Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(7), 638-647
Published Online July 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.107077

Hans汉斯

A Strong Convergence Theorem for a General System of Variational Inclusions in Banach Spaces

Yinyan Zhu

College of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 1628419577@qq.com

Received: Jun. 20th, 2020; accepted: Jul. 9th, 2020; published: Jul. 16th, 2020

Abstract

In this paper, a general system of variational inclusion in Banach spaces is introduced. An iterative method for finding solutions of a general system of variational inclusions with inverse-strongly accretive mapping and common set of fixed points for a λ-strict pseudocontraction is established. Under the suitable conditions, by forward-backward splitting method, it is proved that there is strong convergence theorem for the problem in uniformly convex and q-uniformly smooth Banach spaces.

Keywords

Forward-Backward Spliting Method, General Systems of Variational Inclusions, q-Uniformly Smooth Banach Spaces, λ-Strict Pseudocontraction

Banach空间中变分包含组问题的强收敛性

朱玲艳

云南财经大学，统计与数学学院，云南 昆明
Email: 1628419577@qq.com

收稿日期：2020年6月20日；录用日期：2020年7月9日；发布日期：2020年7月16日

摘　要

本文主要介绍了Banach空间中的变分包含组问题，同时构造了用于就解决逆强增生映像的变分包含组问题和λ-强伪压缩映射的公共不动点问题解的迭代方法。在一定的条件下，当空间为一致凸且q-一致光滑

文章引用: 朱玲艳. Banach 空间中变分包含组问题的强收敛性[J]. 理论数学, 2020, 10(7): 638-647.
DOI: 10.12677/pm.2020.107077

的Banach空间时，结合经典的向前向后分裂方法，完成了问题解的强收敛性的证明。

关键词

向前－向后分裂方法，变分包含组，q-一致光滑的Banach空间，λ-强伪压缩

1. 引言

假设 E 是一个实的 Banach 空间，变分包含问题就是：找到一个点 $x^* \in E$，使得

$$0 \in Ax^* + Bx^* \tag{1.1}$$

其中 $A: E \to E$ 是一个单值算子，$B: E \to 2^E$ 是一个集值算子。本文研究的变分包含问题是作为凸规划问题，变分不等式问题和极小化问题的特殊形式，从变分包含问题提出之后就被受到高度重视，并且被广泛运用于机器学习，图像恢复等实际问题上(见文献[1])。

针对于变分包含问题经典的求解方法是向前－向后的分裂方法[2] [3] [4]，具体形式如下：对于任意给定的点 $x_1 \in E$，同时 $\lambda > 0$，

$$x_{n+1} = \left(I + \lambda M\right)^{-1}\left(x_n - \lambda A x_n\right), \forall n \geq 1$$

2015 年，文献[5]介绍了 Halpern-type forward-backward 的方法用于求解变分包含问题。找到一点 $x_1 \in E$，使得

$$x_{n+1} = \alpha_n \mu + \lambda_n x_n + \delta_n J_{r_n}^M\left(x_n - r_n A x_n\right) + e_n, \forall n \geq 1 \tag{1.2}$$

其中 $J_{r_n}^M = \left(I + r_n M\right)^{-1}$，$E$ 是一个一致凸且一致光滑的 Banach 空间，$A: E \to E$ 和 $B: E \to 2^E$ 是非线性映射且满足 $\Omega := \left(A + M\right)^{-1} \neq \phi$，他证明了在一定条件下由(1.2)构造的迭代序列强收敛到 $\left(A + M\right)$ 的零点问题。随着变分包含问题研究的深入，人们开始关注变分包含组问题的研究，其中也得到了一些显著的成效(见文献[6])。

在 2018 年，文献[7]考虑了当空间为一致凸且 q-一致光滑的 Banach 空间上的变分包含组解的研究。找到 $\left(u_1, u_2, \cdots, u_l\right) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_l$，使得

$$\begin{cases} 0 \in u_1 - u_2 + \rho_1\left(A_1 u_2 + M_1 u_1\right), \\ 0 \in u_2 - u_3 + \rho_2\left(A_2 u_3 + M_2 u_2\right), \\ \qquad \vdots \\ 0 \in u_l - u_1 + \rho_l\left(A_l u_l + M_l u_l\right) \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $A_i: E \to E$ 并且 $M_i: E \to 2^E$ 是非线性映射($i = 1, 2, \cdots, l$)，当满足一定的条件时，他们证明其构造的迭代序列强收敛到变分包含组问题的解。

受以上文章的启发，本文主要研究变分包含组解的强弱收敛性，与以往成果相比我们将空间延拓到了一致凸且 q-一致光滑的 Banach 空间上，并且在一定条件下利用向前向后分裂方法的思想旨在于找到一种解决逆强增生映射和 λ-强伪压缩的公共不动点解的一种方法，最后我们完成其收敛性的证明。

2. 预备知识

为了证明主要的结果，需要运用下面的概念，引理和定理等。在这篇文章中，总是假设 E 是一致凸且 q-一致光滑的 Banach 空间，其中 $q\in(1,2]$。

设 E 和 E^* 分别为实的 Banach 空间和它的对偶空间。广义对偶映射 $J_q:E\to 2^{E^*}$ 定义为：

$$J_q(x)=\left\{x^*\in E^*:\left\langle x,x^*\right\rangle=\|x\|^q,\|x^*\|=\|x\|^{q-1}\right\},\forall x\in E \tag{2.1}$$

易知 $J_q=\|x\|^{q-2}J_2(x),\forall x\neq 0$，其中称为正规对偶映射。众所周知，当 E 是光滑的 Banach 空间时，J_q 是单值的，并且简记为 j_q。

注 2.1：广义对偶映像 $J_q(x)$ 是一对一的，单值的非扩张的且满足 $J_q(x)=\left(J_q(x)\right)^{-1}$。

与此同时下面的次可微不等式成立，对于任给定的 $x,y\in E$

$$\|x+y\|^q\le\|x\|^q+q\left\langle y,j_q(x+y)\right\rangle,j_q(x+y)\in J_q(x+y) \tag{2.2}$$

命题 2.2 [8]设 C 为光滑 Banach 空间 E 的闭凸子集，设 $P:C\to E$ 是拉回映射，J 为 E 的正规对偶映射，则下面的命题等价：

1) P 是向阳非扩张的。

2) $\left\langle x-Px,J(y-Px)\right\rangle\le 0,\forall x\in C,y\in D$

下面假设 E 是一个光滑的 Banach 空间，C 是 E 的一个子集，$T:C\to C$ 是一个映射，我们用 $F(T)$ 表示映射 T 的不动点集。

映射：$T:C\to C$ 称为非扩张的，若对所有的 $x,y\in C$，

$$\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|$$

映射：$A:C\to E$ 称为增生映射，如果存在 $j_q(x)\in J_q(x)$ 满足

$$\left\langle Ax-Ay,j_q(x-y)\right\rangle\ge 0,\forall x,y\in C$$

映射：$A:C\to E$ 称为 α -逆强增生映射，如果存在 $j_q(x)\in J_q(x),\alpha>0$ 满足

$$\left\langle Ax-Ay,j_q(x-y)\right\rangle\ge\alpha\|Ax-Ay\|^q,\forall x,y\in C \tag{2.3}$$

假设 E 是一个实的 Banach 空间，$T:E\to E$ 为一个映射，如果存在 $\lambda\in(0,1]$，使得 $\forall x,y\in E$，一些 $j_q(x-y)\in J_q(x-y)$

$$\left\langle Tx-Ty,j_q(x-y)\right\rangle\le\|x-y\|^q-\lambda\|(I-T)x-(I-T)y\|^q \tag{2.4}$$

则称 T 是 λ -严格伪压缩的。

引理 2.4 [9]假设 E 是一个光滑的 Banach 空间，且存在 $0<q\le 2$，则下列式子等价：

1) E 是 q-一致光滑的。

2) 存在光滑系数 $k_q>0$，使得对于所有的 $x,y\in E$

$$\|x+y\|^q\le\|x\|^q+q\left\langle y,j_q(x)\right\rangle+k_q\|y\|^q \tag{2.5}$$

引理 2.5 [10]假设 C 是一致凸且一致光滑的 Banach 空间 E 的非空闭凸子集，映射 T 是 C 到自身的不动点非空的非扩张映射，则 $F(T)$是收缩到 C 的向阳非扩张的。

引理 2.6 [11]假设 $M:E\to 2^E$ 的极大单调映射，定义如下单值映射：$J_\rho^M:E\to E$

$$J_\rho^M(x)=(I+\rho M)^{-1}(x)$$

则称 J_ρ^M 为算子 M 的豫解式，这里 $\rho>0$，I 是恒等映射。

引理 2.7 [12]设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 Banach 空间 E 中的有界序列，$\{\beta_n\}$ 为[0,1]中的序列满足：$0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n\le\limsup_{n\to\infty}\beta_n<1$，假设 $x_{n+1}=\beta_n x_n+(1-\beta_n)y_n, n\ge 0$ 且 $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1}-y_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\le 0$，则 $\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0$

引理 2.8 [13]假设 $T:E\to E$ 为 λ-严格伪压缩映射，E 为 q 一致光滑的 Banach 空间，则下列式子成立：

1) 给定 $\alpha\in(0,1)$，定义映射 $T_\alpha(x)=(1-\alpha)x+\alpha Tx$，则当 $\alpha\in(0,\mu),\mu=\min\left\{1,\left(\frac{q\lambda}{k_q}\right)^{\frac{1}{q-1}}\right\}$ 时

有 $T_\alpha:C\to C$ 时非扩张映射且 $F(T_\alpha)=F(T)$。

2) 映射 T 是 $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ 李普希兹连续的。

引理 2.9 [14]设 E 是严格凸的 Banach 空间，T_1 和 T_2 是 E 到自身的非扩张映射满足其不动点非空，定义映射：$S:E\to E$ 且

$$Sx=\lambda T_1x+(1-\lambda)T_2x$$

其中 $\lambda\in(0,1)$，则 $F(S)=F(T_1)\cap F(T_2)$

引理 2.10 [15]设 $q>1$。则对于任意正数 a,b，下面等式成立

$$ab\le\frac{1}{q}a^q+\frac{q-1}{q}b\frac{q}{q-1}$$

引理 2.11 [1]设 $\{a_n\}$ 为非负实序列且满足

$$a_{n+1}\le(1-\gamma_n)a_n+\delta_n, n\ge 0$$

其中 $\{a_n\}$ 为 $(0,1)$ 中的序列，$\{\delta_n\}$ 和 $\{\gamma_n\}$ 满足下面条件：

1) $\{\gamma_n\}\subset(0,1)$ 且 $\{\delta_n\}\subset R$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=+\infty$

3) $\limsup_{n\to\infty}\frac{\delta_n}{\gamma_n}\le 0$, or $\sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n|<+\infty$

则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

3. 主要结论

定理 3.1：设 E 是一个 q-一致凸且一致光滑的 Banach 空间，其中光滑系数为 K。$M_i:E\to 2^E$ 是一个极大单调映射，$A_i:E\to E$ 是一个 μ_i-逆强增生映射，并且 $T_{\rho_i}^{(A_i,M_i)}=J_{\rho_i}^{M_i}(I-\rho_i A_i)$，这里 $i=1,2,\cdots,l$。设 $Q=T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}\circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}$，$T:E\to E$ 是一个不动点非空的的 λ-严格伪压缩映射，定义如下一个映射 S 如下：

$$Sx=(1-\alpha)x+\alpha Tx,\forall x\in E$$

假设 $\phi=F(T)\cap F(Q)$，对于任意给定初始点 $u\in E$ 且序列 $\{x_n\}$ 是由下列形式定义的序列：

$$\begin{cases} y_n=T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}\circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}x_n \\ x_{n+1}=\alpha_n u+\beta_n x_n+(1-\alpha_n-\beta_n)(vSx_n+(1-v)y_n), n\ge 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $v\in(0,1),\rho_i\in\left(0,\left(\frac{q\mu_i}{K_q}\right)^{\frac{1}{q-1}}\right),(i=1,2,\cdots,l),\alpha\in(0,k),k=\min\left(1,\left(\frac{q\lambda}{k_q}\right)^{\frac{1}{q-1}}\right)$，当序列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 满足下列条件：

1) $\{\alpha_n\}\subset(0,1),\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 同时 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=+\infty$

2) $\{\beta_n\}\subset(0,1),0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n\le\limsup_{n\to\infty}\beta_n<1$

那么序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $u_1^*=p_\phi u$，其中 p_ϕ 是 $E\to\phi$ 的阳光非扩张收缩，同时 $(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_l^*)\in E^l$，这里

$$\begin{cases}u_1^*=T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}u_2^*,\\ u_2^*=T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}u_3^*,\\ \quad\vdots\\ u_{l-1}^*=T_{\rho_{l-1}}^{(A_{l-1},M_{l-1})}u_{l-1}^*,\\ u_l^*=T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}u_1^*\end{cases}$$

是问题(1.3)的解。

完成定理(3.1)的证明主要分为以下几步。

证明：第一步，我们需证明映射 $T_{\rho_i}^{(A_i,M_i)}=J_{\rho_i}^{M_i}(I-\rho_iA_i)$ 对于所有的 $i=1,2,\cdots,l$ 是都是非扩张的。事实上，对于任意的 $x,y\in E$，通过式子(2.3)，引理 2.4 和条件 $\rho_i\in\left(0,\left(\frac{q\mu_i}{K_q}\right)^{\frac{1}{q-1}}\right)$，我们得到

$$\begin{aligned}&\|(I-\rho_iA_i)x-(I-\rho_iA_i)y\|^q\\&=\|(x-y)+\rho_iA_i(y-x)\|^q\\&\le\|x-y\|^q+q\langle\rho_iA_i(y-x),j_q(x-y)\rangle+K_q\|\rho_iA_ix-\rho_iA_iy\|^q\\&\le\|x-y\|^q+q\langle\rho_iA_i(y-x),j_q(x-y)\rangle+K_q\rho_i^q\|A_ix-A_iy\|^q\\&\le\|x-y\|^q-q\rho_i\mu_i\|A_ix-A_iy\|^q+K_q\rho_i^q\|A_ix-A_iy\|^q\\&=\|x-y\|^q-(q\rho_i\mu_i-K_q\rho_i^q)\|A_ix-A_iy\|^q\\&\le\|x-y\|^q\end{aligned}$$

由上可知映射 $I-\rho_iA_i$ 对于所有的 $i=1,2,\cdots,l$ 都是非扩张映射，其次结合注 2.1，显然可知映射 $T_{\rho_i}^{(A_i,M_i)}=J_{\rho_i}^{M_i}(I-\rho_iA_i)$ 对于所有的 $i=1,2,\cdots,l$ 都是非扩张映射。

第二步，我们需证明序列 $\{x_n\}$ 是有界序列。

首先，设 $p\in\phi$ 即 $p\in F(Q)$，可得到

$$p=T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}\circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}p$$

因为 $y_n=T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}\circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}x_n$，代入可得

$$\begin{aligned}\|y_n-p\|&=\left\|T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}\circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}x_n-T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}\circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}p\right\|\\&\le\left\|T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}x_n-T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}p\right\|\\&\le\cdots\le\left\|T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}x_n-T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}p\right\|\le\|x_n-p\|\end{aligned}\tag{3.2}$$

设 $z_n = vSx_n + (1-v)y_n$，根据引理 2.8 可知 S 是一个非扩张映射， $p \in F(T) \cap F(S)$，从式子(3.2)，可得

$$\begin{aligned}\|z_n - p\| &= \|vSx_n + (1-v)y_n - p\| \\ &= \|v(Sx_n - Sp) + (1-v)(y_n - p)\| \\ &\le v\|Sx_n - Sp\| + (1-v)\|y_n - p\| \\ &\le v\|x_n - p\| + (1-v)\|x_n - p\| \\ &= \|x_n - p\|\end{aligned} \tag{3.3}$$

根据式子(3.1)和(3.3)，可知

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n u + \beta_n x_n + (1-\alpha_n - \beta_n)(vSx_n + (1-v)y_n) - p\| \\ &\le \alpha_n\|u - p\| + \beta_n\|x_n - p\| + (1-\alpha_n - \beta_n)\|z_n - p\| \\ &\le \max\{\|u - p\|, \|x_1 - p\|\}\end{aligned}$$

由此可得，序列 $\{x_n\}$ 是一个有界序列，同理可以证明 $\{y_n\}$， $\{z_n\}$ 都是有界序列

第三步，我们证明 $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0$

事实上，由第一步我们已知映射 $T_{\rho_i}^{(A_i,M_i)} = J_{\rho_i}^{M_i}(I - \rho_i A_i)$ 对所有的 $i = 1,2,\cdots,l$ 都是非扩张的，根据式子(3.1)，进一步可以可得

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - y_n\| &= \left\|T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)} \circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)} \circ \cdots \circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)} x_{n+1} - T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)} \circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)} \circ \cdots \circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)} x_n\right\| \\ &\le \left\|T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)} \circ \cdots \circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)} x_{n+1} - T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)} \circ \cdots \circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)} x_n\right\| \\ &\le \cdots \le \left\|T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)} x_{n+1} - T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)} x_n\right\| \le \|x_{n+1} - x_n\|\end{aligned} \tag{3.4}$$

运用(3.4)同样的处理方法，可得

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - z_n\| &= \|vSx_{n+1} + (1-v)y_{n+1} - vSx_n + (1-v)y_n\| \\ &\le v\|Sx_{n+1} - Sx_n\| + (1-v)\|y_{n+1} - y_n\| \\ &\le v\|x_{n+1} - x_n\| + (1-v)\|x_{n+1} - x_n\| \\ &= \|x_{n+1} - x_n\|\end{aligned} \tag{3.5}$$

因为 $x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + (1-\alpha_n - \beta_n)(vSx_n + (1-v)y_n)$， 可得

$$x_{n+1} = (1-\beta_n)w_n + \beta_n x_n \tag{3.6}$$

此时这里的 $w_n = \dfrac{\alpha_n u + (1-\alpha_n - \beta_n)z_n}{1-\beta_n}$， 结合(3.5)的结果，可知

$$\begin{aligned}\|w_{n+1} - w_n\| &= \left\|\frac{\alpha_{n+1}u + (1-\alpha_{n+1} - \beta_{n+1})z_{n+1}}{1-\beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n u + (1-\alpha_n - \beta_n)z_n}{1-\beta_n}\right\| \\ &= \left\|\frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}(u - z_{n+1}) - \frac{\alpha_n}{1-\beta_n}(u - z_n) + z_{n+1} - z_n\right\| \\ &\le \frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\|u - z_{n+1}\| + \frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\|u - z_n\| + \|z_{n+1} - z_n\| \\ &\le \frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\|u - z_{n+1}\| + \frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\|u - z_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|\end{aligned}$$

综上可以得到下面的不等式关系：

$$\|w_{n+1}-w_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\le\frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\|u-z_{n+1}\|+\frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\|u-z_n\|$$

根据条件(1)，条件(2)的假设和第二步得到的结果，可知：

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\|w_{n+1}-w_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\right)\le 0$$

根据引理 2.7，可以得出

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n-x_n\|=0 \tag{3.7}$$

从 w_n 的定义(3.6)出发，可得

$$\|x_{n+1}-x_n\|=(1-\beta_n)\|w_n-x_n\| \tag{3.8}$$

结合条件(1)的假设，最后得出如下结论：

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0 \tag{3.9}$$

至此，我们完成了 $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$ 的完整的证明过程。

第四步我们需证明 $\limsup_{n\to\infty}\left\langle u-u_1^*,J\left(x_n-u_1^*\right)\right\rangle\le 0$，此时这里的 $u_1^*\in p_\phi$，p_ϕ 是一个 E 到 ϕ 的阳光非扩张收缩。

首先，根据式子(3.1)，可得

$$x_{n+1}-x_n=\alpha_n u+\beta_n x_n+(1-\alpha_n-\beta_n)z_n-x_n=\alpha_n(u-z_n)+(1-\beta_n)(z_n-x_n)$$

由上式，不难得出

$$\|z_n-x_n\|\le\frac{\|x_{n+1}-x_n\|+\alpha_n\|u-z_n\|}{1-\beta_n}$$

根据条件(1)，(2)和式子(3.9)，可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n-x_n\|=0 \tag{3.10}$$

紧接着，定义如下一个映射 W：

$$Wx=vSx+(1-v)T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}\circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)}x,\forall x\in E \tag{3.11}$$

再根据引理 2.8，可以知晓映射 W 是一个非扩张映射，并且

$$F(W)=F(S)\cap F\left(T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)}\circ T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)}\circ\cdots\circ T_{\rho_1}^{(A_l,M_l)}\right)$$

由式子(3.11)，可得

$$Wx_n-x_n=z_n-x_n$$

结合上面式子和式子(3.7)，可知

$$\lim_{n\to\infty}\|Wx_n-x_n\|=0 \tag{3.12}$$

设 z_t 是 $z\mapsto tu+(1-t)Wz$ 的一个不动点，这里 $t\in(0,1)$，换言之即 $z_t=tu+(1-t)Wz_t$，由此我们得到下面式子

$$\|z_t-x_n\|=\|(1-t)(Wz_t-x_n)+t(u-x_n)\|$$

由此，一方面我们得到

$$\begin{aligned}\|z_t-x_n\|^q&=\|(1-t)(Wz_t-x_n)+t(u-x_n)\|^q\\&\le(1-t)^q\|Wz_t-x_n\|^q+qt\langle u-x_n,j_q(z_t-x_n)\rangle\\&=(1-t)^q\|Wz_t-x_n\|^q+qt\langle u-z_t,j_q(z_t-x_n)\rangle+qt\langle z_t-x_n,j_q(z_t-x_n)\rangle\\&\le(1-t)^q\left(\|Wz_t-Wx_n\|^q+\|Wx_n-x_n\|^q\right)+qt\|z_t-x_n\|^q+qt\langle u-z_t,j_q(z_t-x_n)\rangle\\&\le(1-t)^q\left(\|z_t-x_n\|^q+\|Wx_n-x_n\|^q\right)+qt\langle u-z_t,j_q(z_t-x_n)\rangle+qt\|z_t-x_n\|^q\end{aligned}$$

经过化简上式，可以得到

$$\langle z_t-u,J(z_t-x_n)\rangle\le\frac{(1-t)^q}{qt}\left(\|z_t-x_n\|^2+\|Wx_{n-x_n}\|^q\right)+\frac{qt-1}{qt}\left\|\|z_t-x_n\|^2\right\|^q$$

利用式子(3.12)的结果，可以得出

$$\limsup_{n\to\infty}\langle z_t-u,j_q(z_t-x_n)\rangle\le\frac{(1-t)^q}{qt}M^q+\frac{qt-1}{qt}M^q=\left(\frac{(1-t)^q}{qt}+\frac{qt-1}{qt}\right)M^q \tag{3.13}$$

其中 $M=\limsup_{n\to\infty}\|z_t-x_n\|$， $t\in(0,1)$ 不难看出当 $t\to0$ 的时候， $\frac{(1-t)^q}{qt}+\frac{qt-1}{qt}\to0$，进一步可得：

$$\limsup_{n\to\infty}\langle z_t-u,j_q(z_t-x_n)\rangle\le0$$

对于任意的 $\varepsilon>0$ 都存在一个正数 $\delta_1>0$，并且 $t\in(0,\delta_1)$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle z_t-u,j_q(z_t-x_n)\rangle\le\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.14}$$

另一方面，我们可以已知的是 $p_{F(W)}u=\lim_{t\to0}z_t$ 和 $F(W)=\phi$，由此可得 $\lim_{t\to0}z_t=u_1^*=p_\phi$，即存在一个正数 $\delta_2>0$ 并且 $t\in(0,\delta_2)$ 使得：

$$\begin{aligned}&\left|\langle u-u_1^*,j_q(x_n-u_1^*)\rangle-\langle z_t-u,j_q(z_t-x_n)\rangle\right|\\&\le\left|\langle u-u_1^*,j_q(x_n-u_1^*)\rangle-\langle u-u_1^*,j_q(x_n-z_t)\rangle\right|\\&\quad+\left|\langle u-u_1^*,j_q(x_n-z_t)\rangle-\langle z_t-u,j_q(z_t-x_n)\rangle\right|\\&=\left|\langle u-u_1^*,j_q(x_n-u_1^*)-j_q(x_n-z_t)\rangle\right|+\left|\langle z_t-u_1^*,j_q(x_n-z_t)\rangle\right|\\&\le\|u-u_1^*\|\left\|j_q(x_n-u_1^*)-j_q(x_n-z_t)\right\|+\|z_t-u_1^*\|\left\|j_q(x_n-z_t)\right\|\le\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{3.15}$$

结合式子(3.15)，选择 $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$ 从而对于任给的 $t\in(0,\delta)$ 有

$$\langle u-u_1^*,j_q(x_n-u_1^*)\rangle\le\langle z_t-u,j_q(z_t-x_n)\rangle+\frac{\varepsilon}{2}$$

从上面这个式子可得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u-u_1^*,j_q(x_n-u_1^*)\rangle\le\limsup_{n\to\infty}\langle z_t-u,j_q(z_t-x_n)\rangle+\frac{\varepsilon}{2}$$

最后结合(3.14)，可知

$$\limsup_{n\to\infty}\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_n-u_1^*\right)\right\rangle \le 0 \tag{3.16}$$

第五步，最后一步我们需要证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = u_1^*$，实际上从式子(2.1)，式子(3.3)和引理(2.12)可得：

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-u_1^*\right\|^q &= \left\langle x_{n+1}-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \alpha_n u+\beta_n x_n+\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)z_n-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle \\
&= \alpha_n\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle+\beta_n\left\langle x_n-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle \\
&\quad +\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)\left\langle z_n-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle \\
&\le \alpha_n\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle+\beta_n\left\|x_n-u_1^*\right\|\left\|j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\| \\
&\quad +\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)\left\|z_n-u_1^*\right\|\left\|j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\| \\
&\le \alpha_n\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle+\beta_n\left\|x_n-u_1^*\right\|\left\|x_{n+1}-u_1^*\right\|^{q-1} \\
&\quad +\left(1-\alpha_n-\beta_n\right)\left\|z_n-u_1^*\right\|\left\|x_{n+1}-u_1^*\right\|^{q-1} \\
&= \alpha_n\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle+\left(1-\alpha_n\right)\left\|x_n-u_1^*\right\|\left\|x_{n+1}-u_1^*\right\|^{q-1} \\
&\le \alpha_n\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle+\left(1-\alpha_n\right)\left(\frac{1}{q}\left\|x_n-u_1^*\right\|^q+\frac{q-1}{q}\left(\left\|x_{n+1}-u_1^*\right\|^{q-1}\right)^{\frac{q}{q-1}}\right) \\
&= \alpha_n\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle+\left(1-\alpha_n\right)\left(\frac{1}{q}\left\|x_n-u_1^*\right\|^q+\frac{q-1}{q}\left\|x_{n+1}-u_1^*\right\|^q\right) \\
&\le \alpha_n\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle+\left(1-\alpha_n\right)\frac{1}{q}\left\|x_n-u_1^*\right\|^q+\frac{q-1}{q}\left\|x_{n+1}-u_1^*\right\|^q
\end{aligned}$$

由上述式子可知

$$\left\|x_{n+1}-u_1^*\right\| \le \left(1-\alpha_n\right)\left\|x_n-u_1^*\right\|+q\alpha_n\left\langle u-u_1^*, j_q\left(x_{n+1}-u_1^*\right)\right\rangle$$

因此，结合条件(1)，式子(3.16)和引理 2.11，可以得出

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u_1^*$$

这里 F_ϕ 是 $E \to F_\phi$ 的阳光非扩张映射，并且 $\left(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_l^*\right) \in E^l$，其中

$$\begin{cases}
u_1^* = T_{\rho_1}^{(A_1,M_1)} u_2^*, \\
u_2^* = T_{\rho_2}^{(A_2,M_2)} u_3^*, \\
\quad\vdots \\
u_{l-1}^* = T_{\rho_{l-1}}^{(A_{l-1},M_{l-1})} u_{l-1}^*, \\
u_l^* = T_{\rho_l}^{(A_l,M_l)} u_1^*
\end{cases}$$

是问题(1.4)的解。综上所述，定理 3.1 得以完全证明。

致　谢

作者对审稿人提出的宝贵意见表示衷心的感谢。

参考文献

[1] Chang, S.-S., Wen, C.-F. and Yao, J.-C. (2017) Generalized Viscosity Implicit Rulers for Solving Quasi-Inclusion Problems for Accretive Operators in Banach Spaces. *Optimization*, **66**, 1105-1117. https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1325888

[2] Combettes, P.L. and Wajs, V.R. (2005) Signal Recovery by Proximal Forward-Backward Splitting. *Multiscale Modeling and Simulation*, **4**, 1168-1200. https://doi.org/10.1137/050626090

[3] Lion, P.-L. and Mercier, B. (1979) Splitting Algorithms for the Sum of Two Nonlinear Operators. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **16**, 964-979. https://doi.org/10.1137/0716071

[4] Rockafellar, R.T. (1970) On the Maximality of Sums of Nonlinear Monotone Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, **149**, 75-88. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1970-0282272-5

[5] Qin, X.L., Chon, Y.J. and Kang, S.M. (2010) Viscosity Approximation Methods for Generalized Equilibrium Problems and Fixed Point Problems with Applications. *Nonlinear Analysis*, **72**, 99-112. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.06.042

[6] Shehu, Y. (2010) Fixed Point Solutions of Generalized Equilibrium Problems for Nonexpansive Mappings. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234**, 892-898. https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.01.055

[7] Thianwan, S. (2009) Strong Convergence Theorems by Hybrid Methods for a Finite Family of Nonexpansive Mappings and Inverse-Strongly Monotone Mappings. *Nonlinear Analysis*: *Hybrid Systems*, **3**, 605-614. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2009.05.004

[8] Deutsch, F. and Yamada, I. (1998) Minimizing Certain Convex Functions over the Intersection of the Fixed Point Sets of Nonexpansive Mappings. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **19**, 33-56. https://doi.org/10.1080/01630569808816813

[9] Blum, E. and Oettli, W. (1994) From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems. *The Mathematics Student*, **63**, 123-145.

[10] Flam, S.D. and Antipin, A.S. (1997) Equilibrium Programming Using Proximal-Like Algorithms. *Mathematical Programming*, **78**, 29-41. https://doi.org/10.1007/BF02614504

[11] Geobel, K. and Kirk, W.A. (1990) Topics in Metric Fixed Point Theory. Vol. 28 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge.

[12] Kumam, P. and Jaiboon, C. (2009) A New Hybrid Iterative Method for Mixed Equilibrium Problems and Variational Inequality Problem for Relaxed Cocoercive Mappings with Application to Optimization Problems. *Nonlinear Analysis*: *Hybrid Systems*, **3**, 510-530. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2009.04.001

[13] Kumam, P. and Katchang, P. (2009) A Viscosity of Extragradient Approximation Method for Finding Equilibrium Problems, Variational Inequalities and Fixed Point Problems for Nonexpansive Mappings. *Nonlinear Analysis*: *Hybrid Systems*, **3**, 475-486. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2009.03.006

[14] Katchang, P., Jitpeera, T. and Kumam, P. (2010) Strong Convergence Theorems for Solving Generalized Mixed Equilibrium Problems and General System of Variational Inequalities by the Hybrid Method. *Nonlinear and Hybrid Systems*, **4**, 838-852. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2010.07.001

[15] Takahashi, S. and Takahashi, W. (2007) Viscosity Approximation Methods for Equilibrium Problems and Fixed Point Problems in Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **331**, 506-515. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.08.036