Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 471-477
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105057

Near Left (Right) Coset and Properties of the *N*(2,2,0) Algebras

Fang'an Deng

School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology, Hanzhong Shaanxi
Email: dengfangans@126.com

Received: Apr. 18th, 2020; accepted: May 8th, 2020; published: May 15th, 2020

Abstract

In this paper, the concept on near left (right) coset of $N(2,2,0)$ algebras is introduced. Some related properties are obtained. Relations between $N(2,2,0)$ algebras and Q-algebra, CI-algebra and quantum B-algebra are investigated.

Keywords

$N(2,2,0)$ Algebra, Near Left (Right) Coset, Q-Algebra, CI-Algebra, Quantum B-Algebra

N(2,2,0)代数的拟左(右)陪集及其性质

邓方安

陕西理工大学数学与计算机科学学院，陕西 汉中
Email: dengfangans@126.com

收稿日期：2020年4月18日；录用日期：2020年5月8日；发布日期：2020年5月15日

摘　要

本文提出了$N(2,2,0)$代数的左(右)陪集的概念，讨论了左(右)陪集的性质，揭示了$N(2,2,0)$代数与Q-代数、CI-代数及量子B-代数的关系。

关键词

$N(2,2,0)$代数，拟左(右)陪集，Q-代数，CI-代数，量子B-代数

文章引用: 邓方安. *N*(2,2,0)代数的拟左(右)陪集及其性质[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 471-477.
DOI: 10.12677/pm.2020.105057

1. 引言

1990 年，吴望名[1]在研究逻辑系统中的蕴涵关系时提出了模糊蕴涵代数(简称 FI 代数)。FI 代数一度引起了同行的广泛关注，如，徐扬[2]、刘练珍[3]研究了格蕴涵代数，讨论了 FI 代数与 MV 代数间的关系，邓方安[4]在研究 FI 代数的过程中对模糊蕴涵代数的模糊蕴涵算子从代数学角度做了进一步抽象，提出了 $N(2,2,0)$ 代数。文献[5]研究了 $N(2,2,0)$ 代数的子代数、理想与关联理想；文献[6]研究了 $N(2,2,0)$ 代数的 RC-半群；文献[7]引入并讨论了 $N(2,2,0)$ 代数的中间单位的性质。本文提出 $N(2,2,0)$ 代数的拟左(右)陪集的概念，并讨论它的性质。

2. $N(2,2,0)$ 代数的拟左(右)陪集的性质

定义 2.1 [4] 设 S 是含常元 0 的集合。若在 S 中定义二元运算 $*$ 和 Δ 满足以下公理：$\forall x,y,z\in S$，

(F_1) $x*(y\Delta z)=z*(x*y)$，

(F_2) $(x\Delta y)*z=y*(x*z)$，

(F_3) $0*x=x$

则称 $(S,*,\Delta,0)$ 是一个 $N(2,2,0)$ 代数。

定理 2.1 [4] 若 $(S,*,\Delta,0)$ 是 $N(2,2,0)$ 代数，则 $\forall x,y,z\in S$，下列等式成立：

(1) $x*y=y\Delta x$；

(2) $(x*y)*z=x*(y*z),(x\Delta y)\Delta z=x\Delta(y\Delta z)$；

(3) $x*(y*z)=y*(x*z),(x\Delta y)\Delta z=(x\Delta z)\Delta y$。

推论 1 [4] 若 $(S,*,\Delta,0)$ 是一个 $N(2,2,0)$ 代数，则 $(S,*,0)$ 和 $(S,\Delta,0)$ 都是半群。

因此，$N(2,2,0)$ 代数是带有一对对偶半群的双半群。

定义 2.2 设 $(S,*,\Delta,0)$ 是一个 $N(2,2,0)$ 代数，在半群 $(S,*,0)$ 中定义集合

$$B_S=\{x\in S\mid x*0=0\}.$$

显然 $0\in B_S$，即 B_S 非空。$\forall x,y\in B_S$，有

$$(x*y)*0=x*(y*0)=x*0=0\Rightarrow x*y\in B_S,$$

因此 B_S 是 S 的子代数。

再定义集合

$$aB_S=\{a*x\mid a\in S,x\in B_S\},\quad B_Sa=\{x*a\mid x\in B_S,a\in S\}$$

分别称为半群 $(S,*,0)$ 关于子代数 B_S 的拟左陪集和拟右陪集。

定理 2.2 设 $(S,*,\Delta,0)$ 是一个 $N(2,2,0)$ 代数，则半群 $(S,*,0)$ 的拟左陪集就是半群 $(S,\Delta,0)$ 的拟右陪集。

证明 由于一个 $N(2,2,0)$ 代数 $(S,*,\Delta,0)$ 的半群 $(S,*,0)$ 与 $(S,\Delta,0)$ 的特殊关系：$x*y=y\Delta x$，$\forall x,y\in S$，容易得出：半群 $(S,*,0)$ 的拟左陪集

$$aB_S=\{a*x\mid a\in S,x\in B_S\},$$

就是半群 $(S,\Delta,0)$ 的拟右陪集 $B_Sa=\{x\Delta a\mid x\in B_S,a\in S\}$。

这里只研究拟左陪集，类似可以研究拟右陪集的性质。

在群里，对于任意一个群 G， $H \le G, \forall a,b \in G$ ，则有下列性质成立：

(1) $\forall a \in S \Rightarrow a \in aH$ ；

(2) $a \in H \Leftrightarrow aH = H$ ；

(3) $b \in aH \Leftrightarrow aH = bH$ ；

(4) 若 $aH \cap bH \ne \varnothing$ ，则有 $aH = bH$ 。

但在 $N(2,2,0)$ 代数 $(S,*,\Delta,0)$ 的半群 $(S,*,0)$ 与 $(S,\Delta,0)$ 中这些性质不再成立，下面的例子说明了这一点。

例 1 设 $S = \{0,a,b,c\}$ ，定义 S 上的二元运算如下表 1，表 2：

Table 1. Example of Theorem 2.2(a)
表 1. **定理** 2.2(a)

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	0	b	a	a
b	0	a	b	b
c	0	a	b	b

Table 2. Example of Theorem 2.2(b)
表 2. **定理** 2.2(b)

Δ	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	b	a	a
b	b	a	b	b
c	c	a	b	b

容易验证： $(S,*,\Delta,0)$ 是一个 $N(2,2,0)$ 代数，且 $B_S = S = \{0,a,b,c\}$ 。而

$$aB_S = bB_S = cB_S = \{0,a,b\},$$

显然 $aB_S = bB_S = cB_S \subset B_S$ 。同时， $a \in aB_S, b \in B_S$ ，但 $c \notin cB_S$ 。

例 2 设 $S = \{0,a,b,c\}$ ，定义 S 上的二元运算如下表 3，表 4：

Table 3. Example of Theorem 2.2(c)
表 3. **定理** 2.2(c)

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	0	b	a	a
b	b	a	b	b
c	0	a	b	b

Table 4. Example of Theorem 2.2(d)
表 4. **定理** 2.2(d)

Δ	0	a	b	c
0	0	0	b	0
a	a	b	a	a
b	b	a	b	b
c	c	a	b	b

可以验证：$(S,*,\Delta,0)$是一个$N(2,2,0)$代数，且$B_S=\{0,a,c\}\subset S$。而

$$aB_S=cB_S=\{0,a,b\},bB_S=\{a,b\}.$$

这说明在群里“$aB_S\cap bB_S\neq\varnothing\Rightarrow aB_S=bB_S$”在半群中不再成立。

在群中$\forall a\in S\Rightarrow a\in aB_S$成立，但在半群中，这个结论不一定成立。在上例中，有$a\in aB_S,b\in bB_S$，但$c\notin cB_S$。

定理 2.3 设$(S,*,\Delta,0)$是一个$N(2,2,0)$代数，则有$\forall a\in S\Rightarrow 0\notin aB_S$。

证明 由$aB_S=\{a*x\,|\,a\in S,x\in B_S\}$可知，如果$0\in aB_S\Rightarrow\exists x\in B_S,x\neq 0$，使得

$$a*x=0\Rightarrow x*0=x*(a*x)=(a*x)*x=0*x=x\neq 0$$

这与$x\in B_S$矛盾，因此$\forall a\in S\Rightarrow 0\notin aB_S$。

定理 2.4 设$(S,*,\Delta,0)$是一个$N(2,2,0)$代数，则有下列结论成立：

(1) $a\in B_S\Rightarrow aB_S\subseteq B_S$；

(2) $b\in aB_S$，如果b是a的右伴随非零零因子，则$b\notin B_S$；

(3) 若$a\in aB_S$，且$a\in B_S$，则a一定是幂等元；

(4) $B_S\subseteq E_S$，其中E_S是S的全体幂等元集合。

证明 (1) 设$a\in B_S$，因为B_S是S的子代数，故有$aB_S\subseteq B_S$；又任取$x\in B_S$，由$a\in B_S$，于是$a*x\in B_S$，且

$$x=0*x=(a*0)*x=a*(0*x)=a*x\in aB_S,$$

从而又得到$B_S\subseteq aB_S$。

(2) 设$b\in aB_S$，令$b=a*x$，$x\in B_S$，由b是a的右伴随非零零因子，则有

$$b*b=(a*x)*b=a*(x*b)=x*(a*b)=x*0=0,$$

于是一方面$b*b*b=0*b=b$，另一方面$b*b*b=b*0$，即$b*0=b\Rightarrow b\notin B_S$。

(3) 由$a\in aB_S$知，存在$x\in B_S$，使得

$$a=a*x \tag{*}$$

$$a=a*x=a*(0*x)=(a*0)*x\overset{a\in B_S}{=}0*x=x$$

再将$x=a$代入(*)式，就有$a*a=a^2=a\Rightarrow a\in E_S$。

(4) $\forall a\in B_S\Rightarrow a*0=0\Rightarrow a*0*a=0*a\Rightarrow a*a=a\Rightarrow a\in E_S$，故$B_S\subseteq E_S$。

3. $N(2,2,0)$代数与Q-代数、CI-代数及量子B-的关系

定理 3.1 若$(S,*,\Delta,0)$是一个$N(2,2,0)$代数，$\forall x,y\in S$，则在半群$(S,*,0)$中有下列结论成立：

(1) $x*x=0 \Rightarrow x*0=x; x*y=y*x$；

(2) $x*0=0 \Rightarrow x \in E_S; x*y=y$。

证明 (1) 由 $x*x=0 \Rightarrow x*0=x*(x*x)=(x*x)*x=0*x=x$；

$x*x=0 \Rightarrow x*0=x \Rightarrow x*y=x*(y*0)=y*(x*0)=y*x$；

(2) $x*0=0 \Rightarrow x^2=x*x=0*x=x \Rightarrow x \in E_S$；

$x*y=x*(0*y)=(x*0)*y=0*y=y$，即 $(S,*,0)$ 是一个右零半群。

定义 3.1 [8] 设 X 是带常元 0 的一个非空集，在 X 上定义二元运算 Δ，满足下列公理：$\forall x,y,z \in X$，

(Q_1) $x\Delta x=0$；

(Q_2) $x\Delta 0=x$；

(Q_3) $(x\Delta y)\Delta z=(x\Delta z)\Delta y$

的代数系统 $(X,\Delta,0)$ 称为 Q-代数。

例 3 设 $X=\{0,1,2\}$，在 X 上定义二元运算如下表 5：

Table 5. Example of Q-algebras
表 5. Q 代数示例

Δ	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

不难验证 $(X,\Delta,0)$ 是一个 Q-代数。

根据 $N(2,2,0)$ 代数的性质和定义 2.3 易得：

定理 3.2 在 $N(2,2,0)$ 代数 $(S,*,\Delta,0)$ 中，如果 $\forall x \in S, x\Delta x=0$，则半群 $(S,\Delta,0)$ 是一个 Q-代数。

定义 3.2 [9] [10] 设 X 是带常元 0 的一个非空集，在 X 上定义二元运算 $*$，满足下列公理：$\forall x,y,z \in X$，

(CI_1) $x*x=0$；

(CI_2) $0*x=x$；

(CI_3) $x*(y*z)=y*(x*z)$

的代数系统 $(X,*,0)$ 称为 CI-代数。

例 4 设 $X=\{0,a,b\}$，在 X 上定义二元运算如下表 6：

Table 6. Example of CI-algebras
表 6. CI 代数示例

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	0	0	b	b
b	0	a	0	a
c	0	0	0	0

可以验证 $(X,*,0)$ 是一个 CI-代数。

由定理 2.1 容易得到：

定理 3.3 在 $N(2,2,0)$ 代数 $(S,*,\Delta,0)$ 中，如果 $\forall x\in S, x*x=0$，则有下列结论成立：

(I) $(S,*,0)$ 是一个 Q-代数；

(II) $(S,\Delta,0)$ 是一个 CI-代数。

定义 3.3 [11] [12] [13] 设 X 是带有两个二元运算 $\rightarrow$ 和 $\sim$ 的偏序集，如果满足：$\forall x,y,z\in X$，有

$$x\rightarrow(y\sim z)=y\sim(x\rightarrow z) \tag{1}$$

$$x\le y\rightarrow z\Leftrightarrow y\le x\sim z \tag{2}$$

$$y\le z\Rightarrow x\rightarrow y\le x\rightarrow z \tag{3}$$

则称 $(X,\rightarrow,\sim)$ 是一个量子 B-代数。

定理 3.4 设 $(S,*,\Delta,0)$ 是一个 $N(2,2,0)$ 代数上定义关系“$\le$”：

$$x\le y\Leftrightarrow x*y=0 \text{ 或 } y\Delta x=0,$$

如果 $\forall x\in S$，满足 $x*x=0$，则关系“$\le$”是 $(S,*,\Delta,0)$ 上的一个偏序，此时 $N(2,2,0)$ 代数 $(S,*,\Delta,0)$ 就是一个量子 B-代数。

证明：(1) 由 $x*x=0\Rightarrow x\le x$；

(2) $x*y=0=y*x\Rightarrow x*(y*x)=0*x=x\Rightarrow x*0=x$

$$\Rightarrow y=y*0=y*(x*x)=x*(y*x)=x;$$

即 $x\le y, y\le x\Rightarrow x=y$。

(3) 由 $x*y=0, y*z=0\Rightarrow$

$0=0*0=(x*y)*(y*z)=x*(y*y)*z=x*(0*z)=x*z$

因此，$x\le y, y\le z\Rightarrow x\le z$。

于是关系“$\le$”是 $(S,*,0)$ 上的一个偏序。

再由在半群 $(S,*,0)$ 上，$\forall x*y=y\Delta x$，于是

$$x*(y\Delta z)=x*(z*y)=(x*z)*y=y\Delta(x*z),$$

视“$*$”为“$\rightarrow$”，“Δ”为“$\sim$”，则定义 2.2 中条件(1)成立。

由

$$\begin{aligned}&x*x=0\Rightarrow x*0=x*(x*x)=(x*x)*x=0*x=x\\&\Rightarrow x*y=x*(y*0)=y*(x*0)=y*x\end{aligned},$$

从而得到：

$$x*(y*z)=0\Rightarrow y*(x\Delta z)=y*(z*x)=y*(x*z)=x*(y*z)=0,$$

即得到(2) $x\le y\rightarrow z\Leftrightarrow y\le x\sim z$ 成立。

$$y*z=0\Rightarrow(x*y)*(x*z)=x*((x*y)*z)=(x*x)*(y*z)=0*0=0,$$

因此，条件(3) $y\le z\Rightarrow x\rightarrow y\le x\rightarrow z$ 成立。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61561040)。

参考文献

[1] 吴望名. Fuzzy 蕴涵代数[J]. 模糊系统与数学, 1990, 4(1): 56-63.

[2] 徐扬. 格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报, 1993, 28(1): 20-27.

[3] 刘练珍, 王国俊. Fuzzy 蕴涵代数与 MV 代数[J]. 糊系统与数学, 1998, 12(1): 20-25.

[4] 邓方安, 徐扬. 关于 N(2, 2, 0)代数[J]. 西南交通大学学报, 1996, 31(4): 457-463.

[5] 邓方安, 徐扬, 袁俭. N(2, 2, 0)代数的理想与关联理想[J]. 汉中师范学院学报, 1998, 16(1): 6-9.

[6] 邓方安. 关于 N(2, 2, 0)代数的 RC 半群[J]. 山东大学学报(理科版), 2011, 46(6): 8-11.

[7] 陈露. 关于 N(2, 2, 0)代数的中间单位[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2014, 31(3): 287-290.

[8] Neggers, J. and Ahn, S.S. (2001) On Q-Algebras. *International Journal of Mathematics and Mathematics Sciences*, **27**, 749-757.

[9] Meng, B.L. (2009) CI-Algebra. S*cientiae Mathematicae Japonica Online*, 695-701.

[10] Saeid, A.B. (2013) CI-Algebra Is Equivalent to Dual Q-Algebra. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **21**, 1-2. https://doi.org/10.1016/j.joems.2012.08.021

[11] Rump, W. (2013) Quantum B-Algebras. *Central European Journal of Mathematics*, **11**, 1881-1899.

[12] Pan, F. (2019) Dual Quantum B-Algebras. *Soft Computing*, **23**, 6813-6817. https://doi.org/10.1007/s00500-018-03708-3

[13] Saeid, A.R.-A.B. (2015) Relation between Dual S-Algebras and BE-Algebras. *LE Matematiche*, **LXX**, 71-79.