Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 524-529
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105064

Solving Mathematical Problems by Structural Analysis Method and Formal Unification Method

Yaoge Wang, Guozhong Cui, Congzhou Guo

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: wyg711218@163.com

Received: Apr. 21st, 2020; accepted: May 13th, 2020; published: May 20th, 2020

Abstract

The study of advanced mathematics cannot be separated from solving problems. Problem-solving is the process of solving a problem. Advanced mathematics has a complete theoretical system, but there is no corresponding theoretical framework and unified method for solving problems. This paper puts forward the problem-solving theory of structural analysis and formal unification, and divides the problem-solving into two stages: the first stage is to use "structural analysis method" to explore the structure of the topic and establish "problem solving ideas"; the second stage is to use "formal unification method" to find the skills of problem solving and complete the "problem solving process".

Keywords

Advanced Mathematics, Problem Solving Theory, Structural Analysis Method, Problem Solving Ideas, Unified Form Method, Problem Solving Process

利用"结构分析–形式统一法"求解数学题目

王耀革，崔国忠，郭从洲

信息工程大学基础部，河南 郑州
Email: wyg711218@163.com

收稿日期：2020年4月21日；录用日期：2020年5月13日；发布日期：2020年5月20日

摘　要

高等数学的学习离不开解题，解题的过程就是解决问题的过程，高等数学有完整的理论系统，但是解题

文章引用: 王耀革, 崔国忠, 郭从洲. 利用"结构分析–形式统一法"求解数学题目[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 524-529.
DOI: 10.12677/pm.2020.105064

却没有相应的理论框架和统一的方法．本文提出“结构分析－形式统一法”解题方法，将解题分为两个阶段：第一阶段：利用“结构分析法”，探测题目的结构，确立“解题思路”；第二阶段：利用“形式统一法”，寻找解题的技巧，完成“解题过程”。

关键词

高等数学，解题方法，结构分析法，解题思路，形式统一法，解题过程

1. 引言

著名的美籍匈牙利数学家波利亚把善于解题作为掌握数学的一个重要标志，他有一句名言——“掌握数学就意味着善于解题”[1]。解题是对概念、定理的继续学习，是对方法的继续熟练，是一种思维活动，是由思想指导的。因此，缺乏理论自觉的解题实践会流于盲目或简单重复，为什么会有那么多的数学学困生？为什么解题现实中会有很多解题的误区？原因可能是多方面的，但与我们缺少“解题方法的理论”科学指导有关。鉴于此，我们经过深入的研究和长期实践，提炼出“结构分析－形式统一法”[2]解题理论，将解题分为两个阶段，第一阶段，利用“结构分析法”，分析题目的结构，确立题目特点，类比已知知识，形成“解题思路”；第二阶段，利用“形式统一”的技巧，将题目的条件或结论转化为相关已知知识的标准形式，完成解题的具体过程。

2. 解题的第一阶段：利用结构分析法，确立解题思路

所谓解题思路就是解决问题的思考方向，思考用什么知识(哪个概念或定理)解决问题，即主要解决“用什么的问题”。确立解题思路是解决问题过程中最关键的一步，如何确立解题思路？我们提出“结构分析法”，解决“思路确立”问题。

结构分析法是指从分析题目(条件和结论)的结构出发，分析题目条件和结论的结构特点，类比已知的知识(概念或定理)，通过对比条件和结论的结构特点，选择与其相似或相近的理论解决问题，形成解题思路，可以概括为：**分析结构，研析特点，类比已知，确立思路**。这里的关键步骤是分析结构，分析的内容包含题目的形式、类型、条件和要求解(证明)的结论的结构，结构分析的过程是一个激活知识、检索知识、提取知识、组织知识的过程。分析题目的方法可以采用从大到小逐次分析，即先对题目进行整体分析，然后逐次把大的问题分解为一些小问题，分析问题的实质，直捣问题的关键，为解题思路的确立提供有益的帮助。

3. 解题的第二阶段：利用形式统一法，完成解题过程

解题的第一阶段是“因题制宜”地选择正确的解题思路，解决了“用什么的问题”，为了实现解题目标还需要使用有效的解题方法，制定明确的解题策略，即解决“如何用的问题”。本文中，我们提出**“形式统一法”**来完成解题技术路线的设计。

形式统一法就是将题目中的条件或要证明的结论，通过与已知的概念和定理的形式作类比，如果题目属于熟悉的类型，就直接用相应的方法去解决；如果题目不属于熟悉的类型，那我们利用形式统一法将研究对象向熟悉类型的形式进行转化，不能直接转化为熟悉的类型，我们可以将其分解成若干小问题，

使每一个小问题都是熟悉的，或者揭示问题的深层结构，使问题的实质是熟悉的，还可以多次使用形式统一，不间断的变形习题，最终化为熟悉的问题，从而利用已知的定理和结论完成具体的解题过程和步骤，可以概括为：**形式统一，设计路线**。

4. 应用案例

例 1 [3] 求极限：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$。

结构分析 结构特点：所求函数极限的结构为三角函数的分式结构，分子和分母是不同的三角函数，且 $x\to\frac{\pi}{3}$ 时，分子、分母均趋于零。类比已知：在自变量过程中，分子分母同时趋近与零，且与三角函数有关，已知的极限是第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。确立思路：利用第一个重要极限求解。方法设计：利用形式统一法，首先将分子分母中的三角函数都统一为 $x-\frac{\pi}{3}$ 的函数，其次，重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的自变量变化过程是 $x\to 0$，本题是 $x\to\frac{\pi}{3}$，因此可用变量代换将形式统一到第一个重要极限的形式，再利用第一个重要极限求解。

解法 1 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}$ (第 1 次形式统一：分子分母中的变量形式统一)

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}$ (第 2 次形式统一：作变量代换，使 $x\to\frac{\pi}{3}$ 转化成第一个重要极限所需的变量极限形式 $t\to 0$)

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{1-\cos t}{t}+\sqrt{3}\frac{\sin t}{t}}$ (第 3 形式统一：分子分母同除以 t，转化成重要极限形式)

由于 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}t^2}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{2}=0$，因此，利用第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\frac{1}{0+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解法 2 结构特点：$\frac{0}{0}$ 型极限问题。类比已知：可以洛必达法则。于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin x}=\frac{\cos 0}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 2 (全国大学生数学竞赛第五届预赛试题) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$。

结构分析 结构特点：所求函数极限的结构为 1^∞ 型极限问题。类比已知：这个结构特点是第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 所处理的对象特点。确立思路：利用第二个重要极限求解。方法设计：利用形式统一法。具体的，$\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$ 的指数部分 n 是 ∞，底 $1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}$ 中已经具备 1，$\sin\pi\sqrt{1+4n^2}$ 虽是无穷小，但是 $\pi\sqrt{1+4n^2}$ 是无穷大，这与我们常用的无穷小 $\sin x\,(x\to0)$ 形式不同，需要把它转化成无穷小。根据正弦函数的性质，$\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)$，这样 $\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi$ 就转化成无穷小，但是，这样的无穷小不能满足我们处理 1^∞ 型极限问题中指数部分的需要，因此进一步将 $\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi$ 分子有理化处理，得

$$\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$$

这样就将原式转化成 $1+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是所需无穷小的形式。指数部分相应的需要转化处理成 $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ 的形式。然后利用海涅定理，将数列极限转化为函数极限，使用第二个重要极限即可求解。

解 由于 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$

故，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n$

由海涅定理，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}\cdot x\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}}}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4x^2}+2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi\cdot x}{\sqrt{1+4x^2}+2x}}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}},$$

故，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$。

例 3 [3] 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}$。

结构分析 结构特点：所求函数极限的结构属于 $\dfrac{0}{0}$ 型极限问题，且涉及三类基本初等函数——幂函数、三角函数和指数函数。类比已知：虽然属于 $\dfrac{0}{0}$ 型极限问题，但是用洛必达法则很麻烦，而已知的其它求解极限方法中只有泰勒公式可以将不同类型的函数形式统一成多项式的形式。确立思路：利用泰勒公式求解。方法设计：利用形式统一法，将题目中的三角函数和指数函数都利用泰勒公式转化为由幂函数构成的多项式，这样所求极限涉及的函数类型就只有幂函数，又由于 $x\to0$ 时 $\sin x\sim x$，因此分母 $x^3\sin x$ 等价于 x^4，根据形式统一原则，$\cos x$ 和 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 在利用泰勒公式展开时，只需展到 x^4 的 Peano 型余项即可。

解 由 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)$，得 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)$，

又有 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)$，得 $\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)}{x^4}=-\frac{1}{12}$。

例 4 [4] 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在。

结构分析 题型结构：对二元函数极限不存在结论的验证。类比已知：验证多元函数极限 $\lim\limits_{P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)}f(P)$ 不存在常用的方法是让 $P(x,y)$ 取不同的方式趋于 $P(x_0,y_0)$。确立思路：寻找 $P(x,y)$ 趋于 $P(x_0,y_0)$ 特殊的方式，使得极限不存在。寻找有效的特殊路径的很难，我们利用：形式统一法，观察函数的结构，分子和分母中相同的项为 x^2y^2，不同的一项为 $(x-y)^2$，我们将 $(x-y)^2$ 的结构统一成 x^2y^2 的形式，只需令 $x-y=kxy$，即取 $y=\frac{x}{1+kx}$ （当 $x\to0$ 时，显然 $y\to0$），将分子和分母统一成一样的形式。

证明 取 $y=\frac{x}{1+kx}$，$x\to0$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{y=\frac{x}{1+kx}\\ x\to0}}\frac{x^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{1}{1+k^2}.$$

该极限随 k 的不同而不同，故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在。

例 5 计算 $I=\iint_D\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y):|x|+|y|\le1\}$。

结构分析 首先分析被积函数的结构，被积函数的分子 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ 和分母 $\sqrt{x+y+3}$ 涉及到两类因子 $(x-y)$ 和 $(x+y)$；然后分析积分区域 $D=\{(x,y):|x|+|y|\le1\}$，实际是 $x-y=\pm1$ 和 $x+y=\pm1$ 所围成的区域，即积分区域也涉及到因子 $(x-y)$ 和 $(x+y)$。因此，可以利用变量代换 $\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}$，简化 D 的结构为 $D_{uv}:\begin{cases}-1\le u\le1\\ -1\le v\le1\end{cases}$，进而简化计算。

解法 1 作变换 $\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}$，$D$ 转化为 $D_{uv}=\{(u,v):-1\le u\le1,-1\le v\le1\}$，且 $J=-1/2$，故

$$I=\frac{1}{2}\iint_{D_{uv}}\frac{uv}{\sqrt{u+3}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u}{\sqrt{u+3}}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}v\mathrm{d}v=0.$$

解法 2 对积分结构进行深入观察，如果注意到被积函数和积分区域的轮换对称性质，利用这个性质使计算会更简单。

记 $f(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x+y+3}},g(x,y)=\frac{y^2}{\sqrt{x+y+3}}$，则 $f(x,y)=g(y,x)$，又区域 D 关于 x、y 轮换对等，即 x 换成 y，对应的 y 换成 x 时，区域不变，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因而，故 $I=0$。

5. 结束语

数学解题是一种创造性活动。谁也无法教会我们所有的题目，重要的是通过有限道题的学习去领悟那种解无限道题的数学机智[5]。正确的结构分析能为题意的本质理解与思路的确立创造成功的条件，而形式统一法又为我们提供了解题的技巧，是数学研究、分析和求解问题的重要方法，所以，结构分析－形式统一法是一种行之有效的解题方法。这里利用结构分析法和形式统一法仅给出了高等数学课程中的几个题目的解题思路和具体的方法设计，只希望通过几个题目的思考和训练，优化认知结构、提高思维能力、增强数学能力，学会“数学的思维”，养成良好的数学解决问题的方式和习惯，培养坚实的数学素养。

基金项目

国家自然科学基金(41471314)；兵种级教学成果预研项目。

参考文献

[1] 波利亚. 怎样解题[M]. 阎育苏, 译. 北京: 科学出版社, 1982.
[2] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(一) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.
[3] 汤家凤. 高等数学辅导讲义[M]. 北京: 中国原子能出版社, 2018.
[4] 同济大学数学系. 《高等数学》(第七版下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[5] 罗增儒. 中学数学解题的理论与实践[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2008.