Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 448-457
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105054

The Construction and Related Properties of Two Kinds of Virasoro Algebras

Wenwen Ma, Lixia Ye*

Department of Mathematics, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang
Email: *yelixia@sina.com

Received: Apr. 17th, 2020; accepted: May 7th, 2020; published: May 14th, 2020

Abstract

In this paper, we generalize the Virasoro Algebra of rank 8 constructed by Yu Demin *et al*. in 2013 from two aspects. Two kinds of Virasoro Algebras are constructed by redefining the Lie operation and extending the rank to 2*n*. Their automorphism groups, centers, ideals and subalgebras are also studied, respectively.

Keywords

Virasoro Algebra, Automorphism Group, Ideal, Subalgebra

两类Virasoro代数的构造和相关性质

马雯雯，叶丽霞*

浙江外国语学院数学系，浙江 杭州
Email: *yelixia@sina.com

收稿日期：2020年4月17日；录用日期：2020年5月7日；发布日期：2020年5月14日

摘 要

本文从两个方面推广了余德民等人在2013年构造的秩为8的Virasoro代数。通过重新定义李运算和将秩推广至2*n*，分别构造了两类新的Virasoro代数，并分别研究了它们的自同构群、中心、理想、子代数等相关性质。

*通讯作者。

文章引用: 马雯雯, 叶丽霞. 两类 Virasoro 代数的构造和相关性质[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 448-457.
DOI: 10.12677/pm.2020.105054

关键词

Virasoro代数，自同构群，理想，子代数

1. 引言

Virasoro 代数是一类复数域上重要的无限维李代数，其表示理论在共形场论和弦论中有十分重要的应用，其研究方法和结果也促进了大量与之相关的无限维分次李代数的研究，其中对李代数进行形变与推广是产生新代数的一种重要手段。文献[1]定义了 Virasoro-like 李代数 g_4。文献[2]-[8]对 g_4 进行推广，分别得到了一些相关的 Virasoro 李代数。余德民等人在文献[7]中构造了一类秩为 8 的 Virasoro 代数，并对其相关性质进行研究。本文将文献[7]从两方面进行推广。一是重新定义李运算构造秩为 8 的 Virasoro 代数，二是将其推广至秩为 $2n$ 的情形，并分别研究两类代数的自同构群及其子群、子代数、单性等相关性质。

2. 秩为 8 的 Virasoro 代数

设 $V=\bigoplus_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)\in Z^8} CL_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)}$ 为复数域 C 上的一个线性空间，$L_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)}\left(a_i\in Z,i=1,2,3,4,5,6,7,8\right)$，在线性空间 V 上定义李运算如下：

$$
\begin{aligned}
&\left[L_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)},L_{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8)}\right]\\
&=\left[a_8\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)-b_8\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\right)\right]\\
&\times L_{(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4,a_5+b_5,a_6+b_6,a_7+b_7,a_8+b_8)}
\end{aligned}
$$

在基上进行双线性扩张，易验证李运算满足反对称性和雅克比恒等式，故线性空间 V 关于这个李运算构成一个新的 Virasoro 代数。

定理 2.1 令 $P=\left\{f\mid f\left(L_\alpha\right)=L\left(a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3},a_{i_4},a_{i_5},a_{i_6},a_{i_7},a_8\right)\right\}$，其中 $\alpha=\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\right)\in Z^8$，$i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7$ 为 $1,2,3,4,5,6,7$ 的一个排列。在 P 上定义映射乘法 $\forall f_i,f_j\in P$，$f_i\circ f_j\left(L_\alpha\right)=f_i\left(f_j\left(L_\alpha\right)\right)$，则集合 P 关于映射乘法构成一个代数，且与 S_7 同构。

证明 构造 P 到 S_7 的同构映射 $\delta:f\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\ i_1&i_2&i_3&i_4&i_5&i_6&i_7\end{pmatrix}$，易得定理成立。

对 $\forall L_\alpha\in V$，定义以下变换：

$$
f_1\left(L_\alpha\right)=L_\alpha,\quad f_2\left(L_\alpha\right)=L_{(a_1,a_2,a_5,a_6,a_3,a_4,a_7,a_8)},\quad f_3\left(L_\alpha\right)=L_{(a_3,a_4,a_1,a_2,a_5,a_6,a_7,a_8)},
$$

$$
f_4\left(L_\alpha\right)=L_{(a_3,a_4,a_5,a_6,a_1,a_2,a_7,a_8)},\quad f_5\left(L_\alpha\right)=L_{(a_5,a_6,a_3,a_4,a_1,a_2,a_7,a_8)},\quad f_6\left(L_\alpha\right)=L_{(a_5,a_6,a_1,a_2,a_3,a_4,a_7,a_8)},
$$

并将 f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6 在 V 的基向量上进行线性扩张。

定理 2.2 映射 f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6 是 V 的自同构。

证明 令 $\alpha=\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\right)\in Z^8$，$\beta=\left(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8\right)$。由于

$$\begin{aligned}
&f_2\left(\left[L_\alpha,L_\beta\right]\right)\\
&=\left[a_8\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)-b_8\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\right)\right]\\
&\quad\times L_{(a_1+b_1,a_2+b_2,a_5+b_5,a_6+b_6,a_3+b_3,a_4+b_4,a_7+b_7,a_8+b_8)}\\
&=\left[L_{(a_1,a_2,a_5,a_6,a_3,a_4,a_7,a_8)},L_{(b_1,b_2,b_5,b_6,b_3,b_4,b_7,b_8)}\right]\\
&=\left[f_2\left(L_\alpha\right),f_2\left(L_\beta\right)\right],
\end{aligned}$$

故 $\forall x,y\in V$， $f_2\left(\left[x,y\right]\right)=\left[f_2\left(x\right),f_2\left(y\right)\right]$，又 f_2 是双射，故 f_2 是 V 的同构。

同理， f_1,f_3,f_4,f_5,f_6 是 V 的自同构。

定理 2.3 $H=\left\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\right\}$ 关于映射乘法同构于对称群 S_3。

证明 由于三元对称群 $S_3=\left\{e,(23),(12),(123),(13),(132)\right\}$。建立 $F:H\to S_3$。由于

$$F\left(f_2\circ f_3\left(L_\alpha\right)\right)=F\left(L_{(a_5,a_6,a_1,a_2,a_3,a_4,a_7,a_8)}\right)=F\left(f_6\left(L_\alpha\right)\right)=(132),$$

$$F\left(f_2\left(L_\alpha\right)\right)\circ F\left(f_3\left(L_\alpha\right)\right)=(23)(12)=(132),$$

同理得 $\forall f_i,f_j\in H$， $F\left(f_i\circ f_j\right)=F\left(f_i\right)\circ F\left(f_j\right)$，又 F 为双射，故 F 为同构映射，即 H 同构于 S_3。

由定理 2.3 易得以下推论成立。

推论 2.1 $\forall L_\alpha\in V$，定义以下变换：

$$f_7\left(L_\alpha\right)=L_{(a_2,a_1,a_6,a_5,a_4,a_3,a_7,a_8)},\quad f_8\left(L_\alpha\right)=L_{(a_4,a_3,a_2,a_1,a_6,a_5,a_7,a_8)},\quad f_9\left(L_\alpha\right)=L_{(a_4,a_3,a_6,a_5,a_2,a_1,a_7,a_8)},$$

$$f_{10}\left(L_\alpha\right)=L_{(a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1,a_7,a_8)},\quad f_{11}\left(L_\alpha\right)=L_{(a_6,a_5,a_2,a_1,a_4,a_3,a_7,a_8)},$$

并将 $f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11}$ 在 V 的基向量上进行线性扩张。则 $H^*=\left\{f_1,f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11}\right\}$ 关于映射乘法与对称群 S_3 同构。

推论 2.2 对 $\forall L_\alpha\in V$，定义以下变换：

$$f_{12}\left(L_\alpha\right)=L_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_7,a_8,a_5,a_6)},\quad f_{13}\left(L_\alpha\right)=L_{(a_3,a_4,a_1,a_2,a_7,a_8,a_5,a_6)},$$

则 $I=\left\{f_1,f_3,f_{12},f_{13}\right\}$ 关于映射乘法构成一个 Klein 四元群。

$\forall L_\alpha\in V$，定义 $f_{14}\left(L_\alpha\right)=\dfrac{1}{n^2}L_{n\alpha}\left(n\neq 0\right)$。显然， f_{14} 有以下两种特殊情形：

当 $n=1$ 时， $f_{14}=f_1$， $f_{14}\left(L_\alpha\right)=L_\alpha$；当 $n=-1$ 时， f_{14} 是同构，记为 f_{15}， $f_{15}\left(L_\alpha\right)=L_{-\alpha}$。

推论 2.3 $\left\{f_1,f_{15}\right\}$ 在以上映射乘法的定义下构成一个二阶群。

引理 2.1 定义 $\forall L_\alpha\in V$， $f_{16}\left(L_\alpha\right)=\dfrac{1}{n_1n_2}L_{(n_1a_1,n_1a_2,n_1a_3,n_1a_4,n_1a_5,n_1a_6,n_1a_7,n_2a_8)}\left(n_1n_2\neq 0\right)$，并将 f_{16} 在 V 的基向量上线性扩张，则 f_{16} 是 V 的单自同态。

证明

$$\begin{aligned}
&f_{16}\left(\left[L_\alpha,L_\beta\right]\right)\\
&=\frac{1}{n_1n_2}\left[a_8\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)-b_8\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\right)\right]\\
&\quad\times L_{(n_1(a_1+b_1),n_1(a_2+b_2),n_1(a_3+b_3),n_1(a_4+b_4),n_1(a_5+b_5),n_1(a_6+b_6),n_1(a_7+b_7),n_2(a_8+b_8))}\\
&=\left[\frac{1}{n_1n_2}L_{(n_1a_1,n_1a_2,n_1a_3,n_1a_4,n_1a_5,n_1a_6,n_1a_7,n_2a_8)},\frac{1}{n_1n_2}L_{(n_1b_1,n_1b_2,n_1b_3,n_1b_4,n_1b_5,n_1b_6,n_1b_7,n_2b_8)}\right]=\left[f_{16}\left(L_\alpha\right),f_{16}\left(L_\beta\right)\right],
\end{aligned}$$

故对于 $\forall x,y\in V$，$f_{16}([x,y])=[f_{16}(x),f_{16}(y)]$，易知 f_{16} 为单射，故 f_{16} 是 V 的单自同态。

显然，f_{16} 有以下四种特殊情况：

当 $n_1=1$，$n_2=1$ 时，f_{16} 为恒等同构，即 f_1，$f_1(L_\alpha)=L_\alpha$，

当 $n_1=1$，$n_2=-1$ 时，f_{16} 为同构，记为 f_{17}，$f_{17}(L_\alpha)=-L_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,-a_8)}$，

当 $n_1=-1$，$n_2=1$ 时，f_{16} 为同构，记为 f_{18}，$f_{18}(L_\alpha)=-L_{(-a_1,-a_2,-a_3,-a_4,-a_5,-a_6,-a_7,a_8)}$，

当 $n_1=-1$，$n_2=-1$ 时，f_{16} 为同构，记为 f_{19}，$f_{19}(L_\alpha)=L_{-\alpha}$。

定理 2.4 $M=\{f_1,f_{17},f_{18},f_{19}\}$ 在以上映射乘法的定义下构成 Klein 四元群。

证明 由题意得，$f_{17}\circ f_{18}(L_\alpha)=f_{17}\left(-L_{(-a_1,-a_2,-a_3,-a_4,-a_5,-a_6,-a_7,a_8)}\right)=L_{-\alpha}=f_{19}(L_\alpha)$，又有 $f_{18}\circ f_{17}(L_\alpha)=f_{18}\left(-L_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,-a_8)}\right)=L_{-\alpha}=f_{19}(L_\alpha)$，同理，$f_{17}\circ f_{19}=f_{19}\circ f_{17}=f_{18}$，$f_{18}\circ f_{19}=f_{19}\circ f_{18}=f_{17}$，$f_{17}^2=f_{18}^2=f_{19}^2=f_1$，故 $M=\{f_1,f_{17},f_{18},f_{19}\}$ 构成 Klein 四元群。

对该李代数上的子代数进行探讨，得到相关结果如下。

性质 2.1 V 无中心。

证明 令 $\alpha_i=(a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3},a_{i_4},a_{i_5},a_{i_6},a_{i_7},a_{i_8})(i=1,2,\cdots,n)$，

$$d=(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7,d_8),\quad r=(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_7,r_8).$$

假设 V 有中心 $C_1L_{\alpha_1}+C_2L_{\alpha_2}+\cdots+C_nL_{\alpha_n}$，则对 $\forall L_\beta\in V$，有

$$\begin{aligned}&\left[C_1L_{\alpha_1}+C_2L_{\alpha_2}+\cdots+C_nL_{\alpha_n},L_\beta\right]\\&=C_1\left[b_8\left(a_{1_1}+a_{1_2}+a_{1_3}+a_{1_4}+a_{1_5}+a_{1_6}+a_{1_7}\right)-a_{1_8}\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)\right]L_{\alpha_1+\beta}\\&\quad+C_2\left[b_8\left(a_{2_1}+a_{2_2}+a_{2_3}+a_{2_4}+a_{2_5}+a_{2_6}+a_{2_7}\right)-a_{2_8}\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)\right]L_{\alpha_2+\beta}\\&\quad+\cdots\\&\quad+C_n\left[b_8\left(a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+a_{n_4}+a_{n_5}+a_{n_6}+a_{n_7}\right)-a_{n_8}\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)\right]L_{\alpha_n+\beta}\end{aligned}$$

又由假设及李运算的反对称性，得 $\left[C_1L_{\alpha_1}+C_2L_{\alpha_2}+\cdots+C_nL_{\alpha_n},L_\beta\right]=0$。于是

$$C_i\left[b_8\left(a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}+a_{i_7}\right)-a_{i_8}\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)\right]=0,$$

$$i=1,2,\cdots,n,$$

故 $\dfrac{b_8}{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7}=\dfrac{a_{i_8}}{a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}+a_{i_7}}$ 或 $C_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，而存在 $L_d\in V$，有 $\dfrac{d_8}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6+d_7}\neq\dfrac{b_8}{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7}$。

故若 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为 0，存在 $L_d\in V$，有

$$\left[C_1L_{a_1}+C_2L_{a_2}+\cdots+C_nL_{a_n},L_d\right]\neq\left[L_d,C_1L_{a_1}+C_2L_{a_2}+\cdots+C_nL_{a_n}\right].$$

而 $C_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$\forall L_r\in V$，有 $[0,L_r]=[L_r,0]$。故 V 为无中心的 Virasoro 代数。

性质 2.2 设 V_8 为 $\left\{L_{(b_1+t,b_2-t,b_3+t,b_4-t,b_5+t,b_6-t,b_7,b_8)}-L_{(b_1-t,b_2+t,b_3-t,b_4+t,b_5-t,b_6+t,b_7,b_8)}\mid b_i,t\in Z\right\}$ 构成的李代数，则 V_8 是 V 的非零真理想，V 不是单李代数。

证明 因为$\forall L_\alpha \in V$，$L_{(b_1+t,b_2-t,b_3+t,b_4-t,b_5+t,b_6-t,b_7,b_8)} - L_{(b_1-t,b_2+t,b_3-t,b_4+t,b_5-t,b_6+t,b_7,b_8)} \in V_8$有

$$\begin{aligned}
&\left[L_{(b_1+t,b_2-t,b_3+t,b_4-t,b_5+t,b_6-t,b_7,b_8)} - L_{(b_1-t,b_2+t,b_3-t,b_4+t,b_5-t,b_6+t,b_7,b_8)}, L_\alpha\right] \\
&= \left[b_8\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\right) - a_8\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)\right] \\
&\quad \times \left(L_{(b_1+t+a_1,b_2-t+a_2,b_3+t+a_3,b_4-t+a_4,b_5+t+a_5,b_6-t+a_6,b_7+a_7,b_8+a_8)}\right. \\
&\quad \left. - L_{(b_1-t+a_1,b_2+t+a_2,b_3-t+a_3,b_4+t+a_4,b_5-t+a_5,b_6+t+a_6,b_7+a_7,b_8+a_8)}\right) \in V_8.
\end{aligned}$$

可以确定$\forall L_\alpha \in V$而$L_\alpha \notin V_8$。假设$L_\alpha \in V_8$，则一定有

$$L_\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \left(L_{(k_{i_1}+t,k_{i_2}-t,k_{i_3}+t,k_{i_4}-t,k_{i_5}+t,k_{i_6}-t,k_{i_7},k_{i_8})} - L_{(k_{i_1}-t,k_{i_2}+t,k_{i_3}-t,k_{i_4}+t,k_{i_5}-t,k_{i_6}+t,k_{i_7},k_{i_8})} \right),$$

显然矛盾。故V_8是V的非零真理想，V不是单李代数。

由于$\forall L_\alpha \in V$，$\left[L(-1,-1,-1,-1,-1,-1,6,0), L_\alpha\right] = 0$，易得以下结论。

性质 2.3 由$L(-1,-1,-1,-1,-1,-1,6,0)$构成的子空间为V的一维交换理想，即V不是半单李代数。

性质 2.4 设$N = \begin{pmatrix} a_{1_8} & a_{1_1}+a_{1_2}+a_{1_3}+a_{1_4}+a_{1_5}+a_{1_6}+a_{1_7} \\ a_{2_8} & a_{2_1}+a_{2_2}+a_{2_3}+a_{2_4}+a_{2_5}+a_{2_6}+a_{2_7} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n_8} & a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+a_{n_4}+a_{n_5}+a_{n_6}+a_{n_7} \end{pmatrix}$，其中矩阵元素均为整数，则由基向量$L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, \cdots, L_{\alpha_n}$构成的子空间是$V$的交换子代数。

证明 由于$r(N) < 2$则$r(N) = 0$或$r(N) = 1$。

若$r(N) = 0$，则矩阵N中的每个行向量皆是 0，故对任意的$i(i = 1,2,\cdots,n)$都有$a_{i_8} = 0$，$a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}+a_{i_7} = 0$。故结论成立。

若$r(N) = 1$，则N的任意一个子矩阵$P = \begin{pmatrix} a_{i_8} & a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}+a_{i_7} \\ a_{j_8} & a_{j_1}+a_{j_2}+a_{j_3}+a_{j_4}+a_{j_5}+a_{j_6}+a_{j_7} \end{pmatrix} (\forall i \ne j)$都满足$r(P) < 1$或$r(P) = 1$。故$|P| = 0$，即

$$a_{i8}\left(a_{j1}+a_{j2}+a_{j3}+a_{j4}+a_{j5}+a_{j6}+a_{j7}\right) - a_{j8}\left(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}+a_{i4}+a_{i5}+a_{i6}+a_{i7}\right) = 0.$$

综上，由基向量$L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, \cdots, L_{\alpha_n}$生成的子空间是$V$的交换子代数。

性质 2.5 设V^+是根据基向量$L_\alpha\left(a_i \in N^*, i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\right)$构成的$V$的线性子空间，则$V^+$中不存在二维非交换李子代数。

证明 令$\beta_j = \left(b_{j_1}, b_{j_2}, b_{j_3}, b_{j_4}, b_{j_5}, b_{j_6}, b_{j_7}, b_{j_8}\right)(j = 1,2,\cdots,n)$。假设$V^+$中存在二维非交换李子代数，那么$V^+$中有基向量$x$，$y$，$[x,y] = x$。令$x = \sum_{i=1}^{n} k_i L_{\alpha_i}$，$k_i \ne 0$，$y = \sum_{j=1}^{n} k_j L_{\beta_j}$，$k_j \ne 0$，那么$x$与$y$已按字典序排列。由

$$\begin{aligned}
x &= [x,y] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_i q_j \left[a_{i_8}\left(b_{j_1}+b_{j_2}+b_{j_3}+b_{j_4}+b_{j_5}+b_{j_6}+b_{j_7}\right) - b_{j_8}\left(a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}+a_{i_7}\right)\right] \\
&\quad \times L_{(a_{i_1}+b_{j_1},a_{i_2}+b_{j_2},a_{i_3}+b_{j_3},a_{i_4}+b_{j_4},a_{i_5}+b_{j_5},a_{i_6}+b_{j_6},a_{i_7}+b_{j_7},a_{i_8}+b_{j_8})},
\end{aligned}$$

则$[x,y]$上的极小项为$L_{\alpha_1+\beta_1}$，极小项系数为

$$k_1q_1\left[a_{1_8}\left(b_{1_1}+b_{1_2}+b_{1_3}+b_{1_4}+b_{1_5}+b_{1_6}+b_{1_7}\right)-b_{1_8}\left(a_{1_1}+a_{1_2}+a_{1_3}+a_{1_4}+a_{1_5}+a_{1_6}+a_{1_7}\right)\right],$$

而 x 的极小项为 L_{a_1}，极小项系数为 k_1。

由 $a_{1_i},b_{1_i}\in Z^+\left(i=1,2,3,4,5,6,7,8\right)$，故 $L_{\alpha_1+\beta_1}\neq L_{\alpha_1}$，故 $k_1=0$。而由题意 $\forall k_i\neq 0$，故 V^+ 中不存在二维非交换李子代数。

构造 7 个李代数 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$。显然它们都是 C 上线性空间，其基向量都是 $L_\alpha\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\in Z\right)$。依次作如下定义，

A_1 上李运算：$\left[L_\alpha,L_\beta\right]=\left[a_1\left(b_8+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)-b_1\left(a_8+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\right)\right]L_{\alpha+\beta}$，

A_2 上李运算：$\left[L_\alpha,L_\beta\right]=\left[a_2\left(b_1+b_8+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)-b_2\left(a_1+a_8+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\right)\right]L_{\alpha+\beta}$，

A_3 上李运算：$\left[L_\alpha,L_\beta\right]=\left[a_3\left(b_1+b_2+b_8+b_4+b_5+b_6+b_7\right)-b_3\left(a_1+a_2+a_8+a_4+a_5+a_6+a_7\right)\right]L_{\alpha+\beta}$，

A_4 上李运算：$\left[L_\alpha,L_\beta\right]=\left[a_4\left(b_1+b_2+b_3+b_8+b_5+b_6+b_7\right)-b_4\left(a_1+a_2+a_3+a_8+a_5+a_6+a_7\right)\right]L_{\alpha+\beta}$，

A_5 上李运算：$\left[L_\alpha,L_\beta\right]=\left[a_5\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_8+b_6+b_7\right)-b_5\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_8+a_6+a_7\right)\right]L_{\alpha+\beta}$，

A_6 上李运算：$\left[L_\alpha,L_\beta\right]=\left[a_6\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_8+b_7\right)-b_6\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_8+a_7\right)\right]L_{\alpha+\beta}$，

A_7 上李运算：$\left[L_\alpha,L_\beta\right]=\left[a_7\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_8\right)-b_7\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_8\right)\right]L_{\alpha+\beta}$。

定理 2.5 代数 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 都与 V 同构。

证明 $\forall L_\alpha\in V$，构造 $f_{20}:V\to A_1$，$f_{20}\left(L_\alpha\right)=L\left(a_8,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_1\right)$。由于

$$\begin{aligned}&f_{20}\left(\left[L_\alpha,L_\beta\right]\right)\\&=\left[a_8\left(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7\right)-b_8\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\right)\right]\\&\quad\times L_{\left(a_8+b_8,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4,a_5+b_5,a_6+b_6,a_7+b_7,a_1+b_1\right)}\\&=\left[f_{20}\left(L_\alpha\right),f_{20}\left(L_\beta\right)\right],\end{aligned}$$

故 $\forall x,y\in V$，$f_{20}\left(\left[x,y\right]\right)=\left[f_{20}\left(x\right),f_{20}\left(y\right)\right]$，且 f_{20} 是双射，故 f_{20} 为同构映射，V 与 A_1 同构。

同理，$\forall L_\alpha\in V$，定义

$$f_{21}\left(L_\alpha\right)=L\left(a_1,a_8,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_2\right),\quad f_{22}\left(L_\alpha\right)=L\left(a_1,a_2,a_8,a_4,a_5,a_6,a_7,a_3\right),$$

$$f_{23}\left(L_\alpha\right)=L\left(a_1,a_2,a_3,a_8,a_5,a_6,a_7,a_4\right),\quad f_{24}\left(L_\alpha\right)=L\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_8,a_6,a_7,a_5\right),$$

$$f_{25}\left(L_\alpha\right)=L\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_8,a_7,a_6\right),\quad f_{26}\left(L_\alpha\right)=L\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_8,a_7\right),$$

则 $f_{21},f_{22},f_{23},f_{24},f_{25},f_{26}$ 都为同构映射，即代数 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 都与 V 同构。

3. 秩为 $2n$ 的 Virasoro 代数

将文献[7]基元的秩推广至 $2n$，可得一类新的 Virasoro 代数如下。

设 $U=\bigoplus_{(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})\in Z^{2n}}CL_{(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})}$ 为复数域 C 上一线性空间，基为 $L_{(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})}\left(a_i\in Z,i=1,2,\cdots,2n\right)$，在线性空间 U 上定义李运算如下：

$$\begin{aligned}&\left[L_{(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})},L_{(b_1,b_2,\cdots,b_{2n})}\right]\\&=\left[\left(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\right)\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)\right.\\&\quad\left.-\left(b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n}\right)\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\right]L_{(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_{2n}+b_{2n})}\end{aligned}$$

在基上双线性扩张，可由定义分别验证该运算满足反对称性和雅克比恒等式，从而得到该线性空间 U 关于所定义的运算构成一个新的无限维李代数。

定理 3.1 令 $\alpha'=(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})\in Z^{2n}$， $P_1'=\left\{f\mid f(L_{\alpha'})=L_{(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n},a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{2n})}\right\}$，$P_2'=\left\{f\mid f(L_{\alpha'})=L_{(a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n})}\right\}$，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与 $i_{n+1},i_{n+2},\cdots,i_{2n}$ 分别是 $1,2,\cdots,n$ 和 $n+1,n+2,\cdots,2n$ 的排列。定义映射乘法为 $h_i\circ h_j(L_{\alpha'})=h_i(h_j(L_{\alpha'}))$， $\forall h_i,h_j\in P_1',P_2'$，则 P_1',P_2' 关于映射乘法都构成自同构群，且与对称群 S_n 同构。

证明 分别构造 P_1',P_2' 到对称群 S_n 的映射：

$$\delta_1:f\to\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix},\ \delta_2:f\to\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}.$$

易得 δ_1,δ_2 分别是集合 P_1',P_2' 与 S_n 之间的同构映射。故 P_1',P_2' 关于映射乘法都构成自同构群，且与对称群 S_n 同构。

对于 P_1' 中元素， $\forall L_{\alpha'}\in U$，定义

$$h_1(L_{\alpha'})=L_{(a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{2n})},$$

$$h_2(L_{\alpha'})=L_{(a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n})},$$

$$h_3(L_{\alpha'})=L_{(a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n})},$$

$$h_4(L_{\alpha'})=L_{(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n})},$$

$$h_5(L_{\alpha'})=L_{(a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n})},$$

其中 $k\in Z$，且 $4k<n$，将 h_1,h_2,h_3,h_4,h_5 分别在 U 的基向量上线性扩张。

定理 3.2 h_1,h_2,h_3,h_4,h_5 是 U 的同构。

证明 令 $\beta'=(b_1,b_2,\cdots,b_{2n})$。由

$$\begin{aligned}&h_1([L_{\alpha'},L_{\beta'}])\\&=[(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})(b_1+b_2+\cdots+b_n)-(b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n})(a_1+a_2+\cdots+a_n)]\\&\quad\times L_{(a_{k+1}+b_{k+1},a_{k+2}+b_{k+2},\cdots,a_{2k}+b_{2k},a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_k+b_k,a_{2k+1}+b_{2k+1},a_{2k+2}+b_{2k+2},\cdots,a_{2n}+b_{2n})},\end{aligned}$$

又由

$$\begin{aligned}&[h_1(L_{\alpha'}),h_1(L_{\beta'})]\\&=[L_{(a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{2n})},L_{(b_{k+1},b_{k+2},\cdots,b_{2k},b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{2k+1},b_{2k+2},\cdots,b_{2n})}]\\&=[(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})(b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots+b_{2k}+b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{2k+1}+b_{2k+2}+\cdots+b_n)\\&\quad-(b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n})(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}+a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_n)]\\&\quad\times L_{(a_{k+1}+b_{k+1},a_{k+2}+b_{k+2},\cdots,a_{2k}+b_{2k},a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_k+b_k,a_{2k+1}+b_{2k+1},a_{2k+2}+b_{2k+2},\cdots,a_{2n}+b_{2n})}.\end{aligned}$$

由 $4k<n$，故

$$b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots+b_{2k}+b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{2k+1}+b_{2k+2}+\cdots+b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}+a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

于是 $h_1\left(\left[L_{\alpha'},L_{\beta'}\right]\right)=\left[h_1\left(L_{\alpha'}\right),h_1\left(L_{\beta'}\right)\right]$， $\forall x,y\in U$， $h_1\left(\left[x,y\right]\right)=\left[h_1\left(x\right),h_1\left(y\right)\right]$， h_1 是同态映射。由于 h_1 为双射，故 h_1 为 U 的同构。同理， h_2,h_3,h_4,h_5 都是 U 的同构。

定理 3.3 $H'=\left\{\varepsilon,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right\}$ 在关于映射乘法同构于对称群 S_3。

证明 由于 $S_3=\left\{e,(23),(12),(123),(13),(132)\right\}$。建立 $F':H'\to S_3$。由

$$\begin{aligned}&F'\left(h_2\circ h_3\left(L_{\alpha'}\right)\right)\\&=F'\left(L\left(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n}\right)\right)\\&=F'\left(h_4\left(L_{\alpha'}\right)\right)\\&=(23),\end{aligned}$$

又由 $F'\left(h_2\left(L_{\alpha'}\right)\right)\circ F'\left(h_3\left(L_{\alpha'}\right)\right)=(13)(132)=(23)$， $F'\left(h_2\circ h_3\right)=F'\left(h_2\right)\circ F\left(h_3\right)$。

同理，可得 $\forall h_i,h_j\in H'$， $F'\left(h_i\circ h_j\right)=F'\left(h_i\right)\circ F'\left(h_j\right)$，又 F' 为双射，故 F' 为同构映射。即 H' 在以上映射乘法的定义下同构于三元对称群 S_3。

对于 P_1' 中元素， $\forall L_{\alpha'}\in U$，定义

$$h_6\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_{2k},a_{2k-1},\cdots,a_{k+1},a_k,a_{k-1},\cdots,a_1,a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{2n}\right)},$$

$$h_7\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_{3k},a_{3k-1},\cdots,a_{2k+1},a_{2k},a_{2k=1},\cdots,a_{k+1},a_k,a_{k-1},\cdots,a_1,a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n}\right)},$$

$$h_8\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_{3k},a_{3k-1},\cdots,a_{2k+1},a_k,a_{k-1},\cdots,a_1,a_{2k},a_{2k-1},\cdots,a_{k+1},a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n}\right)},$$

$$h_9\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_k,a_{k-1},\cdots,a_1,a_{3k},a_{3k-1},\cdots,a_{2k+1},a_{2k},a_{2k-1},\cdots,a_{k+1},a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n}\right)},$$

$$h_{10}\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_{2k},a_{2k-1},\cdots,a_{k+1},a_{3k},a_{3k=1},\cdots,a_{2k+1},a_k,a_{k-1},\cdots,a_1,a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{2n}\right)}.$$

由定理 3.3 易得以下推论成立。

推论 3.1 $H^{*\prime}=\left\{\varepsilon,h_6,h_7,h_8,h_9,h_{10}\right\}$ 关于映射乘法同构于对称群 S_3。

对于 P_1' 中元素， $\forall L_{\alpha'}\in U$，定义

$$h_{11}\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_1,a_2,\cdots,a_{2k},a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{4k},a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_{4k+1},a_{4k+2},\cdots,a_{2n}\right)},$$

$$h_{12}\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{4k},a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_{4k+1},a_{4k+2},\cdots,a_{2n}\right)}.$$

定理 3.4 $I'=\left\{e,h_1,h_{11},h_{12}\right\}$ 关于映射乘法构成 Klein 四元群。

证明 由定义，

$$h_1\circ h_{11}\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{4k},a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_{4k+1},a_{4k+2},\cdots,a_{2n}\right)}=h_{12}\left(L_{\alpha'}\right).$$

又有 $h_{11}\circ h_1\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\left(a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k},a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{3k+1},a_{3k+2},\cdots,a_{4k},a_{2k+1},a_{2k+2},\cdots,a_{3k},a_{4k+1},a_{4k+2},\cdots,a_{2n}\right)}=h_{12}\left(L_{\alpha'}\right)$，同理，得 $h_1\circ h_{12}=h_{12}\circ h_1=h_{11}$， $h_{11}\circ h_{12}=h_{12}\circ h_{11}=h_1$， $h_1=h_{11}^2=h_{12}^2=e$。故 I' 构成 Klein 四元群。

$\forall L_{\alpha'}\in U$，构造 $h_{13}:U\to U$， $h_{13}\left(L_{\alpha'}\right)=\dfrac{1}{m^2}L_{m\alpha'}\left(m\neq 0\right)$，则 h_{13} 有以下两种特殊情形：

当 $m=1$ 时， h_{13} 是恒等同构，即 $h_{13}=e$， $h_{13}\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\alpha'}$，

当 $m=-1$ 时， h_{13} 是同构，记为 h_{14}， $h_{14}\left(L_{\alpha'}\right)=L_{-\alpha'}$。

推论 3.2 $\left\{e,h_{14}\right\}$ 关于映射乘法构成一个二阶群。

引理 3.1 $\forall L_{\alpha'}\in U$，构造 $h_{15}\left(L_{\alpha'}\right)=\dfrac{1}{m_1m_2}L_{\left(m_1a_1,m_1a_2,\cdots,m_1a_n,m_2a_{n+1},m_2a_{n+2},\cdots,m_2a_{2n}\right)},n\neq 0$，则 h_{15} 是 U 的单自同态。

证明

$$\begin{aligned}&h_{15}\left(\left[L_{\alpha'},L_{\beta'}\right]\right)\\&=\frac{1}{m_1m_2}\left[\left(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\right)\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)-\left(b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n}\right)\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\right]\\&\quad\times L_{\left(m_1(a_1+b_1),m_1(a_2+b_2),\cdots,m_1(a_n+b_n),m_2(a_{n+1}+b_{n+1}),m_2(a_{n+2}+b_{n+2}),\cdots,m_2(a_{2n}+b_{2n})\right)}\\&=\left[\frac{1}{m_1m_2}L_{\left(m_1a_1,m_1a_2,\cdots,m_1a_n,m_2a_{n+1},m_2a_{n+2},\cdots,m_2a_{2n}\right)},\frac{1}{m_1m_2}L_{\left(m_1b_1,m_1b_2,\cdots,m_1b_n,m_2b_{n+1},m_2b_{n+2},\cdots,m_2b_{2n}\right)}\right]\\&=\left[h_{15}\left(L_{\alpha'}\right),h_{15}\left(L_{\beta'}\right)\right],\end{aligned}$$

故有 $\forall x,y\in U$，$h_{15}\left(\left[x,y\right]\right)=\left[h_{15}\left(x\right),h_{15}\left(y\right)\right]$，又 h_{15} 为单射，故 h_{15} 是单自同态。

显然，h_{15} 有四种特殊情况：

当 $m_1=1$，$m_2=1$ 时，h_{15} 为恒等同构，即 e，$h_{15}\left(L_{\alpha'}\right)=L_{\alpha'}$，

当 $m_1=1$，$m_2=-1$ 时，h_{15} 为同构，记为 h_{16}，$h_{16}\left(L_{\alpha'}\right)=-L_{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n,-a_{n+1},-a_{n+2},\cdots,-a_{2n}\right)}$，

当 $m_1=-1$，$m_2=1$ 时，h_{15} 为同构，记为 h_{17}，$h_{17}\left(L_{\alpha'}\right)=-L_{\left(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{2n}\right)}$，

当 $m_1=-1$，$m_2=-1$ 时，h_{15} 为同构，记为 h_{18}，$h_{18}\left(L_{\alpha'}\right)=L_{-\alpha'}$。

定理 3.5 $M=\left\{e,h_{16},h_{17},h_{18}\right\}$ 关于映射乘法构成 Klein 四元群。

以下结果与秩为 8 的代数类似，不再证明。

性质 3.1 U 无中心。

性质 3.2 设 U_n 为 $L_{\beta'}-L_{\left(b_1-t,b_2-t,\cdots,b_k-t,b_{k+1}+t,b_{k+2}+t,\cdots,b_{2k}+t,b_{2k+1},b_{2k+2},\cdots,b_{2n}\right)}$ $\left(b_i,t\in Z,i\in\left\{1,2,\cdots,2n\right\}\right)$ 构成的李代数。则 U_n 是 U 的非零真理想，U 不是单李代数。

性质 3.3 由 $L_{\left(\underbrace{-2m,-2m,\cdots,-2m}_{k\text{个}},\underbrace{m,m,\cdots,m}_{2k\text{个}},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{(2n-3k)\text{个}}\right)}$ 构成的一维子空间是 U 的一维交换理想，即 U 不是半单李代数。

性质 3.4 设 $N'=\begin{pmatrix}a_{1_{n+1}}+a_{1_{n+2}}+\cdots+a_{1_{2n}} & a_{1_n}+a_{1_1}+a_{1_2}+\cdots+a_{1_{n-1}}\\ a_{2_{n+1}}+a_{2_{n+2}}+\cdots+a_{2_{2n}} & a_{2_n}+a_{2_1}+a_{2_2}+\cdots+a_{2_{n-1}}\\ \vdots & \vdots\\ a_{m_{n+1}}+a_{m_{n+2}}+\cdots+a_{m_{2n}} & a_{m_n}+a_{m_1}+a_{m_2}+\cdots+a_{m_{n-1}}\end{pmatrix}$，其中矩阵元素均为整数，则由基向量 $L_{\alpha'_1},L_{\alpha'_2},\cdots,L_{\alpha'_m}$ 构成的子空间是 U 的交换子代数。

基金项目

2018 年浙江省高等教育十三五第一批教学改革研究项目“基于超星学习通平台的混合式教学模式研究——以线性代数课程为例”(jg20180248)。

参考文献

[1] Zhang, H. and Zhao, K. (1986) Represent of Virasoro Lie Algebra and Its q-Analog. *Communications in Algebra*, **20**, 3715-3724.

[2] 余德民，张再云，周立仁，甘向阳. 一类无限维李代数的同构与同态[J]. 青海师范大学学报(自然科学版), 2009(2): 4-10.

[3] 黄忠铣. 秩为 3 的广义 Virasoro 李代数[J]. 九江学院学报(自然科学版), 2017(1): 67-68.

[4] 余德民，李炳君，万前红. 一类推广的 Virosoro-like 李代数[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2011, 24(1): 17-20.

[5] 余德民，李炳君，万前红. 一类广义的 Virasoro-like 李代数的同构群与单性[J]. 数学进展, 2013, 42(5): 620-624.

[6] Yu, D. and Li, A. (2013) Simplicities and Automorphisms of a Special Infinite Dimensional Lie Algebra. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, **28**, 612-617.

[7] 余德民, 李炳君. 一类广义的无限维 Virasoro 李代数[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2015, 28(1): 7-9.

[8] 黄忠铣. 秩为 n 的广义 Virasoro 李代数的同构[J]. 长江大学学报(自然版), 2017, 14(13): 68-70.