Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 500-507
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105061

The Finite Sum Problem of the Product of Toeplitz Operators on Bergman Spaces

Yin Guan, Huanran Wang, Shuning Cui

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 1025815700@qq.com

Received: Apr. 20th, 2020; accepted: May 11th, 2020; published: May 18th, 2020

Abstract

This paper discusses two Toeplitz operators as T_{f_k}, T_{g_k} in Bergman space. In case $g_k = g_1^{(k)} + g_2^{(k)}$, $g_1^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(k)} z^j$, $g_2^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(k)} z^j \in H^\infty(D)$; $f_k \in L^\infty(D, \mathrm{d}A)$. $f_k(r\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{p<0} f_p^{(k)}(r)\mathrm{e}^{ip\theta}$ $(1 \le k \le N)$. This paper explores the related problems of the sum of the finite products of the two Toeplitz operators as T_{f_k}, T_{g_k} under a large amount of data and calculations. A necessary condition of zero operator is obtained (N).

Keywords

Bergman Space, Toeplitz Operator, Mellin Transform

Bergman空间上的Toeplitz算子的乘积有限和问题

关　印，王焕然，崔姝宁

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连
Email: 1025815700@qq.com

收稿日期：2020年4月20日；录用日期：2020年5月11日；发布日期：2020年5月18日

摘　要

本文讨论了Bergman空间上两个形如T_{f_k}，T_{g_k}的Toeplitz算子，其中假设$g_k = g_1^{(k)} + g_2^{(k)}$，$g_1^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(k)} z^j$，

文章引用: 关印, 王焕然, 崔姝宁. Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的乘积有限和问题[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 500-507. DOI: 10.12677/pm.2020.105061

$g_2^{(k)}=\sum_{j=0}^{\infty}b_j^{(k)}z^j\in H^\infty(D)$；$f_k\in L^\infty(D,\mathrm{d}A)$。$f_k(re^{i\theta})=\sum_{p<0}f_p^{(k)}(r)\mathrm{e}^{ip\theta}\ (1\le k\le N)$。探究Toeplitz算子$T_{f_k}$，$T_{g_k}$的有限乘积有限和的相关问题，分析计算得到了其为零算子的一个必要条件。

关键词

Bergman空间，Toeplitz算子，Mellin变换

1. 引言

Toeplitz 算子的有限乘积有限和问题在算子理论研究中具备着重要的代数意义，算子的乘积问题，是算子理论探究中的热点问题，由于其复杂多变性，通过查阅资料发现，国内许多学者对算子的有限乘积有限和问题的研究有很大兴趣。在文献[1]中证明了下面刻画了两个以有界调和函数为符号的一类算子T_{u_j}，T_{v_j}，并探究了这类算子的有限乘积相加之和$\sum_{j=1}^{N}T_{u_j}T_{v_j}$为零算子和紧算子的等价条件。将上述问题推广到调和 Bergman 空间上的情况相对复杂，Yufeng Lu，Qian Ding 等人[2]在 2017 年经过计算与推广发现，得到关于两类特殊符号的 Toeplitz 算子乘积的有限秩的结论。而对于 Bergman 空间上的有限乘积有限和问题，将其推广到某类特殊符号的 Toeplitz 算子上还有待探究，因此本文对 Bergman 空间上某类符号 Toeplitz 算子的乘积有限和问题进行了推广与计算，进而分析证明得到其为零算子的一个必要条件。

2. 预备知识

在这一部分中，我们介绍了 Berezin 变换和 Mellin 变换，并用第二个变换来表示第一个变换，我们将在下一节中使用这个公式。

定义 2.1 若φ是$[0,1]$上的可积函数，可定义 Mellin 变换：

$$\hat{\varphi}(z)=\int_0^1\varphi(r)r^{z-1}\mathrm{d}r\ .$$

Mellin 变换是半平面$\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$上的有界解析函数。由于三角多项式在$L^2(D,\mathrm{d}A)$中是稠密的，所以有如下极分解表示

$$L^2(D,\mathrm{d}A)=\bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ik\theta}\Re\ ,$$

其中$\Re=\left\{u:D\to C:u(z)=u(|z|),\text{且}\int_0^1 r|u(r)|^2\,\mathrm{d}r<\infty\right\}$，因此对任$f\in L^2(D,\mathrm{d}A)$，有$z=re^{i\theta}\in D$，则$f$的极分解$f(re^{i\theta})$为

$$f(re^{i\theta})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(r)\mathrm{e}^{ik\theta},\ f_k\in\Re$$

Mellin 变换是由其零点所唯一确定，并有以下结论。

引理 2.1 [3]若 φ 为 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上的有界解析函数，在两两不相同的点列 $z_1,z_2,\cdots$ 上取值为零，若

1) $\inf\{|z_n|\}>0$，

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)=\infty$，

则 φ 在半平面 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上恒等于零。

注解：我们经常用到引理 2.1 的一种特殊情况：若 φ 为 $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ 上的有界解析函数，若存在自然数序列 $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ 使得

$$\hat{\varphi}(n_k)=0\text{ 且 }\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n_k}=\infty,$$

则 $\varphi\equiv 0$。

定义 2.2 Mellin 卷积的定义，可用 $f*_M g$ 表示 f 和 g 的 Mellin 卷积：

$$(f*_M g)(r)=\int_r^1 f\left(\frac{r}{t}\right)g(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

其中乘法 $*_M$ 是通过上述变量的变化与正规卷积有关的。很容易看出 Mellin 变换将卷积转化为点积，即：

$$(f*_M g)(r)=\hat{f}(r)\hat{g}(r),$$

如果 f 和 g 在 $L^1([0,1],r\mathrm{d}r)$ 中，则 $f*_M g$ 也是。

定义 2.3 若 $f\in L^1(D,\mathrm{d}A)$，f 的 Berezin 变换记为 Bf：

$$(Bf)(z)=\langle fk_z,k_z\rangle=\int_D f(\omega)\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{|1-\bar{z}\omega|^4}\mathrm{d}A(\omega),\ (z\in D).$$

本文要用到 Berezin 变换的极坐标表示，Čučković Ž 给出下述定理。

引理 2.2 [4] 若 $f\in L^2(D,\mathrm{d}A)$，对 $z=R\mathrm{e}^{i\theta}$，则 f 的 Berezin 变换 Bf 有如下的极坐标表达式：

$$(Bf)(z)=\langle fk_z,k_z\rangle=2\left(1-R^2\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}R^{|k|}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(n+|k|)\hat{f}_k(2n+|k|)R^{2(n-1)}\right]\mathrm{e}^{ik\theta}$$

下面我们来描述 $L^1(D,\mathrm{d}A)$ 上关于 Berezin 变换的不动点问题，这比在 $C(\bar{D})$ 上的不动点问题困难的多。回顾复平面上的 Laplacian (拉普拉斯)变换为：

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}.$$

在处理 Berezin 变换时，使用如下的不变拉普拉斯变换将更为方便：

$$\tilde{\Delta}f(z)=\left(1-|z|^2\right)^2\Delta f(z),$$

其中 f 是 D 上的任意一个二次可微函数。

引理 2.3 若 f 在 D 上是二次可微的，则

$$\tilde{\Delta}(f\circ\varphi)=(\tilde{\Delta}f)\circ\varphi\text{，对任意 }\varphi\in Aut(D).$$

其中 $Aut(D)$ 表示 D 的全纯自同构群，任给 $z\in D$，存在唯一 $\varphi\in Aut(D)$ 满足：φ 是对合的，即 $\varphi\circ\varphi=I$ 为恒等映射，并且 $\varphi(0)=z$，$\varphi(z)=0$。

定义 2.4 一个解析函数 $f:D\to C$，如果满足

$$\|f\| = \sup\left\{\left|f'(z)\right|\left(1-|z|^2\right)\middle| z\in D\right\} < \infty .$$

则称为函数 f 为 Bloch 函数。

为了避免下文中的重复，我们认为如果函数的极分解只有负幂项，则称它具有性质(N)。

3. 主要结果

定理 3.1 假设 $g_k = g_1^{(k)} + \overline{g_2^{(k)}}$，$g_1^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(k)} z^j$，$g_2^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(k)} z^j \in H^\infty(D)$；$f \in L^\infty(D, \mathrm{d}A)$ 且 $f_k\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \sum_{p<0} f_p^{(k)}(r)\mathrm{e}^{ip\theta}\,(1\le k\le N)$。若 $\sum_{k=1}^{N} T_{f_k}T_{g_k} = 0$，则 $\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{p<0} f_p^{(k)}(r)\right]\left[\sum_{0\le j\le -p} a_j^{(k)} r^j\right] \equiv 0$。

证明：对 $1\le k\le N$，

$$\begin{aligned} T_{f_k}T_{g_k}k_\omega(z) &= T_{f_k}T_{g_k^{(1)}+\overline{g_k^{(2)}}}k_\omega(z) \\ &= T_{f_k}T_{g_k^{(1)}}k_\omega(z) + T_{f_k}T_{\overline{g_k^{(2)}}}k_\omega(z) \\ &= T_{fg_k^{(1)}}k_\omega(z) + \overline{g_2^{(k)}(\omega)}T_{f_k}k_\omega(z) \end{aligned} .$$

进而，

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=1}^{N} T_{f_k}T_{g_k}k_\omega, k_\omega\right\rangle &= \sum_{k=1}^{N}\left\langle T_{f_k}T_{g_k}k_\omega, k_\omega\right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{N}\left[\left\langle T_{f_k g_k^{(1)}}k_\omega, k_\omega\right\rangle + \overline{g_2^{(k)}(\omega)}\left\langle T_{f_k}k_\omega, k_\omega\right\rangle\right]. \\ &= \sum_{k=1}^{N}\left[B\left(f_k g_1^{(k)}\right) + \overline{g_2^{(k)}}Bf_k\right](\omega) \end{aligned}$$

由 $\sum_{k=1}^{N} T_{f_k}T_{g_k} = 0$，得

$$\sum_{k=1}^{N} B\left(f_k g_1^{(k)}\right)(\omega) = -\sum_{k=1}^{N}\overline{g_2^{(k)}}(\omega)B(f_k)(\omega)\ \ (\omega\in D).$$

由引理 2.2，令 $\omega = R\mathrm{e}^{i\theta}$，得

$$B(f_k)(\omega) = 2\left(1-R^2\right)^2\sum_{P=-\infty}^{+\infty} R^{(p)}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(n+|p|\right)\hat{f}_p^k\left(2n+|p|\right)R^{2n-1}\right]\mathrm{e}^{ip\theta},$$

而 $f_k\,(1\le k\le N)$ 的极分解式中关于 $\mathrm{e}^{i\theta}$ 的负幂项系数为 0，故系数函数对应的 Mellin 变换为 0，进而关于 $\mathrm{e}^{ip\theta}\,(p\ge 0)$ 的系数为 0，即

$$B(f_k)(\omega) = 2\left(1-R^2\right)^2\sum_{p<0} R^{|p|}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(n+|p|\right)\hat{f}_p^{(k)}\left(2n+|p|\right)R^{2n-2}\right]\mathrm{e}^{ip\theta},$$

进而 $B(f_k)$ 具有性质(N) ($1\le k\le N$)。

另一方面，记

$$\overline{g_2^{(k)}}\left(R\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \sum_{n\ge 0}\overline{b_n^{(k)}}R^n\mathrm{e}^{-in\theta} = \sum_{n\le 0}\overline{b_{-n}^{(k)}}R^{-n}\mathrm{e}^{in\theta}, R\mathrm{e}^{i\theta}\in D, 1\le k\le N,$$

综上，$\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)$ 具有性质(N)，因而 $\sum_{k=1}^{N}\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)$ 具有性质(N)。由 $\sum_{k=1}^{N} B\left(f_k g_1^{(k)}\right) = -\sum_{k=1}^{N}\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)$，

则 $\sum_{k=1}^{N} B\left(f_k g_1^{(k)}\right)$ 具有性质(N)，往证 $\sum_{k=1}^{N} f_k g_1^{(k)}$ 具有性质(N)。

令 $G_m(z)=\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{z}{4j(j+1)}\right)$，由引理 2.3，$G_m(\tilde{\Delta})B\left(\sum_{k=1}^{N} f_k g_1^{(k)}\right)$ 在 $L^1(D,\mathrm{d}A)$ 范数下收敛到 $\sum_{k=1}^{N} f_k g_1^{(k)}$，

对 $\sum_{k=1}^{N} B\left(f_k g_1^{(k)}\right)=-\sum_{k=1}^{N}\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)$ 两边求不变 Laplacian 变换 $\tilde{\Delta}$ 得，

$$\tilde{\Delta}B\left(\sum_{k=1}^{N} f_k g_1^{(k)}\right)=-\tilde{\Delta}\left[\sum_{k=1}^{N}\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)\right]=-\sum_{k=1}^{N}\tilde{\Delta}\left[\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)\right].$$

计算可得，

$$\tilde{\Delta}\left[\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)\right]=\left(1-|z|^2\right)\overline{g_2^{(k)}}\left(1-|z|^2\right)\frac{\partial}{\partial z}B(f_k)+\overline{g_2^{(k)}}\tilde{\Delta}B(f_k).$$

由 $g_2^{(k)}$ 解析，故 $\overline{g_2^{(k)}}$ 具有性质(N)；

又

$$\begin{aligned}
&\left(1-|z|^2\right)\frac{\partial}{\partial z}B(f_k)\\
&=\left(1-|z|^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1-|z|^2\right)^2\int_D\frac{f_k(\xi)}{\left(1-\bar{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\bar{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)\right]\\
&=(-2\bar{z})\left(1-|z|^2\right)^2\int_D\frac{f_k(\xi)}{\left|1-\bar{\xi}z\right|^4}\mathrm{d}A(\xi)+\left(1-|z|^2\right)^3\int_D\frac{2\bar{\xi}f_k(\xi)}{\left(1-\bar{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\bar{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)
\end{aligned}$$

因为 $B(f_k)$ 具有性质(N)。故 $(-2\bar{z})B(f_k)$ 极分解表达式中有 $\mathrm{e}^{-i2\theta},\mathrm{e}^{-i3\theta},\cdots,\mathrm{e}^{-ip\theta},\cdots$ （$p\geq 2$）。

$$\begin{aligned}
&\int_D\frac{2\bar{\xi}f_k(\xi)}{\left(1-\bar{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\bar{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)\\
&=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(2r\mathrm{e}^{-i\theta}\right)\left(\sum_{p<0}f_p^{(k)}(r)\mathrm{e}^{ip\theta}\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)z^n r^n\mathrm{e}^{-in\theta}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\bar{z}^m r^m\mathrm{e}^{im\theta}\right]\frac{r}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=\sum_{p<0}\sum_{m,n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(m+1)z^n\bar{z}^m\int_0^1 r^{2+m+n}f_p^{(k)}(r)\mathrm{d}r\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i[-(n+1)+p+m]}\mathrm{d}\theta\\
&=\sum_{p<0}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+2-p)z^n\bar{z}^{(n+1)-p}\hat{f}_p^{(k)}(2n+4-p)
\end{aligned}$$

所以 $\tilde{\Delta}\left[\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)\right]$ 具有性质(N)。$=(-2\bar{z})\left(1-|z|^2\right)^2B(f_k)(z)+\left(1-|z|^2\right)^3\int_D\frac{2\bar{\xi}f_k(\xi)}{\left(1-\bar{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\bar{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}B(f_k)(z)=\tilde{\Delta}\langle f_k k_z,k_z\rangle&=\tilde{\Delta}\int_D\frac{f_k(\xi)}{\left(1-z\bar{\xi}\right)^2\left(1-\bar{z}\xi\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)\\
&=\left(1-|z|^2\right)^2\int_D f_k(\xi)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\left(1-z\bar{\xi}\right)^2}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[\frac{1}{\left(1-\bar{z}\xi\right)^2}\right]\mathrm{d}A(\xi)\\
&=\left(1-|z|^2\right)^2\int_D f_k(\xi)\frac{2\bar{\xi}}{\left(1-z\bar{\xi}\right)^3}\cdot\frac{2\xi}{\left(1-\bar{z}\xi\right)^3}\mathrm{d}A(\xi)
\end{aligned}$$

$$=\left(1-|z|^2\right)^2\int_0^1\int_0^{2\pi}4r^2\left(\sum_{p<0}f_p^{(k)}(r)\mathrm{e}^{ip\theta}\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\overline{z}^n r^n\mathrm{e}^{in\theta}\right]$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2}(m+1)(m+2)\overline{z}^m r^m\mathrm{e}^{-im\theta}\right]\frac{r}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\left(1-|z|^2\right)^2\sum_{p<0}\sum_{m,n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(m+1)(m+2)\overline{z}^n z^m\int_0^1 r^{n+m+3}f_p^{(k)}(r)\mathrm{d}r\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(n-m)+p}\mathrm{d}\theta$$

$$=\left(1-|z|^2\right)^2\sum_{p<0}\sum_{m=0}^{\infty}(-p+m+2)(m+1)(m+2)\overline{z}^{(-p)+m}z^m\hat{f}_p^{(k)}(2m-p+4)$$

进一步，$\overline{g_2^{(k)}}\tilde{\Delta}B(f_k)$ 具有性质(N)。其极分解为关于 $\mathrm{e}^{-i2\theta},\mathrm{e}^{-i3\theta},\cdots,\mathrm{e}^{-ip\theta}(p\ge 2),\cdots$ 的表达式。综合以上计算结果，$\tilde{\Delta}\left[\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)\right]$ 具有性质(N)。且极分解表达式的首项为关于 $\mathrm{e}^{-i2\theta}$ 的单项式。进而 $-\sum_{k=1}^{N}\tilde{\Delta}\left(\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)\right)$ 具有性质(N)且首项为关于 $\mathrm{e}^{-i2\theta}$ 的单项式。

下证 $\tilde{\Delta}\overline{g_2^{(k)}}B(f_k)\in L^2(D,dA)(1\le k\le N)$。

因为 $g_2^{(k)}$ 为 Bloch 函数，故 $\left(1-|z|^2\right)\overline{g_2^{(k)}}$ 有界。因为 Berezin 变换把 $L^2(D,\mathrm{d}A)$ 映成 $L^2(D,\mathrm{d}A)$。故 $-2\overline{z}B(f_k)\in L^2(D,\mathrm{d}A)(1\le k\le N)$。

另一方面，

$$\left(1-|z|^2\right)^3\left|\int_D\frac{\overline{\xi}f(\xi)}{\left(1-\overline{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\overline{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)\right|$$

$$\le\left(1-|z|^2\right)^3\int_D\frac{|f(\xi)|}{\left(1-\overline{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\overline{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)$$

$$\le\left(1-|z|^2\right)^3\int_D\frac{|f(\xi)|}{(1-|z|)\left(1-\overline{\xi}z\right)^4}\mathrm{d}A(\xi)$$

$$\le 2B(|f|)(z)$$

故 $\left(1-|z|^2\right)\frac{\partial}{\partial z}B(f)\in L^2(D,\mathrm{d}A)$。

$$\tilde{\Delta}B(f_k)(z)=\left(1-|z|^2\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}B(f_k)(z)$$

$$=\left(1-|z|^2\right)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[-2\overline{z}B(f_k)(z)+2\left(1-|z|^2\right)^3\int_D\frac{\overline{\xi}f(\xi)}{\left(1-\overline{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\overline{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)\right]$$

$$=\left(1-|z|^2\right)\left[(-2)B(f_k)(z)+(-2\overline{z})\frac{\partial}{\partial\overline{z}}Bf_k(z)\right.$$

$$+(-6z)\left(1-|z|^2\right)\int_D\frac{\overline{\xi}f(\xi)}{\left(1-\overline{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\overline{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)$$

$$\left.+2\left(1-|z|^2\right)^3\int_D\frac{2|\xi|^2f(\xi)}{\left|1-\overline{\xi}z\right|^6}\mathrm{d}A(\xi)\right]$$

$$=(-2)\left(1-|z|^2\right)B\left(f_k\right)(z)+(-2\bar{z})\left(1-|z|^2\right)\frac{\partial}{\partial z}B\left(f_k\right)(z)$$
$$+(-6z)\left(1-|z|^2\right)^3\int_D\frac{\bar{\xi}f(\xi)}{\left(1-\bar{\xi}z\right)^3\left(1-\xi\bar{z}\right)^2}\mathrm{d}A(\xi)$$
$$+2\left(1-|z|^2\right)^4\int_D\frac{2|\xi|^2f(\xi)}{\left|1-\bar{\xi}z\right|^6}\mathrm{d}A(\xi)$$

由前面已证结果中的前三项都在 $L^2(D,\mathrm{d}A)$ 中，而

$$\begin{aligned}&\left|\left(1-|z|^2\right)^4\int_D\frac{2|\xi|^2f_k(\xi)}{\left|1-\bar{\xi}z\right|^6}\mathrm{d}A(\xi)\right|\\&\le 2\left(1-|z|^2\right)^4\int_D\frac{\left|f_k(\xi)\right|}{(1-|z|)^2\left|1-\bar{\xi}z\right|^4}\mathrm{d}A(\xi)\\&\le 8\left(1-|z|^2\right)^2\int_D\frac{\left|f_k(\xi)\right|}{\left|1-\bar{\xi}z\right|^4}\mathrm{d}A(s)=8B\left|f_k\right|(z)\end{aligned}.$$

所以 $\tilde{\Delta}\left[\overline{g_2^{(k)}}B\left(f_k\right)\right]\in L^2(D,\mathrm{d}A)\,(1\le k\le N)$，故 $\sum_{k=1}^{N}\tilde{\Delta}\left[\overline{g_2^{(k)}}B\left(f_k\right)\right]\in L^2(D,\mathrm{d}A)$。

进一步可知，$F_m(z)=G_m\left(\tilde{\Delta}\right)B\left[\sum_{k=1}^{N}f_kg_1^{(h)}\right]\in L^2(D,\mathrm{d}A)$ 且具有性质(N)。进而，在 $L^1(D,\mathrm{d}A)$ 中，$F_m(z)$ 依范数收敛 $\left(fg_1\right)(z)$，而 $\sum_{k=1}^{N}f_kg_1^{(k)}$ 的极分解式中，只有 $\mathrm{e}^{ik\theta}$ 负幂项，进而 fg_1 具有性质(N)。而 $\sum_{k=1}^{N}f_kg_1^{(k)}(z)=\sum_{p<0}\sum_{j\ge0}\sum_{k=1}^{N}a_j^{(k)}f_p^{(k)}r^j\mathrm{e}^{i(j+p)\theta}\left(z=r\mathrm{e}^{i\theta}\right)$ 只有负幂项，即当 $j+p\le0$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{p<0}f_p^{(k)}(r)\right]\left[\sum_{0\le j\le -p}a_j^{(k)}r^j\right]\equiv0,\ (0\le r<1)$$

上面证明了某一类符号的 Toeplitz 算子有限乘积有限和为零算子的必要条件。下面我们来思考其逆否命题是否成立。

推论 3.2 假设 $g_k=g_1^{(k)}+\overline{g_2^{(k)}}$，其中 $g_1^{(k)}(z)=\sum a_j^{(k)}z^j$，$g_2^{(k)}(z)=\sum b_j^{(k)}z^j\in H(D)$，$f_k\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)=\sum_{p<0}f_p^{(k)}(r)\mathrm{e}^{ip\theta}\,(1\le k\le N)$。若 $\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{P<0}f_p^{(k)}(r)\right]\left[\sum_{0\le j\le p}a_j^{(k)}r^j\right]\ne0$，则 $\sum_{k=1}^{N}T_{f_k}T_{g_k}\ne0$。

例 3.1 若 $f(z)=z^2\bar{z}^4+z\bar{z}^4,g=g_1+\overline{g_2}$，其中 $g_1(z)=1+z,g_2(z)\in H^\infty(D)$，则 $T_fT_g\ne0$。

4. 结论

本文讨论 Bergman 空间上两个形如 T_{f_k}，T_{g_k} 的 Toeplitz 算子，其中 $g_1^{(k)}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j^{(k)}z^j$，$g_2^{(k)}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j^{(k)}z^j$，$f_k\in L^\infty(D,\mathrm{d}A)$，$f_k\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)=\sum_{p<0}f_p^{(k)}(r)\mathrm{e}^{ip\theta}\,(1\le k\le N)$。在进行大量的查阅资料和推算下，探究 Toeplitz 算子 T_{f_k}，T_{g_k} 的乘积有限和的相关问题，得到以下结论：

1) 假设 $g_k = g_1^{(k)} + g_2^{(k)}$，若 $\sum_{k=1}^{N} T_{f_k} T_{g_k} = 0$，则 $\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{p<0} f_p^{(k)}(r)\right]\left[\sum_{0\le j\le -p} a_j^{(k)} r^j\right] \equiv 0$。

2) 假设 $g_k = g_1^{(k)} + \overline{g_2^{(k)}}$，若 $\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{P<0} f_p^{(k)}(r)\right]\left[\sum_{0\le j\le p} a_j^{(k)} r^j\right] \ne 0$，则 $\sum_{k=1}^{N} T_{f_k} T_{g_k} \ne 0$。

参考文献

[1] Choe, B.R., Koo, H. and Lee, Y.J. (2008) Sums of Toeplitz Products with Harmonic Symbols. *Revista Matemática Iberoamericana*, **24**, 43-70. https://doi.org/10.4171/rmi/529

[2] Lu, Y., Liu, L., Ding, Q., *et al.* (2017) Zero Products and Finite Rank of Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **37**, 325-334.

[3] Remmert, R. (1998) Classical Topics in Complex Funtion Theory. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York.

[4] Čučković, Ž. (2003) Berezin versus Mellin. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **287**, 234-243. https://doi.org/10.1016/s0022-247x(03)00546-8