Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(8), 741-744
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.108087

The Structure and Application of Mathematical Properties

—Starting from the Properties of Sequence Limit

Guozhong Cui, Yaoge Wang*, Congzhou Guo

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: *wyg711218@163.com

Received: Jul. 30th, 2020; accepted: Aug. 17th, 2020; published: Aug. 24th, 2020

Abstract

Property is a common content when we study mathematical theory. Taking the property of sequence limit as an example, this paper introduces the structure of properties and their hidden mathematical ideas for studying problems.

Keywords

Property, Sequence Limit, The Structure of Properties, Mathematical Ideas

数学性质的结构与应用思想

——从数列极限的性质谈起

崔国忠，王耀革*，郭从洲

信息工程大学基础部，河南 郑州
Email: *wyg711218@163.com

收稿日期：2020年7月30日；录用日期：2020年8月17日；发布日期：2020年8月24日

摘　要

性质是我们在学习、研究数学理论时常见的内容。以数列极限为例，介绍性质的结构及其隐藏的用于研究问题的数学思想。

*通讯作者。

文章引用: 崔国忠, 王耀革, 郭从洲. 数学性质的结构与应用思想[J]. 理论数学, 2020, 10(8): 741-744.
DOI: 10.12677/pm.2020.108087

关键词

性质，数列极限，性质的结构，数学思想

1. 引言

性质是我们在学习、研究数学理论时常见的内容，如数列极限的性质、连续函数的性质、导数的性质、微分的性质、积分性质等等；我们引入的每一个数学概念，都会在初步学习概念、并利用概念解决简单结构的问题，形成初步的结论之后，为研究、解决更一般或更复杂的对象，求解对应的问题，必须引入相应的性质，由此，体现出性质在数学理论中的作用和地位。

以数列极限为例，介绍性质的结构及其隐藏的用于研究问题的数学思想。

2. 数列极限的性质

教材[1]中数列极限的一般有如下性质：唯一性、有界性、保序性、两边夹性质以及关于极限的四则运算性质。

3. 性质的结构

从结构看，性质通常分为两类。

第一类性质以“等号”为标志，表现为“等式”的性质，这类性质通常为运算性质，以最简单的线性运算为主，个别概念的性质可以推广到更复杂的运算。建立这类性质的基本源于中学阶段已经学习过的运算律，包括最基本的加、减、乘、除运算，及更复杂的结合律、交换律等运算，还有更高级的如中值定理等。 与此对应，在应用中，这类性质也通常用于计算，因此，有时也称这类性质为运算法则，当然，在这样简单的应用中，也隐藏着数学上解决问题的思想。

下面的例子，假设我们通过极限的定义证明了极限结论 $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0\left(|q|<1\right)$，利用此结论和极限的性质完成计算。

例 1 [2] 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^{n+1}-(-2)^n}{3\times 5^n + 2\times 3^n}$。

结构分析 从数列结构看，其结构主要由具有 a^n **结构特点**的因子组成，类比已知，相应的**已知结论**为 $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0\left(|q|<1\right)$，因此，利用形式统一的思想将数列中的各项转化为 $q^n\left(|q|<1\right)$ 结构，为此，只需用最大项 5^n 同时除以分子和分母、再利用运算法则即可，由此，形成解题思路和方法。

解 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5-\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n}{3+2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^n} = \dfrac{5}{3}$。

抽象总结 1) 题目的结构相对于由定义处理的对象已经是较为复杂的结构，因此，解题的整体思路是利用极限的运算性质将复杂结构转化为相对简单的结构，实现结构的简化；这也体现了运算性质的作

用思想：利用性质实现结构的简单化。2) 在具体方法的设计上，体现了如何将未知转化为已知的设计思想。

第二类性质以“不等号”为标志，结论是不等式关系，由于不等式揭示的是大小关系或顺序关系，因此，有时也把这类性质称为“序性质”，对应的关系式也称为“序关系”。

序性质是一类非常重要的性质。 在分析学中，分析性质的研究是重要的研究内容，不等式是研究内容的重要形式之一，后续分析学中形成对应的估计理论；事实上，数学理论的应用就是对各种领域中建立的数学模型进行求解，这些模型大多是非线性的，对这些模型数学研究的基本问题就是解的存在性，模型的非线性决定了求准确解是不可能的，必须对模型进行近似，求其近似解(列)，然后研究近似解(列)的收敛性，寻求收敛的条件，收敛条件就是各种意义下的有界性，就是建立各种估计，因此，不等式理论(估计理论)是分析学的主要研究内容；在古典的分析学理论中，不等式理论的最简单的表现形式就是序性质。序性质在分析、研究、解决相应的数学问题时，有非常重要的应用，下面，我们以一个运算法则的证明为例，说明序性质的应用思想。

例 2 [2]设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，证明运算法则：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$，($b\neq 0$)。

结构分析 此时，假设掌握了极限的定义和序性质，因此，证明的思路是用极限的定义证明，进一步挖掘已知信息，条件为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则对应的已知项为$|x_n-a|$、$|y_n-b|$，因此，必须从要研究的量中分离出上述的已知项，并应用相应的技术甩掉无关项、未知项，实现用已知项估计并控制未知项，由此将研究的对象转化为用已知项表示的形式，这就需要充分利用序性质来完成。

证明 由已知条件，利用极限定义，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon, |y_n-b|<\varepsilon$。

为利用定义进行证明，研究$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|$。 由于$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{bx_n-ay_n}{by_n}\right|$，为充分利用条件，我们利用形式统一法产生并分离出已知项，对分子，我们利用插项技术进行形式统一，即

$$|bx_n-ay_n|=|bx_n-ab+ab-ay_n|=|b(x_n-a)+a(b-y_n)|,$$

对分母的处理是难点。 由于分母中含有未知项 y_n，必须进行技术处理将其甩掉，由于定义应用的放大法，因此，可以利用对分母的缩小以进行简化，由于对$\{y_n\}$已知的条件是其极限为 b，就可以利用保序性进行处理了，形成下面的处理方法。

由保序性，不妨设$|y_n|\geq\frac{|b|}{2}$，故，$n>N$ 时，有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|\leq\frac{(|b|+|a|)\varepsilon}{|b|\cdot|y_n|}\leq\frac{2(|a|+|b|)}{|b|^2}\varepsilon,$$

故，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$。

抽象总结 上述证明过程中体现的解决问题的整体思想仍是以各种技术手段进行结构简化，此处，所用到的技术手段有体现形式统一思想的插项法，实现化未知为已知，有体现结构简化思想的估计法，利用保序性实现甩掉无关项，保留已知确定项。 由此体现极限的保序性质在估计中的重要应用。

4. 性质的作用

从性质的作用地位看，存在性和唯一性是数学概念中最基本、最核心的性质；数学概念都是从现实问题求解的思想方法中进行高度的抽象、提炼出来的[3]，一般来说，一个概念是否合理，存在性和唯一

性是判别标准，换句话说，只有当提出的数学概念同时具有存在性和唯一性时，才是一个“好”的数学概念；特别是古典的高等数学理论，是从实践中抽象提炼出的最基本的理论，所涉及的概念都具有存在性和唯一性，在后续更复杂的数学理论中，会遇到一些数学概念不具备唯一性，或具备更广义意义下的唯一性(不定积分理论中的原函数概念就是在相差一个常数的意义下具有唯一性)；当然，任何学科中建立起来的模型，首要的问题就是模型解的存在性和唯一性。由此可以看出存在性和唯一性的重要性。有界性是函数较为初级的性质，也是基本性质；有界性是分析学中的大类性质；一般来说，在各学科及应用领域中建立的模型多是非线性模型，求准确解是不可能的；为此，需要对非线性模型进行线性近似(逼近)，线性模型通常具有理论上解的存在性，由此得到近似解列，为求得原非线性模型的解，需要对近似解列的收敛性进行研究，在很多情形下，近似解列收敛性的条件就是某种意义下的有界性；这正如 Weierstrass 定理“有界点列必有收敛子列”所揭示的获得收敛子列的思想[4]，在后续的分析学中，各种空间的收敛性条件仍是某种意义下的有界性，因此，有界性性质是研究函数分析性质的基础，由此揭示了有界性的应用思想。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(第七版下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(一) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[3] 张顺燕. 关于数学的思想、方法和应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[4] 倪谷炎, 白敏茹. 关于 Weierstrass 定理的证明[J]. 高等数学研究, 2009, 12(5): 43-44.