Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 458-462
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105055

Hans汉斯

Linear *n*-Width of Infinite-Dimensional Sequence Space

Hanyue Xiao, Xiaohang He

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: xhy080530@163.com

Received: Apr. 17th, 2020; accepted: May 7th, 2020; published: May 14th, 2020

Abstract

The linear *n*-width of infinite-dimensional sequence space is discussed in this paper, and its sharp asymptotic order is estimated.

Keywords

Infinite-Dimensional Sequence Space, Linear *n*-Width, Asymptotic Order

无穷维序列空间的线性*n*-宽度

肖寒月，贺小航

西华大学理学院，四川 成都
Email: xhy080530@163.com

收稿日期：2020年4月17日；录用日期：2020年5月7日；发布日期：2020年5月14日

摘 要

本文讨论了无穷维序列空间的线性*n*-宽度，并估计其精确渐近阶。

关键词

无穷维序列空间，线性*n*-宽度，渐近阶

文章引用：肖寒月，贺小航．无穷维序列空间的线性 *n*-宽度[J]．理论数学, 2020, 10(5): 458-462.
DOI: 10.12677/pm.2020.105055

1. 引言及主要结果

自 1936 年，A.N. Kolmogorov提出宽度以来，重要的函数类空间的n-宽度都得到比较深入的研究[1]-[7]。而其方法基本都是将函数空间的n-宽度问题，转化为序列空间的宽度问题。因此，研究序列空间的宽度问题，有比较重要的意义。本文研究无穷维序列空间的宽度问题。

用 $l_p\,(1\le p\le\infty)$ 表示赋予范数 $\|\bullet\|_p$ 的经典无序维实序列空间，其中 $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$，

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty\\ \sup\limits_{k\ge1}|x_k|, & p=\infty\end{cases}$$

众所周知，l_p 空间界有以下性质：

1) 对 $1\le p<q\le\infty$，有 $l_p\subset l_q$，而 $l_q\not\subset l_p$；

2) 对 $1\le p<\infty$，$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 l_p 的 Schauder 基。其中，$e_k\,(1\le k<\infty)$ 表示第 k 个分量为 1，其余分量为 0 的实序列。

对 $\forall 1\le p<\infty$，$x=\{x_k\}\in l_p$，$r\in\mathbb{R}$，令

$$x^{(r)}=\left\{k^r x_k\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$l_{p,r}:=\left\{x\in l_p\,\middle|\,x^{(r)}\in l_p\right\}.$$

对 $x\in l_{p,r}$，记

$$\|x\|_{p,r}=\left\|x^{(r)}\right\|_p$$

易见，$\|\bullet\|_{p,r}$ 为 $l_{p,r}$ 上的范数，$\left(l_{p,r},\|\bullet\|_{p,r}\right)$ 为赋范线性空间，以下总把 $\left(l_{p,r},\|\bullet\|_{p,r}\right)$ 简记为 $l_{p,r}$，用 $B_{p,r}$ 表示 $l_{p,r}$ 中的单位球。

对 $1\le q<p<\infty$，由 Hölder 不等式知，当 $r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ 时，$l_{p,r}\subset l_q$。本文讨论 $l_{p,r}$ 在 $l_q\left(1\le q<p<\infty, r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ 中的线性 n-宽度，为此介绍线性 n-宽度的定义。

定义 1 设 $(X,\|\bullet\|)$ 为赋范线性空间，A 为 X 中非空子集，$n\in\mathbb{N}^*=\{0,1,2,\cdots\}$，称

$$\lambda_n(A,X):=\inf_{T_n}\sup_{x\in A}\|x-T_n x\|$$

为 A 在 X 中的线性 n-宽度，其中 T_n 取遍从 X 到 X 上的秩不超过 n 的所有有界线性算子。

关于线性 n-宽度的性质，可参阅 Pinkus 专著[8]。

本文主要讨论 $l_{p,r}$ 在 $l_q\left(1\le q<p<\infty, r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ 中的线性 n-宽度，并估计其精确阶，这也是本文的主要结果。

定理 1 设 $1\le q<p<\infty$，$r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，$n\in\mathbb{N}^*$，则

$$\lambda_n\left(B_{p,r},l_q\right) \succ\prec n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

其中，“$\succ\prec$”定义如下：$c, c_i, i=0,1,\cdots$，表示仅与参数 p,q,r 相关的正常数。若对于正函数 $\mu(y)$ 和 $\nu(y)$，$y\in B$ (B 是正函数 $\mu(y)$ 和 $\nu(y)$ 的定义域)，存在正常数 c_1,c_2，使得对任意的 $y\in B$，有 $\mu(y)\ge c_1\nu(y)$ 或者 $\mu(y)\le c_1\nu(y)$，则将其记为：$\mu(y)\gg\nu(y)$ 或者 $\mu(y)\ll\nu(y)$。若存在正常数 c_3,c_4，使得对任意的 $y\in B$，有 $c_3\le\mu(y)/\nu(y)\le c_4$，则记为：$\mu(y)\succ\prec\nu(y)$，即对任意的 $y\in B$，若 $\mu(y)\gg\nu(y)$ 和 $\mu(y)\ll\nu(y)$ 同时成立，则有 $\mu(y)\succ\prec\nu(y)$。

2. 主要结果的证明

为证定理 1，首先介绍有限维空间的线性 n-宽度的相关结论。

$1\le p\le\infty$，用 l_p^m 表示在 $\mathbb{R}^m$ 上赋予通常范数 $\|\bullet\|_{l_p^m}$ 的 Banach 空间，其中

$$\|x\|_{l_p^m}=\begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty \\ \max\limits_{1\le k\le m}|x_k|, & p=\infty\end{cases}, \qquad x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m.$$

用 B_p^m 表示 l_p^m 中的单位球。

易见，$\{e_k'\}_{k=1}^m$ 为 l_p^m 的基，其中 $e_k'\in\mathbb{R}^m$ 表示第 k 个分量为 1，其余分量为 0 的向量。

有限维空间 l_p^m 的线性 n-宽度有如下结果：

命理 2 [8] 设 $1\le q<p\le\infty$，$n\in\mathbb{N}^*$，则

$$\lambda_n\left(B_p^m,l_q^m\right)=\begin{cases}(m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 0\le n\le m, \\ 0, & n>m.\end{cases}$$

下面，分别建立估计定理 1 上、下界的离散化空间。

对 $k\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$，令

$$S_k=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,2^{n-1}\le n<2^k\right\}.$$

则 $m_k:=|S_k|=2^{k-1}$。

引理 3 设 $1\le q<p<\infty$，$r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，$n\in\mathbb{N}^*$，$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为非负整数序列，且 $n_k\le m_k$，$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n$，则

$$\lambda_n\left(B_{p,r},l_q\right)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}\lambda_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right).$$

证明： 对 $\forall k\in\mathbb{N}$，令

$$F_k=span\left\{e_n\,\middle|\,n\in S_k\right\}.$$

易见 F_k 为线性空间，且 $\dim F_k=m_k$。令

$$I_k:F_k\to\mathbb{R}^{m_k}$$

$$x=\sum_{j\in S_k}x_je_j\mapsto\sum_{j=1}^{m_k}x_{2^{k-1}+j-1}e_j'$$

则 I_k 为 F_k 到 $\mathbb{R}^{m_k}$ 上的同构映射。

对 $\forall x=\sum_{j\in S_k} x_j e_j \in F_k$， $\forall y=\sum_{j\in S_k} y_j e_j \in F_k$， 则

$$\|x\|_{p,r}=\left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|j^r x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \succ\prec 2^{kr}\left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=2^{kr}\left\|I_k x\right\|_{l_p^{m_k}}, \tag{1}$$

$$\|y\|_q=\left\|I_k y\right\|_{l_q^{m_k}}. \tag{2}$$

从而

$$\lambda_{n_k}\left(B_{p,r}\cap F_k, l_q\cap F_k\right)\ll 2^{-rk}\lambda_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)$$

因此

$$\lambda_n\left(B_{p,r}, l_q\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n_k}\left(B_{p,r}\cap F_k, l_q\cap F_k\right)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}\lambda_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right).$$

引理 3 得证。

引理 4 设$1\le q<p<\infty$， $r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$， $n\in\mathbb{N}^*$，记$k'=\left[\log_2 n\right]+1$。令$k=k'+2$，则

$$\lambda_n\left(B_{p,r}, l_q\right)\gg 2^{-rk'}\lambda_n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)$$

证明：易见$m_k\ge n$，且由(1)、(2)可知

$$\lambda_n\left(B_{p,r}, l_q\right)\ge\lambda_n\left(B_{p,r}\cap F_k, l_q\cap F_k\right)\ge 2^{-rk}\lambda_n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right).$$

3. 定理 1 的证明

3.1. 定理 1 上界的证明

令$k'=\left[\log_2 n\right]+1$。对$k\in\mathbb{N}$，令

$$n_k=\begin{cases} m^k, & 1\le k\le k' \\ \left[n2^{k'-k}\right], & k>k' \end{cases}$$

则$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n$，由引理 3 及命题 2 知

$$\begin{aligned}\lambda_n\left(B_{p,r}, l_q\right)&\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}\lambda_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)=\sum_{k=k'}^{\infty}2^{-rk}\lambda_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)\\&\le\sum_{k=k'}^{\infty}2^{-rk}m_k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\le\sum_{k=k'}^{\infty}2^{-rk}2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)k}=\sum_{k=k'}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}\\&\ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}\ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}\end{aligned}$$

3.2. 定理 1 下界的证明

令k'与k为满足引理 4 的k'与k，则由引理 4 和命题 1 知

$$\begin{aligned}\lambda_n\left(B_{p,r}, l_q\right)&\gg 2^{-rk}\lambda_n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)\gg 2^{-rk'}\left(m_k, n\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gg 2^{-rk}\left(2^{k-1}, 2^{k'}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\&\gg 2^{-rk'}2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)k'}=2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}\gg n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}\end{aligned}$$

综上所述，定理 1 得证。

参考文献

[1] Kolmogorov, A.N. (1936) Uber die deste Annaherung von funktionen einer gegebenen funktioneklasse. *Annals of Mathematics*, No. 37, 107-111. https://doi.org/10.2307/1968691

[2] Stechkin, S.R. (1954) On Best Approximation of Given Classes of Functions by Arbitrary Polynomials. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **9**, 133-134. (In Russian)

[3] Tikhomirov, V.M. (1960) Diameters of Sets in Function Spaces and the Theory of Best Approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **15**, 81-120.

[4] Tikhomirov, V.M. (1969) Best Methods of Approximation of Differentiable Functions in the Space. *Matematicheskii Sbornik*, **80**, 290-340.

[5] Tikhomirov, V.M. (1976) Some Problems in the Theory of Approximation. Nauka, Moscow.

[6] Tikhomirov, V.M. (1990) Theory of Extremal Problems and Approximation Theory. *Advances in Mathematics*, **19**, 449-451. (In Chinese)

[7] Pietsch, A. (1974) s-Numbers of Operators in Banach Spaces. *Studia Mathematica*, No. 51, 201-223. https://doi.org/10.4064/sm-51-3-201-223

[8] Pinkus, A. (1985) n-Widths in Approximation Theory. Springer, Berlin.