omega_k) \subset \Omega_k$。反设不真，则对 $\forall k \ge 0$，存在 $x \in \Omega_k$，使得对 $t \in I$，有 $\|(Fx)(t)\| > k$。由假设条件(H_2)，(H_3)及引理 2.1，引理 2.3，引理 3.1 可知，对 $\forall t \in I$，有

$$\begin{aligned}
k &< \|(Fx)(t)\| \\
&= \left\| S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s) f(s,x(s))\mathrm{d}s \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s) Bu(s)\mathrm{d}s \right\| \\
&\le \left\| S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s \right\| + \left\| \int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s) f(s,x(s))\mathrm{d}s \right\| \\
&\quad + \left\| \int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s) Bu(s)\mathrm{d}s \right\|
\end{aligned}$$

$$\le aML_l k + aM\sup_{t\in I}\|g(t,0)\| + \frac{a^q Mk}{\Gamma(1+q)}\|\psi\|_C + \frac{a^q M_B M}{\Gamma(1+q)}\|u(t)\|$$

$$\le \left(1+\frac{qa^q M^2 M_B^2}{\gamma(\Gamma(1+q))^2}\right)\left(aMkL_1 + aM\sup_{t\in I}\|g(t,0)\| + \frac{a^q Mk}{\Gamma(1+q)}\|\psi\|_C\right)$$

$$+\frac{qa^q M^2 M_B^2}{\gamma(\Gamma(1+q))^2}\|x_a\|$$

两边同除以 k 并且当 $k\to\infty$ 时取极限可得，

$$1\le\left(1+\frac{qa^q M^2 M_B^2}{\gamma(\Gamma(1+q))^2}\right)\left(aML_1+\frac{a^q M}{\Gamma(1+q)}\|\psi\|_C\right),$$

这与(4)式矛盾，因此存在 $k>0$，使得 $\|Fx\|_C=\max_{t\in I}\|(Fx)(t)\|\le k$。故 $F(\Omega_k)\subset\Omega_k$。

接下来，在 Ω_k 上定义算子

$$(F_1x)(t)=S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s$$

和

$$(F_2x)(t)=\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s,$$

则对 $\forall x\in\Omega_k$，$(Fx)(t)=(F_1x)(t)+(F_2x)(t)$，$t\in I$。

先证明 $F_1:\Omega_k\to C(I,X)$ 是压缩映射。因为对 $\forall x,y\in\Omega_k$，结合条件(H_2)可知，

$$\begin{aligned}&\|(F_1x)(t)-(F_1y)(t)\|\\&=\left\|S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s-S_q(t)\int_0^a g(s,y(s))\mathrm{d}s\right\|.\\&\le aML_1\|x-y\|_C\end{aligned}$$

由(4)式知，$aML_1<1$。所以，F_1 在 Ω_k 上是压缩映射。

再证明 F_2 在 Ω_k 上是全连续映射。因为 F_2 显然是连续算子，所以仅需证明 $F_2(\Omega_k)$ 是相对紧集。对 $\forall x\in\Omega_k$，定义 $W=\{F_2x|x\in\Omega_k\}$ 和 $W(t)=\{(F_2x)(t)|x\in\Omega_k\}$。根据 Ascoli-Arela 定理，只需证明集合 W 在 $C(I,X)$ 中等度连续，$W(t)$ 在 X 中相对紧。首先证明集合 W 等度连续。对 $\forall t_1,t_2\in I$，满足 $0\le t_1<t_2\le a$ 及 $\forall x\in\Omega_k$，有

$$\begin{aligned}&\|(F_2x)(t_2)-(F_2x)(t_1)\|\\&=\Big\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\\&\quad-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}T_q(t_1-s)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\Big\|\\&\le\left\|\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right]T_q(t_2-s)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\quad+\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right]\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\quad+\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\right\|\\&\triangleq J_1+J_2+J_3\end{aligned}$$

其中

$$J_1=\left\|\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right]T_q(t_2-s)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\right\|;$$

$$J_2=\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right]\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\right\|;$$

$$J_3=\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\right\|.$$

因为

$$J_1\le\frac{M}{\Gamma(1+q)}\left[k\|\psi\|_C+M_B\|u(t)\|\right]\left[\left(t_2^q-t_1^q\right)-(t_2-t_1)^q\right],$$

$$J_3\le\frac{M}{\Gamma(1+q)}\left[k\|\psi\|_C+M_B\|u(t)\|\right](t_2-t_1)^q.$$

又对 $\forall 0<\varepsilon<t_1$，有

$$\begin{aligned}J_2\le&\sup_{s\in[0,t_1-\varepsilon]}\left\|T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right\|\left\|\int_0^{t_1-\varepsilon}(t_1-s)^{q-1}\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\right\|\\&+\left\|\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right]\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\right\|\\\le&\frac{1}{q}\left[k\|\psi\|_C+M_B\|u(t)\|\right]\left(t_1^q-\varepsilon^q\right)\sup_{s\in[0,t_1-\varepsilon]}\left\|T_q(t_2-s)-T_q(t_1-s)\right\|\\&+\frac{2M}{\Gamma(1+q)}\left[k\|\psi\|_C+M_B\|u(t)\|\right]\varepsilon^q\end{aligned}.$$

所以，当 $t_2-t_1\to0,\varepsilon\to0$ 时，$J_1,J_2,J_3\to0$。所以集合 W 等度连续。

再证明对 $\forall t\in[0,a]$，集合 $W(t)=\left\{(F_2x)(t)\middle|x(\cdot)\in\Omega_k\right\}$ 在 X 中相对紧。显然当 $t=0$ 时，$W(0)=\{0\}$ 在 X 中相对紧，因此只需考虑 $t\in(0,a]$。对 $\forall 0<\eta<t$，$\delta>0$ 定义

$$W_{\eta,\delta}(t)=\left\{(F_{2,\eta,\delta}x)(t)\middle|x(\cdot)\in\Omega_k\right\},$$

其中

$$(F_{2,\eta,\delta})(t)=\int_0^{t-\eta}\int_\delta^\infty(t-s)^{q-1}\theta\xi_q(\theta)qT\left((t-s)^q\theta\right)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s.$$

由条件(H_4)可知，集合 $W_{\eta,\delta}(t)$ 在 X 中相对紧。又因为

$$\begin{aligned}&\left\|(F_2x)(t)-(F_{2,\eta,\delta}x)(t)\right\|\\&\le q\left\|\int_0^t\int_0^\delta(t-s)^{q-1}\theta\xi_q(\theta)T\left((t-s)^q\theta\right)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right\|\\&+q\left\|\int_{t-\eta}^t\int_\delta^\infty(t-s)^{q-1}\theta\xi_q(\theta)T\left((t-s)^q\theta\right)\left[f(s,x(s))+Bu(s)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right\|\\&\le\left(k\|\psi\|_C+M_B\|u(t)\|\right)Mt^q\int_0^\delta\theta\xi_q(\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{M}{\Gamma(1+q)}\left(k\|\psi\|_C+M_B\|u(t)\|\right)\eta^q\\&\to0,\ \left(\eta\to0^+,\delta\to0^+\right)\end{aligned}.$$

所以，当 $t\in(0,a]$ 时，存在一个相对紧集 $W_{\eta,\delta}(t)$ 任意接近于 $W(t)$，故集合 $W(t)$ 在 X 中相对紧。综上所述，对 $\forall t\in I$，集合 $W(t)$ 在 X 中相对紧。因此，由 Ascoli-Arela 定理可知，$F_2(\Omega_k)$ 是相对紧集。由

引理 2.4 的(i)知，$\beta\left(F_2\left(\Omega_k\right)\right)=0$。又因为 F_1 是压缩的，则 $\beta\left(F_1\left(\Omega_k\right)\right)<\beta\left(\Omega_k\right)$，故由引理 2.4 的(iii)，有

$$\beta\left(F\left(\Omega_k\right)\right)\le\beta\left(F_1\left(\Omega_k\right)\right)+\beta\left(F_2\left(\Omega_k\right)\right)<\beta\left(\Omega_k\right).$$

所以，由定义 2.6 知，F 是凝聚映射。由 Sadovskii 不动点定理(见引理 2.8)可知，算子 F 在 Ω_k 上有不动点 $x\in C(I,X)$。该不动点即为系统(1)的 mild 解且满足 $x(a)=x_a$。故系统(1)在 I 上精确可控。证毕。

因为条件(H4)在应用中不易验证，所以我们假设 $f(t,x)$ 满足如下应用比较广泛的非紧性测度条件：

(H5) 对 $\forall t\in I$，$D\subset X$ 为非空有界集，存在常数 $L_2>0$，使得

$$\beta\left(f(t,D)\right)\le L_2\beta(D).$$

则可得系统(1)的如下可控性结果：

定理 3.2 设条件(H1)~(H3)及条件(H5)满足。如果不等式条件(4)及

$$M^*:=\left(1+\frac{2qa^qM^2M_B^2}{\gamma\left(\Gamma(1+q)\right)^2}\right)\left(aML_1+\frac{a^qML_2}{\Gamma(1+q)}\right)<\frac{1}{4}\tag{5}$$

成立，则系统(1)在区间 I 上精确可控。

证明：由定理 3.1 的证明可知，存在 $k>0$，使得 $F\left(\Omega_k\right)\subset\Omega_k$。下面利用条件(H5)证明算子 $F:\Omega_k\to\Omega_k$ 是凝聚映射。由引理 2.7，取 $\Omega_k'=\left\{x_n\,|\,n\in N\right\}\subset\Omega_k$，使得

$$\beta\left(\Omega_k\right)\le2\beta\left(\Omega_k'\right).\tag{6}$$

由非紧性测度的性质及假设条件(H2)可知，

$$\beta\left(g(t,D)\right)\le L_1\beta(D)$$

其中 $D\subset X$ 为非空有界集。

对 $\forall x_a\in X$，因为

$$u_n(t)=B^*T_q^*(a-t)\left(\Gamma_0^a\right)^{-1}P\left(x_n\right),$$

其中

$$\Gamma_0^a=\int_0^a(a-s)^{q-1}T_q(a-s)BB^*T_q^*(a-s)\mathrm{d}s$$

$$P\left(x_n\right)=x_a-S_q(a)\int_0^a g\left(s,x_n(s)\right)\mathrm{d}s-\int_0^a(a-s)^{q-1}T_q(a-s)f\left(s,x_n(s)\right)\mathrm{d}s.$$

所以，对 $\forall\gamma>0$，有

$$\begin{aligned}\beta\left(\left\{u_n(t):n\in N\right\}\right)&\le\frac{qMM_B}{\gamma\Gamma(1+q)}\beta\left(\left\{P\left(x_n\right):n\in N\right\}\right)\\&\le\frac{qMM_B}{\gamma\Gamma(1+q)}\left(2aML_1+\frac{2a^qML_2}{\Gamma(1+q)}\right)\beta_C\left(\Omega_k\right)\end{aligned}.$$

由条件(H5)及引理 2.6，对 $\forall x\in\Omega_k'$，有

$$\begin{aligned}&\beta\left(F\left(\Omega_k'\right)(t)\right)\\&=\beta\left(\left\{S_q(t)\int_0^a g\left(s,x_n(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)\left[f\left(s,x_n(s)\right)+Bu_n(s)\right]\mathrm{d}s\,\middle|\,n\in N\right\}\right)\\&\le\beta\left(\left\{S_q(t)\int_0^a g\left(s,x_n(s)\right)\mathrm{d}s\right\}\right)+\beta\left(\left\{\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)f\left(s,x_n(s)\right)\mathrm{d}s\right\}\right)\\&\quad+\beta\left(\left\{\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)Bu_n(s)\mathrm{d}s\right\}\right)\end{aligned}$$

$$\le 2ML_1\int_0^a \beta\left(\Omega_k'(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{2qML_2}{\Gamma(1+q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\beta\left(\Omega_k'(s)\right)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{qMM_B}{\gamma\Gamma(1+q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\beta\left(\left\{u_n(s):n\in N\right\}\right)\mathrm{d}s \qquad .$$

$$\le\left(1+\frac{2qa^qM^2M_B^2}{\gamma\left(\Gamma(1+q)\right)^2}\right)\left(2aML_1+\frac{2a^qML_2}{\Gamma(1+q)}\right)\beta_C\left(\Omega_k\right)$$

所以，由(6)式和引理 2.5 可得

$$\beta_C\left(F\left(\Omega_k\right)\right)\le 2\beta_C\left(F\left(\Omega_k'\right)\right)=2\max_{t\in I}\beta\left(F\left(\Omega_k'\right)(t)\right)\le 4M^*\beta_C\left(\Omega_k\right).$$

因此，由(5)式可知，$4M^*<1$。所以，由定义 2.6 知，算子 F 是凝聚映射。由 Sadovskii 不动点定理可知，算子 F 在 Ω_k 上有不动点 $x\in C(I,X)$。该不动点即为系统(1)的 mild 解且满足 $x(a)=x_a$。故系统(1)在 I 上精确可控。证毕。

注 3.1 定理 3.1 和定理 3.2 都只要求 $A:D(A)\subset X\to X$ 生成的半群 $T(t)(t\ge 0)$ 是等度连续半群，没有假设半群的紧性。因此，我们对非线性项附加了“紧型”条件(H_4)或者非紧性测度条件(H_5)来保证解算子的紧性。进而利用凝聚映射的不动点定理证明了控制系统(1)的 mild 解的存在性。

注 3.2 如果非线性项是有界函数，或者满足一次增长条件，即 $f(t,x)\le C_1x+C_2$，其中 $C_1,C_2>0$ 是常数，则条件(H_3)自然成立。

例 考虑下列分数阶偏微分系统

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\frac{1}{2}}x(t,\omega)=\dfrac{\partial x(t,\omega)}{\partial\omega}+b(\omega)u(t)+f\left(t,x(t,\omega)\right),\ \omega\in[0,\pi],\ t\in[0,1] \\ x(t,0)=x(t,\pi)=0,\ t\in[0,1] \\ x(0,\omega)=\int_0^1 g\left(s,x(s,\omega)\right)\mathrm{d}s,\ \omega\in[0,\pi] \end{cases} \tag{7}$$

其中 ${}^{C}D^{\frac{1}{2}}$ 是 $q=\dfrac{1}{2}$ 阶 Caputo 型分数阶导数，$I:=[0,1]$，$b(\omega)$ 为有恰当定义的函数。

取状态空间 $X=L^2([0,\pi])$，$U=X$。设 $x(t)(\cdot):=x(t,\cdot)$，$f(t,x(t))(\cdot):=f(t,x(t,\cdot))$，$g(t,x(t))(\cdot):=g(t,x(t,\cdot))$。作 X 中的算子 A 和 B：

$$Ax=\frac{\partial x(t,\omega)}{\partial\omega},\quad D(A)=\left\{x\in X\,\middle|\,x'\in X,x(0)=x(1)=0\right\},\quad Bu=b(\cdot)u$$

则系统(7)可化为形如问题(1)的分数阶发展方程控制系统。由文献[6]，A 生成 X 中的等度连续半群 $T(t)(t\ge 0)$。

若系统(7)满足条件(H_1)~(H_4)，则按照定理 3.1，系统(7)在区间 I 上精确可控。

参考文献

[1] Leela, S., Merae, F. and Sivasundaram, S. (1993) Controllbaility of Impulsive Differential Equations. *The Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **177**, 24-30. https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1240

[2] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[3] Hernández, E. and O'Regan, D. (2009) Controllability of Volterra-Fredholm Type Systems in Banach Spaces. *Journal of the Franklin Institute*, **346**, 95-101. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2008.08.001

[4] Ji, S.C., Li, G. and Wang, M. (2011) Controllability of Impulsive Differential Systems with Nonlocal Conditions. *Ap-*

plied Mathematics and Computation, **217**, 6981-6989. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.107

[5] Liang, J. and Yang, H. (2015) Controllability of Fractional Integro-Differential Evolution Equations with Nonlocal Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **254**, 20-29. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.145

[6] Yang, H., Agarwal, R.P. and Liang, Y. (2017) Controllability for A Class of Integro-Differential Evolution Equations Involving Non-Local Initial Conditions. *International Journal of Control*, **90**, 2567-2574. https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1260161

[7] Chen, P.Y., Zhang, X.P. and Li, Y.X. (2017) Approximation Technique for Fractional Evolution Equations with Nonlocal Integral Conditions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, 226. https://doi.org/10.1007/s00009-017-1029-0

[8] 张立新. 一类含积分边界条件的分数阶微分方程的正解的存在性[J]. 应用数学学报, 2015, 38(3): 421-433.

[9] Mahmudov, N. and Denker, A. (2000) On Controllability of Linear Stochastic Systems. *International Journal of Control*, **73**, 144-151. https://doi.org/10.1080/002071700219849

[10] Kilbas, A., Srivastava, H. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Application of Fractional Differential Equation. Elsevier Science, Amsterdam.

[11] Zhou, Y. and Jiao, F. (2010) Existence of Mild Solutions for Fractional Neutral Evolution Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 1063-1077. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.026

[12] Banas, J. and Goebel, K. (1980) Measures of Noncompactness in Banach Spaces. Marcel Dekker, New York.

[13] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 第 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2002.

[14] Heinz, H.P. (1983) On the Behaviour of Measures of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector-Valued Functions. *Nonlinear Analysis*, **7**, 1351-1371. https://doi.org/10.1016/0362-546X(83)90006-8

[15] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题解的存在性[J]. 数学学报, 2005, 48(6): 1089-1094.

[16] Sadovskii, B.N. (1967) A Fixed-Point Principle. *Functional Analysis and Its Applications*, **1**, 151-153. https://doi.org/10.1007/BF01076087