Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(8), 726-740
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.108086

Hans汉斯

Hausdorff Dimensions of Conformal Iterated Function Systems of Generalized Complex Continued Fractions

Shuxian Wan, Jinghua Yang, Jie Lin

College of Science, Shanghai University, Shanghai
Email: wansx@shu.edu.cn

Received: Jul. 30th, 2020; accepted: Aug. 17th, 2020; published: Aug. 24th, 2020

Abstract

In this article, we consider a family of conformal iterated function systems (CIFSs) of generalized complex continued fractions with a complex parameter in a domain. Sumi *et al.* studied the general complex continued fractions by applying the theory of CIFSs generated by infinite many conformal maps, and got a series of interesting results. We further generalize the CIFS studied by Sumi *et al.* to a larger parameter domain. We prove that the Hausdorff dimension function of the limit sets of CIFSs of generalized complex continued fraction is continuous in the parameter domain and is real-analytic and subharmonic in the interior of the parameter domain. As a consequence, the Hausdorff dimension function assumes maximum value on the boundary of the parameter domain.

Keywords

Complex Continued Fractions, Conformal Iterated Function Systems, Limit Set, Hausdorff Dimension

广义复连分数共形迭代系统的Hausdorff维数

万姝娴，杨静桦，林　洁

上海大学理学院，上海
Email: wansx@shu.edu.cn

收稿日期：2020年7月30日；录用日期：2020年8月17日；发布日期：2020年8月24日

文章引用: 万姝娴, 杨静桦, 林洁. 广义复连分数共形迭代系统的 Hausdorff 维数[J]. 理论数学, 2020, 10(8): 726-740. DOI: 10.12677/pm.2020.108086

摘　要

本文研究了含有复参数的一族广义复连分数共形迭代系统。Sumi等利用无限生成共形迭代系统理论研究了广义复连分数，得到了关于广义复连分数共形迭代系统极限集的Hausdorff维数的一系列结果。本文进一步将Sumi等研究的共形迭代系统的参数推广到更大的区域，对于这个具有更大参数空间的广义连分数共形迭代系统，证明了其极限集的Hausdorff维数在参数空间上是连续的，在参数空间内部是连续的且实解析和次调和的。并由此得到Hausdorff维数在参数空间的边界点上取到最大值。

关键词

复连分数，共形迭代函数系统，极限集，Hausdorff维数

1. 引言

迭代函数系统是一个重要的研究对象并得到了广泛的研究。很多数学家对迭代函数系统进行了研究，如 Mauldin [1] [2]，Urbanski [1] [2]，Inui [3] [4]，Sumi [3] [4]，Roy [5]，Qiu [6] [7]，Bandt [8]，Hutchinson [9]，Falconer [10]，Moran [11]，Fan [12]和 Schief [13]等都研究了迭代函数系统极限集的维数和测度等性质。

在文献[1]中为了说明广义连分数的共形迭代系统极限集的 Hausdorff 测度等于零，填充测度大于零，Maulain 和 Urbanski 构造了一个与连分数有关的共形迭代函数系统。记 $\mathbb{C}$ 为复数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{N}$ 表示正整数集。他们所构造的方法是设 $X:=\{z\in\mathbb{C}\,\|z-1/2|\le 1/2\}$，则称 $\tilde{S}:=\{\tilde{\phi}_{(m,n)}(z):X\to X\,|(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$ 为连分数共形迭代系统。其中

$$\tilde{\phi}_{(m,n)}(z):=\frac{1}{z+m+ni}(z\in X)$$

在文献[3] [4]中 Inui，Okada 和 Sumi 研究了更一般的情况，他们的构造如下。设

$$A_0:=\{\tau=u+iv\in\mathbb{C}\,|u\ge 0,v\ge 1\},\quad X:=\{z\in\mathbb{C}\,\|z-1/2|\le 1/2\}.$$

给定任意 $\tau\in A_0$，设 $I'_\tau:=\{m+n\tau\in\mathbb{C}\,|m,n\in\mathbb{N}\}$，$S_\tau:=\{\phi'_b:X\to X\,|b\in I'_\tau\}$ 被称为广义复连分数共形迭代函数系统(如图1所示)，其中

$$\phi'_b(z):=\frac{1}{z+b}\ \ (z\in X)$$

在[4]中，作者证明了对上述广义复连分数共形迭代系统[1]中的结论依然成立，在[3]中，作者讨论了一个新的问题，Hausdorff维数关于参数 τ 的连续依赖性，他们的主要结果是：

设 J_τ 为 S_τ 的极限集，h_τ 为极限集 J_τ 的 Hausdorff 维数。

定理 1.1　设 $\{S_\tau\}_{\tau\in A_0}$ 为广义复连分数共形迭代函数系统族，则

(1)　$\tau\to h_\tau$ 在 A_0 上是连续的。

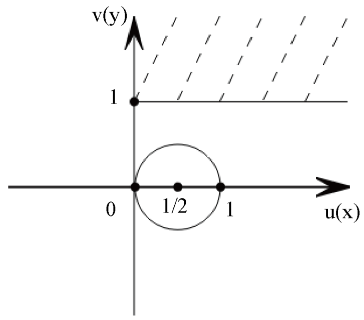

Figure 1. The parameter space of A_0
图 1. A_0 参数空间

(2) 对任意 $\tau \in A_0$， h_τ 是 S_τ 压力函数的唯一零点。

(3) $1 < h_\tau < 2$， $h_\tau \to 1(\tau \in A_0, \tau \to \infty)$。

特别地， $\tau \to h_\tau$ 在 A_0 上不是常值映射。

定理 1.2 设 $\{S_\tau\}_{\tau \in A_0}$ 为广义复连分数共形迭代函数系统族，则 $\tau \to h_\tau$ 在 $\mathrm{Int}(A_0)$ 是实解析和次调和的。

推论 1.3 设 $\{S_\tau\}_{\tau \in A_0}$ 为广义复连分数共形迭代函数系统族，则函数 $\tau \to h_\tau (\tau \in A_0)$ 存在最大值，并且在 A_0 的边界取得 $\tau \to h_\tau$ 最大值的点。特别地， $\max\{h_\tau | \tau \in A_0\} = \max\{h_\tau | \tau \in \partial A_0\}$。

在本文中我们进一步推广了[3]中结果，[4]中结论是否成立我们将在下一篇文章中讨论。

设 $H_1 := \{\tau \in u + iv \in \mathbb{C} | u \geq 0, v \geq 1\}$； $H_2 := \{\tau \in u + iv \in \mathbb{C} | u \geq 0, v \leq -1\}$；

$H_3 := \{\tau \in u + iv \in \mathbb{C} | u \geq 0, -1 \leq v \leq 1\} \setminus \left\{\bigcup_{i=0}^{+\infty} D_i\right\}$， 其中 $D_i := \{z \in \mathbb{C} || z - i| < 1\}$， $i = 0, 1, 2, \cdots$，

令 $H := H_1 \cup H_2 \cup H_3$， $X := \{z \in \mathbb{C} || z - 1/2| \leq 1/2\}$， $I_\tau := \{m + n\tau \in \mathbb{C} | m, n \in \mathbb{N}\}$，这里 $\tau \in H$。

定义 1.4 (广义复连分数的共形迭代函数系统)对任意 $\tau \in H$， $S_\tau := \{\phi_b : X \to X | b \in I_\tau\}$ 被称为广义复连分数共形迭代函数系统。其中

$$\phi_b(z) := \frac{1}{z + b}(z \in X)$$

称 $\{S_\tau\}_{\tau \in H}$ 为广义复连分数共形迭代函数系统族(如图 2 所示)。对每个 $\tau \in H$， 设 J_τ 为 S_τ 的极限集，设 h_τ 为极限集 J_τ 的 Hausdorff 维数。用 $\mathrm{Int}(H)$ 表示在复平面 $\mathbb{C}$ 上的拓扑意义下 H 的内点。

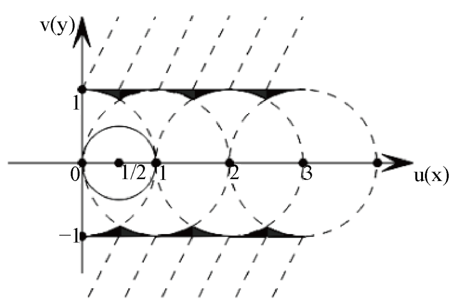

Figure 2. The parameter space of H
图 2. H 参数空间

本文将文献[3]中的结论推广到更一般的情形，即更大广义复连分数共形迭代系统 $\{S_\tau\}_{\tau \in H}$，我们的主要定理为：

定理 1.5 设$\{S_\tau\}_{\tau\in H}$为广义复连分数共形迭代函数系统族，则

(1) $\tau\to h_\tau$在H上是连续的。

(2) 对任意的$\tau\in H$，h_τ是S_τ压力函数的唯一零点。

(3) $1<h_\tau<2$，$h_\tau\to 1(\tau\in H,\tau\to\infty)$。

特别地，$\tau\to h_\tau$在H上不是常值映射。

定理 1.6 设$\{S_\tau\}_{\tau\in H}$为广义复连分数共形迭代函数系统族，则$\tau\to h_\tau$在$\mathrm{Int}(H)$是实解析和次调和的。

推论 1.7 设$\{S_\tau\}_{\tau\in H}$为广义复连分数共形迭代函数系统族，则函数$\tau\to h_\tau(\tau\in H)$存在最大值，并且在$H$的边界取得$\tau\to h_\tau$最大值的点。特别地，$\max\{h_\tau|\tau\in H\}=\max\{h_\tau|\tau\in\partial H\}$。

2. 共形迭代函数系统

此章节主要是介绍共形迭代函数系统的构造以及一些相关概念[1] [2] [5]。

定义 2.1 (共形迭代函数系统)设$X\subset\mathbb{R}^d$是非空紧致连通集，I是有限集或者对等于$\mathbb{N}$。假设I至少含有两个元素，当S满足以下几个条件时，我们称$S:=\{\phi_b:X\to X|b\in I\}$是共形迭代函数系统。

1. 单射：对所有的$i\in I$，$\phi_i:X\to X$是单射。

2. 一致压缩性：$\exists c\in(0,1)$，使得对$\forall i\in I$，$x,y\in X$下面不等式成立。

$$|\phi_i(x)-\phi_i(y)|\le c|x-y|$$

3. 共形性：存在一个正数ε和开连通子集$V\subset\mathbb{R}^d$并且$X\subset V$，使得对$\forall i\in I$，ϕ_i可延拓为V上的$C^{1+\varepsilon}$微分同胚，且ϕ_i在V上是共形的。

4. 开集条件：对$\forall i,j\in I(i\ne j)$，$\phi_i(\mathrm{Int}(X))\subset\mathrm{Int}(X)$，并且$\phi_i(\mathrm{Int}(X))\cap\phi_j(\mathrm{Int}(X))=\varnothing$。这里$\mathrm{Int}(X)$表示在$\mathbb{R}^d$拓扑空间下$X$的内点。

5. 有界偏差性：$\exists K\ge 1$使得对所有的$x,y\in X$，对所有的$\omega\in I^*:=\bigcup_{n=1}^{\infty}I^n$，下面不等式成立

$$|\phi'_\omega(x)|\le K\cdot|\phi'_\omega(y)|$$

6. 锥条件：对所有的$x\in\partial X$，存在一个开锥$\mathrm{Con}(x,u,\alpha)$，其中x为顶点，u为方向，$|u|$为高度，α为角度，使得$\mathrm{Con}(x,u,\alpha)$是$\mathrm{Int}(X)$的子集。

设 S 是一个共形迭代函数系统。对任意的$\omega=\omega_1\omega_2\omega_3\cdots\in I^\infty$，设$\omega|n=\omega_1\omega_2\omega_3\cdots\omega_n\in I^n$且$\phi_{\omega|n}:=\phi_{\omega_1}\circ\phi_{\omega_2}\circ\cdots\circ\phi_{\omega_n}$，则有$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\phi_{\omega|n}(X)$是一个单点，用$\{x_\omega\}$来表示该单点。定义 S 中的编码映射$\pi:I^\infty\to X$为$\omega\mapsto x_\omega$，注意到$\pi:I^\infty\to X$是连续的，进而S中的极限集可定义为

$$J_S:=\pi(I^\infty)=\bigcup_{\omega\in I^\infty}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\phi_{\omega|n}(X)$$

对每个迭代函数系统S，设$h_S:=\dim_{\mathrm{H}}J_S$，$\dim_{\mathrm{H}}$表示Hausdorff维数。对任意的$S$，定义$S$的压力函数如下。

定义 2.2 (压力函数) $\forall n\in\mathbb{N}$，值域在$[0,\infty]$上的函数ψ_S^n

$$\psi_S^n(t):=\sum_{\omega\in I^n}\left(\sup_{z\in X}|\phi'_\omega(z)|\right)^t(t\ge 0)$$

设

$$P_S(t):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\psi_S^n(t)\in(-\infty,\infty]$$

则称函数$P_S(t):[0,\infty)\to(-\infty,\infty]$为$S$的压力函数。

性质 2.3 对任意的 $m,n\in\mathbb{N}$，且 $t\ge 0$ 有 $\psi_S^{m+n}(t)\le\psi_S^m(t)\psi_S^n(t)$。特别地，当 $t\ge 0$ 时，对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，$\log\psi_S^n(t)$ 是次可加的。

根据性质 2.3 可得对任意的 $t\ge 0$，$P_S(t)$ 都存在。设 $\theta_S:=\inf\{t\ge 0|\psi_S^n<\infty\}$。运用压力函数可以得到共形迭代函数系统的一些性质。

定义 2.4 (正则，强正则，继承正则) 设 S 是一个共形迭代函数系统，

(1) 若存在 $t\ge 0$ 使得 $P_S(t)=0$，称 S 是正则的。

(2) 若存在 $t\ge 0$ 使得 $P_S(t)\in(0,\infty)$，称 S 是强正则。

(3) 若对所有的 $I'\in I$ 且有 $|I'\setminus I|<\infty$ 时，$S':=\{\phi_i:X\to X|i\in I'\}$ 是正则的，则称 S 是继承正则。这里，对任意集合 A，用 $|A|$ 来表示 A 的基数。如果一个共形迭代函数系统 S 是继承正则的，则 S 也是强正则；如果 S 是强正则，则 S 也是正则的。设 $F(I):=\{F\subset I\|F|<\infty\}$，对每个 $F\in F(I)$，设 $S_F:=\{\phi_i:X\to X|i\in F\}$。

定理 2.5 ([1] Theorem 3.15) 设 S 是一个共形迭代函数系统，则

$$h_S=\inf\{t\ge 0|P_S(t)<0\}=\sup\{h_{S_p}|F\in F(I)\}\ge\theta_S$$

另外，如果存在 $t\ge 0$ 使得 $P_S(t)=0$。则 t 为压力函数 P_S 的唯一零点，有 $t=h_S$。

定理 2.6 ([1] Theorem 3.20) 设 I 是无限的，S 是一个共形迭代函数系统，则下面两个条件等价：

1. S 是继承正则的。

2. $\psi_S^1(\theta_S)=\infty$。特别地，如果 S 是继承正则，有 $\theta_S<h_S$。

定理 2.7 ([1] Proposition 4.4) 设 S 为正则共形迭代函数系统。若 $\lambda_d(\mathrm{Int}(X)\setminus X_1)>0$，则 $h_S<d$。这里的 λ_d 表示 d 维勒贝格测度且 $X_1:=\bigcup_{i\in I}\phi_i(X)$。

接下来考虑共形迭代函数系统族。设 $\mathrm{CIFS}(X,I)$ 为所有共形迭代函数系统族，其中 $X\subset\mathbb{C}$，I 为无限序列集。现要在 $\mathrm{CIFS}(X,I)$ 上赋予一种 Λ-拓扑[4]。对 $\forall S^n\in\mathrm{CIFS}(X,I)$，记 S^n 为 $\{\phi_i^n\}_{i\in I}$，S 为 $\{\phi_i\}_{i\in I}$。设 $\pi_S:I^\infty\to X$ 为 S 的编码映射。在本文中，$\mathrm{CIFS}(X,I)$ 中任意序列若满足下面条件，则称序列 $\{S^n\}_{n\in N}$ 依照记 Λ-拓扑收敛到 S，记为 $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}})=S$。

(D1) $\forall i\in I$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\|\phi_i^n-\phi_i\|+\left\|(\phi_i^n)'-(\phi_i)'\right\|\right)=0$。

(D2) 若存在 $C>0$，$M\in\mathbb{N}$ 和一有限集 $F\subset I$ 使得 $\forall i\in I\setminus F$ 和 $n\ge M$，有 $\left|\log\left\|(\phi_i^n)'\right\|-\log\|(\phi_i')\|\right|<C$。

若 $\mathrm{CIFS}(X,I)$ 中的序列 $\{S^n\}_{n\in N}$ 不收敛于任何 $\mathrm{CIFS}(X,I)$，即当上面的条件不满足时称 $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}})=\varnothing$。若 $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}})\in\mathrm{CIFS}(X,I)$ 时，称序列 $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathrm{CIFS}(X,I)^{\mathbb{N}}$ 为 λ 收敛。

定义 2.8 设 Λ 是 $\mathbb{C}$ 中的开连通子集。$\{S^u\}_{u\in\Lambda}$ 是 $\mathrm{CIFS}(X,I)$ 中的一族，其中 S^u 为 $\{\phi_i^u\}_{i\in I}$。若 $\forall x\in X$，$i\in I$，$u\to\phi_i^u(x)$ 在 Λ 上全纯，则 $\{S^u\}_{u\in\Lambda}$ 称是平面解析的。若存在 $u_0\in\Lambda$ 使得下面的条件成立，则称平面解析的 $\{S^u\}_{u\in\Lambda}$ 为正则平面解析。

(1) S^{u_0} 是强正则。

(2) $\exists\eta\in(0,1)$ 使得对所有的 $\omega\in I^\infty$，$u\in\Lambda$，$\left|k_\omega^{u_0}(u)-1\right|\le\eta$。

其中，对每个 $u_0\in\Lambda$ 和 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\in I^\infty$，

$$\pi_u:=\pi_{S_u},\quad k_\omega^{u_0}(u):=\frac{(\phi_{\omega_1}^u)'(\pi_u(\sigma\omega))}{(\phi_{\omega_1}^{u_0})'(\pi_{u_0}(\sigma\omega))}(u\in\Lambda)$$

定理 2.9 ([5] Theorem 5.10) 当 $\text{CIFS}(X,I)$ 被赋予了 Λ 上的拓扑时，Hausdorff 维数函数 $h:\text{CIFS}(X,I)\to[0,\infty)$，$S\mapsto h_S$ 是连续的。

定理 2.10 ([5] Theorem 6.1) 设 Λ 是 $\mathbb{C}$ 中的开连通子集，$\{S^u\}_{u\in\Lambda}$ 是 $\text{CIFS}(X,I)$ 中的一族。若 $\{S^u\}_{u\in\Lambda}$ 是正则平面解析的，则 $u\mapsto h_{S^u}$ 在 Λ 上是实解析的。

定理 2.11 ([5] Theorem 6.3) 设 Λ 是 $\mathbb{C}$ 中的开连通子集，$\{S^u\}_{u\in\Lambda}$ 是 $\text{CIFS}(X,I)$ 中的一族。若 $\{S^u\}_{u\in\Lambda}$ 是平面解析的，则 $u\mapsto \dfrac{1}{h_{S^u}}$ 在 Λ 上是上调和映射。

3. 广义复连分数的共形迭代函数系统

这个部分主要是证明广义复连分数的共形迭代函数系统的一些性质[3] [4]。在不致混淆的情况下可简记下面的记号。设 $\pi_\tau:=\pi_{S_\tau}$，$\theta_\tau:=\theta_{S_\tau}$，$\psi_\tau^n(t):=\psi_{S_\tau}^n(t)(t\ge 0,n\in\mathbb{N})$ 和 $P_\tau(t):=P_{S_\tau}(t)(t\ge 0)$，$\Re$ 表示复数的实部，$\Im$ 表示复数的虚部。

性质 3.1 $\forall\tau\in H$，S_τ 是一个共形迭代函数系统。

证明：设 $\tau\in H$，首先证明 $\forall b\in I_\tau$，$\phi_b(X)\subset X$。设 $Y:=\{z\in\mathbb{C}|\Re\ge 1\}$，并且设 $f:=\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为莫比乌斯变换，定义为 $f(z):=\dfrac{1}{z}$。因为 $f(0)=\infty$，$f(1)=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{2}{1+i}=1-i$，可知 $f(\partial X)=\partial Y\cup\{\infty\}$，又因为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$，所以 $f(X)=Y\cup\{\infty\}$。因此 $f:=X\to Y\cup\{\infty\}$ 是同胚的。设 $g_b:=X\to Y$，$g_b(z):=z+b$。可推得 $\phi_b:=f^{-1}\circ g_b$，并且 $\phi_b(X)\subset f^{-1}(Y)\subset X$，因此证明了 $\phi_b(X)\subset X$。

接下来要证对每个 $\tau\in H$，S_τ 满足定义 2.1 中的条件。

1. 单射

因为每个 ϕ_b 都是莫比乌斯变换，所以每个 ϕ_b 是单射。

2. 一致压缩性

设 $I_{\tau k}:=\{m+n\tau\in\mathbb{C}|m,n\in\mathbb{N},\tau\in H_k\}$，$k=1,2,3$，则 $I_\tau=I_{\tau 1}\cup I_{\tau 2}\cup I_{\tau 3}$。

(i) 设 $b=m+n\tau(=m+nu+inv)$ 是 $I_{\tau 1}$ 中的元素，设 $z=x+iy$、$z'=x'+iy'\in X$，有

$$
\begin{aligned}
|z+b|^2&=|x+m+nu+i(y+nv)|^2=(x+m+nu)^2+(y+nv)^2\\
&\ge(0+1+\varepsilon)^2+\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2\ge\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

可得 $|z+b|\ge\dfrac{5}{4}$。同理可得 $|z'+b|\ge\dfrac{5}{4}$，则

$$
|\phi_b(z)-\phi_b(z')|=\left|\frac{1}{z+b}-\frac{1}{z'+b}\right|=\frac{|z-z'|}{|z+b||z+b'|}\le\frac{4}{5}|z-z'|
$$

因此 $S_{\tau 1}$ 在 X 上一致压缩。由对称性可知 $S_{\tau 2}$ 在 X 上一致压缩。

(ii) 设 $b=m+n\tau(=m+nu+inv)$ 是 $I_{\tau 3}$ 中的元素，设 $z=x+iy$，$z'=x'+iy'\in X$，有

$$
\begin{aligned}
|z+b|^2&=|x+m+nu+i(y+nv)|^2=(x+m+nu)^2+(y+nv)^2\\
&\ge\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&\ge\frac{10-\sqrt{3}}{2}>4
\end{aligned}
$$

可得 $|z+b|\ge 2$，同理可得 $|z'+b|\ge 2$，则

$$\left|\phi_b(z)-\phi_b(z')\right|=\left|\frac{1}{z+b}-\frac{1}{z'+b}\right|=\frac{|z-z'|}{|z+b||z+b'|}$$
$$<\frac{1}{4}|z-z'|$$

因此 $S_{\tau 3}$ 在 X 上一致压缩。综上，S_τ 在 X 上一致压缩。

3. 共形性

设 $\tau\in H$，$b\in I_\tau$。因为 ϕ_b 在 $\mathbb{C}\setminus\{-b\}$ 上是全纯的，ϕ_b 是 C^2 的并且在 V 上共形。

4. 开集条件

记 $\mathrm{Int}(X)=\left\{z\in\mathbb{C}\middle\|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\right\}$。设 $\tau\in H$，$b\in I_\tau$，因为 $f(\partial X)=\partial Y\cup\{\infty\}$，可以推得 $\forall b\in I_\tau$，

$$g_b(\mathrm{Int}(X))\subset\{z=x+iy\in\mathbb{C}\,|\,x>1\}=f(\mathrm{Int}(X))$$

设 $b=m+n\tau\in I_\tau$，$b'=m'+n'\tau\in I_\tau$ 为两个不同的元素时，

当 $n=n'$ 时，

$$\left|g_b\left(\frac{1}{2}\right)-g_{b'}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|(m-m')+(n-n')u+i(n-n')v\right|=|m-m'|\ge 1$$

当 $n\ne n'$ 时，因为 $|m-m'|\ge 1$，$|n-n'|\ge 1$，

$$\left|g_b\left(\frac{1}{2}\right)-g_{b'}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{\left[(m-m')+(n-n')u\right]^2+\left[(n-n')v\right]^2}\tag{1}$$

若 $|n-n'|\ge 2$，因为 $|v|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ 故(1)式大于 1；当 $|n-n'|=1$，此时

$$\left|g_b\left(\frac{1}{2}\right)-g_{b'}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{\left[(m-m')+u\right]^2+v^2}$$

由条件知 $\sqrt{(u-i)^2+v^2}\ge 1$，$i=0,1,2,\cdots$，$\forall k=m-m'$，$\exists i$ 使得 $i=|k|$，又 $\sqrt{(u+i)^2+v^2}\ge\sqrt{(u-i)^2+v^2}\ge 1$，知 $\left|g_b\left(\frac{1}{2}\right)-g_{b'}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{\left[(m-m')+u\right]^2+v^2}\ge 1$，故当 b,b' 为两个不同的元素时，$g_b(\mathrm{Int}(X))$ 和 $g_{b'}(\mathrm{Int}(X))$ 不相交。则对所有的 $b\in I_\tau$，

$$\phi_b(\mathrm{Int}(X))=f^{-1}\circ g_b(\mathrm{Int}(X))\subset f^{-1}\circ f(\mathrm{Int}(X))=\mathrm{Int}(X)$$

$$\phi_b(\mathrm{Int}(X))\cap\phi_b'(\mathrm{Int}(X))=f^{-1}\left(g_b(X)\cap g_b'(X)\right)=\varnothing$$

故 S_τ 满足开集条件。

5. 有界偏差性

取足够小的 ε，且 $\varepsilon\ge 0$。设 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为中心，$\frac{1}{2}+\varepsilon$ 为半径的开球，记 $V':=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$，并设 $\tau:=u+iv$，$(m,n)\in\mathbb{N}^2$，$z=x+iy\in V'$ 有

(i) 当 $\tau\in H_1$ 时

$$\begin{aligned}\left|\phi'_{m+n\tau}(z)\right| &= \frac{1}{|z+m+n\tau|^2} = \frac{1}{(x+m+nu)^2+(y+nv)^2} \\ &\le \frac{1}{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}+m\right)^2+n^2}-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right)^2} \le \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{9}{4}+1}-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right)^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}-\varepsilon\right)^2} < 1\end{aligned}$$

(ii) 由对称性知当 $\tau \in H_2$ 时，同样有 $\left|\phi'_{m+n\tau}(z)\right| < 1$。

(iii) 当 $\tau \in H_3$ 时

$$\begin{aligned}\left|\phi'_{m+n\tau}(z)\right| &= \frac{1}{|z+m+n\tau|^2} = \frac{1}{(x+m+nu)^2+(y+nv)^2} \\ &\le \frac{1}{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}+m\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n\right)^2}-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right)^2} \le \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right)^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}-\varepsilon\right)^2} < 1\end{aligned}$$

故 $\forall \tau \in H$，有 $\left|\phi'_{m+n\tau}(z)\right| < 1$。

对每个 $z \in V'$，设

$$z' := \begin{cases} \left(\left|z-\frac{1}{2}\right|-\varepsilon\right)\dfrac{z-\frac{1}{2}}{\left|z-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{2} & (z \notin X) \\ z & (z \in X) \end{cases}$$

则有 $|z-z'| \le \varepsilon$，$\left|z'-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ 可以推出 $z' \in X$。因此 $\left|\phi_b(z)-\phi_b(z')\right| \le |z-z'| \le \varepsilon$，并且

$$\left|\phi_b(z)-\frac{1}{2}\right| \le \left|\phi_b(z)-\phi_b(z')\right| + \left|\phi_b(z')-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}+\varepsilon$$

说明对所有的 $b \in I_\tau$，$\phi_b(V') \subset V'$。因为 ϕ_b 是 V' 上的单射，ϕ_b 在 $\mathbb{C}\setminus\{-b\}$ 上是全纯的，所以 ϕ_b 在 $V' := B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ 上是全纯的。

设 b 是 I_τ 中的一个元素，$r_0 := \frac{1}{2}+\varepsilon$，设 f_b 为

$$f_b(z) := \frac{\phi_b\left(r_0 z+\frac{1}{2}\right)-\phi_b\left(\frac{1}{2}\right)}{r_0\phi'_b\left(\frac{1}{2}\right)} \left(z \in D := \{z \in \mathbb{C} \,\|z| < 1\}\right)$$

因为 f_b 在 D 上是全纯的，且 $f_b(0)=0$， $f_b'(0)=1$。用克贝偏差定理，可推知对所有的 $z\in D$，

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\le|f_b'(z)|\le\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

设 $r_1:=\dfrac{r_0+\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$，可推知存在 $C_1\ge 1$ 和 $C_2\le 1$ 使得对任意的 $z\in B\left(0,\dfrac{r_1}{r_0}\right)(\subset D)$，

$$C_2\le\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3},\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\le C_1$$

设 $C:=\dfrac{C_1}{C_2}$， $\forall z,z'\in B\left(0,\dfrac{r_1}{r_0}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\left|\phi_b'\left(r_0z+\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|\phi_b'\left(\frac{1}{2}\right)\right|}&=|f_b'(z)|\le\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\\&\le C_1=CC_2\le C\frac{1-|z'|}{(1+|z'|)^3}\\&\le C|f_b'(z')|\le C\frac{\left|\phi_b'\left(r_0z'+\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|\phi_b'\left(\frac{1}{2}\right)\right|}\end{aligned}$$

即证对任意的 $z,z'\in B\left(0,\dfrac{r_1}{r_0}\right)$， $\left|\phi_b'\left(r_0z'+\dfrac{1}{2}\right)\right|\le C\left|\phi_b'\left(r_0z'+\dfrac{1}{2}\right)\right|$。

最后设 $V:=B\left(\dfrac{1}{2},r_1\right)$ 为 $\dfrac{1}{2}$ 为中心， r_1 为半径的开球，则 V 是 $\mathbb{C}$ 的开连通子集，且有 $X\subset V$， $\forall z,z'\in V$，

$$|\phi_b'(z)|\le C|\phi_b'(z')|$$

因此 S_τ 满足有界偏差条件。

6. 锥条件

因为 X 是闭圆盘，所以满足锥条件。

引理 3.2 设 $\tau\in H$，则存在 $C\ge 1$ 使得对所有的 $z\in B\left(\dfrac{1}{2},r_1\right)$， $b\in I_\tau$，有

$$C^{-1}|b|^{-2}\le|\phi_b'(z)|\le C|b|^{-2}.$$

证明：因为 $|\phi_b'(0)|=|b|^{-2}$，由有界偏差条件知存在 $C\ge 1$ 使得对任意的 $z\in B\left(\dfrac{1}{2},r_1\right)$， $b\in I_\tau$，有 $C^{-1}|\phi_b'(0)|\le|\phi_b'(z)|\le C|\phi_b'(0)|$。因此有 $C^{-1}|b|^{-2}\le|\phi_b'(z)|\le C|b|^{-2}$。

引理 3.3 对任意的 $\tau\in H$， S_τ 是继承正则的共形迭代函数系统，且有 $\theta_\tau=1$。

证明：设 $\tau\in H$，对任意的正整数 $p(p>2)$，定义

$$K'(p):=\left\{b=m+n\tau\in I_\tau\mid(m,n)\in\mathbb{N}^2,m<2^p,n<2^p\right\},$$

$K''(p) := \{b = m + n\tau \in I_\tau \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2, m < 3\cdot 2^{p-2}, n < 3\cdot 2^{p-2}\}$ 及 $K(p) := K'(p) \setminus K''(p)$。

由几何性质知 $|K'(p)| := (2^p - 1)^2$，$|K''(p)| := (3\cdot 2^{p-2} - 1)^2$ 可以推出 $|K(p)| = |K'(p)| - |K''(p)| = (2^p - 1)^2 - (3\cdot 2^{p-2} - 1)^2 = 7\cdot 4^{p-2} - 14\cdot 2^{p-2} = 7\cdot 2^{p-2}(2^{p-2} - 2)$，且有 $4^{p-2} \le |K(p)| \le 7\cdot 4^{p-2}$。

设 $b = m + n\tau = m + n(u + iv) \in K(p)$，考虑下面两种情况

(i) 若 $m > 3\cdot 2^{p-2}$

$$\begin{aligned} |b| &= |m + nu + inv|^2 = (m + nu)^2 + (nv)^2 \\ &\ge (3\cdot 2^{p-2})^2 + |\tau|^2 = 9\cdot 4^{p-2}\left(1 + \frac{|\tau|^2}{9\cdot 4^{p-2}}\right) \end{aligned}$$

(ii) 若 $n > 3\cdot 2^{p-2}$

$$\begin{aligned} |b| &= |m + nu + inv|^2 = (m + nu)^2 + (nv)^2 \\ &\ge n^2(u^2 + v^2) \ge 9\cdot 4^{p-2}|\tau|^2 \end{aligned}$$

对任意的 $t \ge 0$，

$$\begin{aligned} \sum_{b\in I_\tau} |b|^{-2t} &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{b\in K(p)} \{|b|^2\}^{-t} \\ &\le \sum_{p\in\mathbb{N}} |K(p)| 9^{-t}\cdot 4^{-t(p-2)} \left\{\min\left\{1 + \frac{|\tau|^2}{9\cdot 4^{p-2}}, |\tau|^2\right\}\right\}^{-t} \\ &\le \sum_{p\in\mathbb{N}} 7\cdot 9^{-t}\cdot 4^{(1-t)(p-2)} \left\{\min\left\{1 + \frac{|\tau|^2}{9\cdot 4^{p-2}}, |\tau|^2\right\}\right\}^{-t} \end{aligned}$$

因此推出

$$\sum_{b\in I_\tau} |b|^{-2t} \le \sum_{p\in\mathbb{N}} 7\cdot 9^{-t}\cdot 4^{(1-t)(p-2)} \left\{\min\left\{1 + \frac{|\tau|^2}{9\cdot 4^{p-2}}, |\tau|^2\right\}\right\}^{-t} \tag{2}$$

另外，由不等式 $|\tau|^2 \ge \frac{3}{4}$ 及不等式 $1 + \frac{|\tau|^2}{9\cdot 4^{p-2}} \ge 1$，知对任意的 $p \in \mathbb{N}$，

$$7\cdot 9^{-t}\cdot 4^{(1-t)(p-2)} \left\{\min\left\{1 + \frac{|\tau|^2}{9\cdot 4^{p-2}}, |\tau|^2\right\}\right\}^{-t} \le 7\cdot 27^{-t}\cdot 4^{(1-t)(p-2)+t} \tag{3}$$

又由不等式 $|b| \le |m| + |n||\tau| \le 2^p(1 + |\tau|)$，有

$$\begin{aligned} \sum_{b\in I_\tau} |b|^{-2t} &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{b\in K(p)} \{|b|^2\}^{-t} \\ &\ge \sum_{p\in\mathbb{N}} |K(p)| 4^{-pt}(1 + |\tau|)^{-2t} \end{aligned}$$

因此可以推知

$$\sum_{b\in I_\tau} |b|^{-2t} \ge 4^{-2} \sum_{p\in\mathbb{N}} 4^{p(1-t)}(1 + |\tau|)^{-2t} \tag{4}$$

结合引理 3.2 及不等式 (2)，(4)可知 $\psi_\tau^1(1)=\infty$，若 $t>1$，则 $\psi_\tau^1(t)<\infty$，因此可知 $\theta_\tau=1$。并且由定理 2.6 可得对所有的 $\tau\in H$，S_τ 是继承正则的。

引理 3.4 $\lim\limits_{\tau\to\infty,\tau\in H} h_\tau=1$。即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得对所有的 $\tau\in H$ 且 $|\tau|>N$ 时，$|h_\tau-1|<\varepsilon$ 成立。

证明：设 $\varepsilon>0$，$t=1+\varepsilon>1$，设 H 中的序列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $n\to\infty$ 时，$|\tau_n|\to\infty$。注意到对任意的 $p\in\mathbb{N}$，$n\to\infty$ 时，有 $\left\{\min\left\{1+\frac{|\tau_n|^2}{9\cdot4^{p-2}},|\tau_n|^2\right\}\right\}^{-t}\to0$。通过不等式(2)和不等式(3)可推出

$$f_n(p)=7\cdot9^{-t}\cdot4^{(p-2)(1-t)}\left\{\min\left\{1+\frac{|\tau_n|^2}{9\cdot4^{p-2}},|\tau_n|^2\right\}\right\}^{-t}\ (p\in\mathbb{N})$$

主要是由整函数控制的，即 $g(p)=7\cdot9^{-t}\cdot4^{(p-2)(1-t)}\ (p\in\mathbb{N})$，由勒贝格控制收敛定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{b\in I_{\tau_n}}|b|^{-2t}=0$。由引理 3.2 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_{\tau_n}^1(t)=0$，即 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ 使得对任意的 $\tau\in H$，$|\tau|\ge N$ 有 $\psi_\tau^1(1+\varepsilon)=\psi_\tau^1(t)<1$。

再由性质 2.3 知 $\psi_\tau^1(1+\varepsilon)\le\left(\psi_\tau^1(1+\varepsilon)\right)^n<1$。根据定义可知 $P_\tau(1+\varepsilon)\le0$，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对所有的 $\tau\in H$，$|\tau|\ge N$，$h_\tau\le1+\varepsilon$。由定理 2.6，对任意的 $\tau\in H$，有 $1-\varepsilon\le1=\theta_\tau<h_\tau$，证毕。

定理 3.5 设 $\tau\in H$，有 $1<h_\tau<2$。

证明：由定理 2.6 知 $1=\theta_\tau<h_\tau$，接下来只需证 $h_\tau<2$。

(i) $\tau\in H_1$ 时

$$\bigcup_{b\in I_{\tau1}}g_b(X)\subset\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\Re_z\ge1,\Im_z\ge\frac{1}{2}\right\}$$

设 U_1 为一开球，且 $U_1\subset\{z\in\mathbb{Z}|\,\Re_z\ge1,\Im_z<1/2\}$，因为 $U_1\subset Y$，可以推得 $f^{-1}(U_1)\subset f^{-1}(Y)=\mathrm{Int}(X)$。设 $X_1:=\bigcup\limits_{b\in I_{\tau1}}\phi_b(X)$，因为 $U_1\cap\bigcup\limits_{b\in I_{\tau1}}g_b(X)=\varnothing$，所以 $f^{-1}(U_1)\cap X_1=f^{-1}\left(U_1\cap\bigcup\limits_{b\in I_{\tau1}}g_b(X)\right)=\varnothing$，即有 $\mathrm{Int}(X)\setminus X_1\supset f^{-1}(U_1)$。

(ii) $\tau\in H_2$ 时，由对称性可知存在 $X_2:=\bigcup\limits_{b\in I_{\tau2}}\phi_b(X)$ 使得 $\mathrm{Int}(X)\setminus X_2\supset f^{-1}(U_2)$。

(iii) $\tau\in H_3$ 时

$$\bigcup_{b\in I_{\tau3}}g_b(X)\subset\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\Re_z\ge1,|\Im_z|\ge\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$$

设 U_3 为一开球，且 $U_3\subset\left\{z\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\Re_z\ge1,|\Im|<\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$，因为 $U_3\subset Y$，可以推得 $f^{-1}(U_3)\subset f^{-1}(Y)=\mathrm{Int}(X)$。设 $X_3:=\bigcup\limits_{b\in I_{\tau3}}\phi_b(X)$，因为 $U_3\cap\bigcup\limits_{b\in I_{\tau3}}g_b(X)=\varnothing$，所以

$f^{-1}(U_3)\cap X_1=f^{-1}\left(U_3\cap\bigcup\limits_{b\in I_{\tau3}}g_b(X)\right)=\varnothing$，即有 $\mathrm{Int}(X)\setminus X_3\supset f^{-1}(U_3)$。

综上，$\forall\tau\in H$，设 $X_0:=\bigcup\limits_{b\in I_\tau}\phi_b(X)$，都能找到 $U_0\in Y$ 使得 $\mathrm{Int}(X)\setminus X_0\supset f^{-1}(U_0)$。因此 $\lambda_2(\mathrm{Int}(X)\setminus X_0)>0$，这里 λ_2 表示 2 维勒贝克测度。由定理 2.7 得 $h_\tau<2$。

4. 主要结论的证明

4.1. 定理 1.5 的证明

为了证明定理 1.5，要用到下面的引理，并在此给出证明。

引理 4.1 设 $\tau \in H$，序列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\tau_n = \tau$，则存在 $K \in \mathbb{N}$，$C_1 > 0$，$C_2 > 0$ 使得对所有的 $n \ge K$，$(m,n)\in\mathbb{N}^2$，$z, z' \in X$，有

$$C_1 \le \frac{|z' + m + n\tau_n|^2}{|z + m + n\tau|^2} \le C_2$$

证明：设 $\tau = u + iv$，对每个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\tau_n = u_n + iv_n$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = \tau$，则 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，$|u - u_n| < \varepsilon$，$|v - v_n| < \frac{v}{4}$。对任意的 $(m,n)\in\mathbb{N}^2$，$z, z' \in X$，一方面，

$$\begin{aligned}
\frac{|z' + m + n\tau_n|}{|z + m + n\tau|} &\le \frac{(1+m+nu_n)^2 + (1/2 + nv_n)^2}{(m+nu)^2 + (-1/2+nv)^2} \le \frac{(1+m+n(\varepsilon+u))^2 + (1/2+nv_n)^2}{(m+nu)^2 + (-1/2+nv)^2} \\
&\le \frac{(1+m+n(\varepsilon+u))^2}{(m+nu)^2 + (-1/2+nv)^2} + \frac{(1/2+(4/5)nv)^2}{(m+nu)^2 + (-1/2+nv)^2} \\
&\le \max\left\{\frac{(1+1+(\varepsilon+u))^2}{1^2}, \frac{(1+1+(\varepsilon+u))^2}{u^2 + (v-1/2)^2}\right\} + \frac{(1/(2n)+(5/4)v)^2}{(v-1/(2n))^2} \\
&\le \max\left\{\frac{(1+1+(\varepsilon+u))^2}{1^2}, \frac{(1+1+(\varepsilon+u))^2}{u^2 + (v-1/2)^2}\right\} + \frac{(1/2+(5/4)v)^2}{(v-1/2)^2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
\frac{|z' + m + n\tau_n|}{|z + m + n\tau|} &\ge \frac{(1+m+nu_n)^2 + (-1/2+nv_n)^2}{(m+nu)^2 + (1/2+nv)^2} \\
&\ge \frac{m^2 + (-1/2+nv_n)^2}{2(1+m+n\max\{u,v\})^2} \\
&\ge \frac{1}{2}\left(\min\left\{\frac{1}{1+1+\max\{u,v\}}, \frac{((3/4)v - 1/2)^2}{1+1+\max\{u,v\}}\right\}\right)^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

即存在 $C_1 > 0$，$C_2 > 0$ 使得 $C_1 \le \frac{|z' + m + n\tau_n|^2}{|z + m + n\tau|^2} \le C_2$。

现在证明定理 1.5。

证明：通过引理 3.3 知对 H 中的每个 τ，h_τ 的值为 S_τ 的压力函数的零点。由引理 3.4，3.5 知对任意 $\tau \in H$，有 $1 < h_\tau < 2$ 并且当 $\tau \to \infty$ 时，$h_\tau \to 1$。接下来证若 H 中的序列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = \tau$ 时，有 $\lambda\left(\{S_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = S_\tau$。

对任意的 $(m,n)\in\mathbb{N}$，$\phi_{m+n\tau}(z)=\dfrac{1}{z+m+n\tau}$，$\phi'_{m+n\tau}(z)=\dfrac{-1}{(z+m+n\tau)^2}$，满足条件(D1)。因为 X 是完备的，因此存在 $z_0,z_k\in X$ 使得

$$\log\left(\sup_{x\in X}\left|\phi'_{m+n\tau}\right|\Big/\sup_{x\in X}\left|\phi'_{m+n\tau_k}\right|\right)=\log\left(\phi'_{m+n\tau}(z_0)\big/\phi'_{m+n\tau_k}(z_k)\right)$$

$$=\log\left(\left|z_k+m+n\tau_k\right|^2\Big/\left|z_0+m+n\tau\right|^2\right)$$

由引理 4.1 知存在 $C>0$，$k\in\mathbb{N}$ 使得对每个 $k\ge K$，$(m,n)\in\mathbb{N}^2$，

$$\left|\log\left(\sup_{z\in X}\left|\phi'_{m+n\tau}(z)\right|\right)-\log\left(\sup_{z\in X}\left|\phi'_{m+n\tau_k}(z)\right|\right)\right|=\left|\log\left(\sup_{z\in X}\left|\phi'_{m+n\tau}(z)\right|\Big/\sup_{z\in X}\left|\phi'_{m+n\tau}(z)\right|\right)\right|\le C$$

故证明了 H 中的序列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=\tau$，有 $\lambda\left(\{S_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\right)=S_\tau$。

最后证明 $\tau\to h_\tau$ 在 H 上是连续的。根据定理 2.9，在 λ 拓扑下 $S_\tau\to h_\tau$ 是连续的。由[8]中引理 3.3，若 $\lambda\left(\{S_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\right)=S_\tau$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}h_{\tau_n}=h_\tau$。因此若 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=\tau$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}h_{\tau_n}=h_\tau$，故证明了 $\tau\to h_\tau$ 在 H 上是连续的。

4.2. 定理 1.6 的证明

为证明定理 1.6 要用到下面两个定理。

引理 4.2 $\forall z\in X$，$(m,n)\in\mathbb{N}^2$，以及 $\tau\in H$，当 $\tau'\to\tau$ 时有 $\phi_{m+n\tau'}(z)\to\phi_{m+n\tau}(z)$ 并且收敛唯一。

证明：设 $z:=x+iy$，$\tau:=u+iv$，$\tau'=u'+iv'$ 则有

$$\left|\phi_{m+n\tau'}(z)-\phi_{m+n\tau}(z)\right|=\left|\frac{n(\tau-\tau')}{\left(x+m+nu'+i(y+nv')\right)\left(x+m+nu+i(y+nv)\right)}\right|$$

$$=\frac{n\left|\tau-\tau'\right|}{\sqrt{(x+m+nu')^2+(y+nv')^2}\sqrt{(x+m+nu)^2+(y+nv)^2}}$$

$$\le\frac{n\left|\tau-\tau'\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+m\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\left|\tau-\tau'\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2n}+\frac{m}{n}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{4n}}}$$

$$\le\frac{\left|\tau-\tau'\right|}{\sqrt{0+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}}=\frac{8\sqrt{3}+4}{11}\left|\tau-\tau'\right|$$

故引理得证。

引理 4.3 对任意的 $z,z'\in X$，$\forall\tau\in\mathrm{Int}(H)$，下式成立。

$$\left|\frac{\phi'_{m+n\tau}(z)}{\phi'_{m+n\tau}(z')}\right|\le\frac{11}{2}$$

证明：设 $z:=x+iy$，$z':=x'+iy'$ 及 $\tau:=n+iv$ 则

当 $nv>\dfrac{1}{2}$ 时

$$\begin{aligned}\left|\frac{\phi'_{m+n\tau}(z)}{\phi'_{m+n\tau}(z')}\right| &= \frac{(m+nu+x')^2+(y'+nv)^2}{(m+nu+x)^2+(y+nv)^2} \\ &= \frac{(m+nu+x')^2}{(m+nu+x)^2+(y+nv)^2}+\frac{(y'+nv)^2}{(m+nu+x)^2+(y+nv)^2} \\ &\le \frac{(m+nu+1)^2}{(m+nu)^2}+\frac{(1/2+nv)^2}{(-1/2+nv)^2} \\ &\le \left(1+\frac{1}{m+nu}\right)^2+\frac{\left(1+\frac{1}{2nv}\right)^2}{\left(\frac{1}{nv}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2nv}\right)^2} \\ &\le 2^2+\frac{(1+1/3)^2}{(2/3)^2-(1-1/3)^2}=\frac{11}{2}\end{aligned}$$

最后一个不等式是因为当设 $x=\dfrac{1}{nv}$ 时，$0<x<1$，取 $h(x)=\dfrac{(1+x)^2}{4x^2+(1-x)^2}$，求导后知在 $x=\dfrac{1}{3}$ 时取得最大值。当 $nv<-\dfrac{1}{2}$ 时，由对称性有 $\left|\dfrac{\phi'_{m+n\tau}(z)}{\phi'_{m+n\tau}(z')}\right|\le\dfrac{11}{2}$。故引理得证。

现在证明定理 1.6.

证明：首先说明 $\tau\to h_\tau$ 在 $\operatorname{Int}(H)$ 上是次调和的。

设 $z\in X$，$(m,n)\in\mathbb{N}^2$，可以推知 $\tau\to 1/(z+m+n\tau)$ 是全纯函数。因为 $-1/(z+m)$ 的实部是负的，即 $-1/(z+m)$ 不是 $\operatorname{Int}(H)$ 中的元素，因此 $\tau\to\phi_{m+n\tau}(z)=1/(z+m+n\tau)$ 在 H 上是全纯的。故 $\{S_\tau\}_{\tau\in\operatorname{Int}(H)}$ 是平面解析的。再由定理 2.11，可得 $\tau\to h_\tau$ 在 $\operatorname{Int}(H)$ 上是次调和的。

接下来说明上是平面解析的。对任意的 $\tau\in H$，S_τ 是继承正则共形迭代函数系统，故对任意的 $\tau\in\operatorname{Int}(H)$，$S_\tau$ 是强正则共形迭代函数系统。因此 $\forall\tau_0\in\operatorname{Int}(H)$，存在一个中心为 τ_0 的开球 $U\subset\operatorname{Int}(H)$，以及 $\eta>0$ 使得所有的 $\tau\in U$，$\omega:=(m_i,n_i)_{i\in\mathbb{N}^2}\in(\mathbb{N}^2)^\infty$，$\left|k_\omega^{\tau_0}(\tau)-1\right|<\eta$，其中 $k_\omega^{\tau_0}(\tau)$ 表示 $\left(\phi'_{m_1+n_1\tau}(\pi_\tau\sigma\omega)\right)/\left(\phi'_{m_1+n_1\tau}(\pi_0\sigma\omega)\right)$，有

$$\frac{\phi'_{m_1+n_1\tau}(\pi_\tau\sigma\omega)}{\phi'_{m_1+n_1\tau_0}(\pi_{\tau_0}\sigma\omega)}=\frac{\phi'_{m_1+n_1\tau}(\pi_\tau\sigma\omega)}{\phi'_{m_1+n_1\tau_0}(\pi_\tau\sigma\omega)}\frac{\phi'_{m_1+n_1\tau_0}(\pi_\tau\sigma\omega)}{\phi'_{m_1+n_1\tau_0}(\pi_{\tau_0}\sigma\omega)}$$

由引理 4.2 知当 τ 趋向 τ_0 时，上式右边第一部分趋向 1；由引理 4.3 知 $\tau\in H$，$\omega\in(\mathbb{N}^2)^\infty$ 条件下，上式右边第二部分是有界的。因此存在中心为 τ_0 的开球 $U'\subset\operatorname{Int}(H)$ 使得 $\left|k_\omega^{\tau_0}\right|$ 在 U' 中有界。运用 Cauchy 公式

$$\left(k_\omega^{\tau_0}\right)'(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U'}\frac{k_\omega^{\tau_0}(\xi)}{(\xi-\tau)^2}\mathrm{d}\xi\ (\tau\in U')$$

可推出存在一个 $M>0$ 使得对任意的 $\tau\in U''$，有 $\left|\left(k_\omega^{\tau_0}\right)'(\tau)\right|\le M$。这里 U'' 是中心在 τ_0 且 $U''\subset U'$，则

$$\begin{aligned}\left|\left(k_\omega^{\tau_0}\right)'(\tau)-1\right| &= \left|\left(k_\omega^{\tau_0}\right)'(\tau)-\left(k_\omega^{\tau_0}\right)'(\tau_0)\right|=\left|\int_{\tau_0}^{\tau}\left(k_\omega^{\tau_0}\right)'(\xi)\mathrm{d}\xi\right| \\ &\le\int_{\tau_0}^{\tau}\left|\left(k_\omega^{\tau_0}\right)'(\xi)\right|\left|\mathrm{d}\xi\right|\le M\left|\tau-\tau_0\right|\end{aligned}$$

说明存在一个中心在 τ_0 的开球 $U(\subset U'')$ 使得对任意的 $\tau \in U$，$\omega \in (\mathbb{N}^2)^\infty$，$\left|\left(k_\omega^{\tau_0}\right)'(\tau)-1\right| \le \eta$。因此对任意的 $\tau \in H$，存在一个中心在 τ_0 的开球 $U \in \mathrm{Int}(H)$ 使得 $\{S_\tau\}_{\tau\in U}$ 是正则平面解析的。由定理 2.10 知对任意的 $\tau_0 \in \mathrm{Int}(H)$ 存在一个中心在 τ_0 的开球 $U \in \mathrm{Int}(H)$ 使得 $\{S_\tau\}_{\tau\in U}$ 是实解析的。由 τ_0 的任意性可知映射 $\tau \to h_\tau$ 在 $\mathrm{Int}(H)$ 上是实解析且次调和的。

4.3. 推论 1.7 的证明

证明：$\forall n \in \mathbb{N}$，设 $B_n := H \cap \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\Re_z| \le n, |\Im_z| \le n\right\}$。由定理 1.6，对任意的 $n \in \mathbb{N}$，映射 $\tau \to h_\tau$ 在 $\mathrm{Int}(B_n)$ 上是次调和的。设 $\varepsilon := (h_i - 1)/2$，这里 $i = \sqrt{-1}$。由引理 3.4 知存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对所有的 $\tau \in H \setminus B_N$，有 $|h_\tau - 1| < \varepsilon$，即 $(h_i - 1)/2 > h_\tau - 1$。故对任意的 $\tau \in H \setminus B_N$，

$$h_i > 2h_\tau - 1 = h_\tau + h_{\tau-1} > h_\tau$$

因为 $\tau \to h_\tau$ 在 B_n 上是连续的，则在其上存在一个最大值

$$\max\{h_\tau | \tau \in H\} = \max\{h_\tau | \tau \in B_N\}$$

由 $\tau \to h_\tau$ 在 $\mathrm{Int}(H)$ 上次调和，故在其中没有最大值，取得最大值的点只能在边界上。综上推论 1.7 证毕。

参考文献

[1] Mauldin, R.D. and Urbanski, M. (1996) Dimensions and Measures in Infinite Iterated Function Systems. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **73**, 105-154. https://doi.org/10.1112/plms/s3-73.1.105

[2] Mauldin, R.D. and Urbanski, M. (1999) Conformal Iterated Function Systems with Applications to the Geometry of Continued Fractions. T*ransactions of the American Mathematical Society*, **351**, 4995-5025. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02268-0

[3] Inui, K., Sumi, H. and Okada, H. (2020) The Hausdorff Dimension Function of the Family of Conformal Iterated Function Systems of Generalized Complex Continued Fractions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **40**, 753-766. https://doi.org/10.3934/dcds.2020060

[4] Inui, K. and Sumi, H. (2020) Hausdorff Measures and Packing Measures of Limit Sets of CIFSs of Generalized Complex Continued Fractions. *Journal of Difference Equations & Applications*, **26**, 104-121. https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1709063

[5] Roy, M. and Urbanski, M. (2005) Regularity Properties of Hausdorff Dimension in Infinite Conformal Iterated Function Systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **25**, 1961-1983. https://doi.org/10.1017/S0143385705000313

[6] Qiu, W.Y., Wang, Y.F., Yang, J.H. and Yin, Y.C. (2014) On Metric Properties of Limit Sets of Contractive Analytic Non-Archimedean Dynamical Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **414**, 386-401. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.01.015

[7] 邱维元. 一类 Julia 集的 Hausdorff 维数的上界估计[J]. 复旦学报自然科学版, 1993(2): 44-50.

[8] Bandt, C. and Graf, S. (1992) Self-Similar Sets VIIA Characterization of Self-Similar Fractals with Positive Hausdorff Measure. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **114**, 995-1001. https://doi.org/10.2307/2159618

[9] Hutchinson, J. (1981) Fractals and Self-Similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, **30**, 713-747. https://doi.org/10.1512/iumj.1981.30.30055

[10] Falconer, K. (1990) Fractals Geometry: Mathematical Foundations and Applications. *Biometrics*, **46**, 886-887. https://doi.org/10.2307/2532125

[11] Moran, M. (1996) Hausdorff Measure of Infinitely Generated Self-Similar Sets. *Monatshefte für Mathematik*, **122**, 387-399. https://doi.org/10.1007/BF01326037

[12] Fan, A.H., Liao, L.M., Wang, Y.F. and Zhou, D. (2007) P-adic Repellers in Qp Are Subshifts of Finite Type. *Comptes Rendus Mathematique*, **344**, 219-224. https://doi.org/10.1016/j.crma.2006.12.007

[13] Schief, A. (1994) Separation Properties for Self-Similar Sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **122**, 111-115. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1191872-1