

2-Laurent Polynomials of Multi-Edge Graphs

Dongyu Geng

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 872217796@qq.com

Received: Jul. 31st, 2020; accepted: Aug. 18th, 2020; published: Aug. 26th, 2020

Abstract

2-Laurent Polynomial is one of the important invariants in graph theory. If the projected graphs of the two spatial graphs are homeomorphic, then the 2-Laurent polynomials of the two projected graphs are the same, which is an important method to study the graph classification problem. Multi-edge graphs are a kind of special and simple graphs. In this paper, we study the 2-Laurent polynomials of multi-edge graphs and give their derivation formulas.

Keywords

2-Laurent Polynomial, Invariant, Multiple Edges

多重边图的2-洛朗多项式

庚东雨

辽宁师范大学, 辽宁 大连
Email: 872217796@qq.com

收稿日期: 2020年7月31日; 录用日期: 2020年8月18日; 发布日期: 2020年8月26日

摘要

2-洛朗多项式(2-Laurent Polynomial)是图论中重要的不变量之一。如果两个空间图的投影图是同胚的,那么这两个投影图的2-洛朗多项式是相同的,这是研究图分类问题的重要方法。而多重边图是一类既特殊又简单的图,本文研究多重边图的2-洛朗多项式并给出了其推导公式。

关键词

2-洛朗多项式, 不变量, 多重边

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图论中有许多值得我们去研究的问题，其中关于图的等价分类问题就是图理论中的重要问题之一。图的不变量是我们研究图等价分类的重要方法。其中图的多项式是常见的图不变量。图多项式在空间图理论中具有十分重要的作用和地位。许多数学家已经从很多方面对多项式及其有关的课题进行了深入研究。

本文研究一类多重边图的 2-洛朗多项式。在图多项式中，Yamada 多项式是重要的多项式，在学习 Yamada 多项式之前我们需要掌握 2-洛朗多项式，这也被称为是 Negami 多项式[1]的特殊形式。

本文的创新之处在于通过对多重边图边的情况进行分类，推导出来多重边图的 2-洛朗多项式的计算公式。在预备知识部分我们将回顾图理论的一些基本概念，在第二部分我们将针对多重边图的性质进行研究，第三部分通过对边的分类得到多重边图的 2-洛朗多项式的计算公式，进而推导出多重边图的一种特殊情况 θ_n 图的 2-洛朗多项式。

2. 预备知识

2.1. 图的基本概念

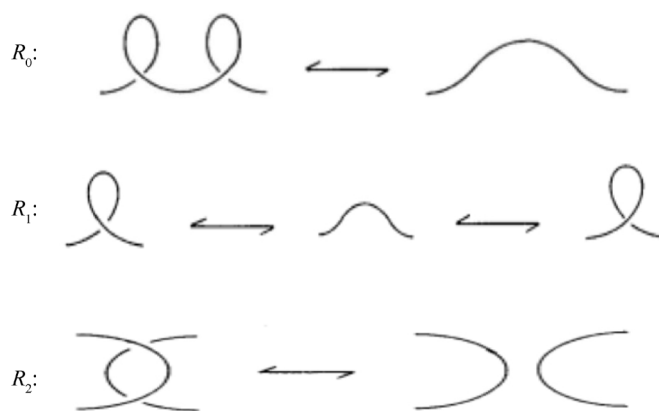
定义 2.1 [1] 图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \psi(G))$ ，其中 $V(G)$ 是图 G 的顶点集， $E(G)$ 是图 G 的边集且 $E(G) \cap V(G) = \emptyset$ ， ψ_G 是关联函数，它将 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对(可以是相同顶点)。若边 e 和两个顶点 u 和 v 满足 $\psi_G(e) = uv$ ，则称边 e 联结顶点 u 和 v ，顶点 u 和 v 称为边 e 的端点。

注解 2.1 以后为了方便，分别用 V 和 E 表示图 G 的边集和顶点集。

注解 2.2 如果一条边连接相同的顶点，那么我们称这样的边为环边(loop)。连接两个点可以有不止一条边，这些边称为多重边。

2.2. Reidemeister Move (R 变换) [2]

空间图的 Reidemeister 变换是由纽结投影图的经典 Reidemeister 变换 R_0, R_1, R_2 和 R_3 以及为空间图顶点邻域上的变换 R_4, R_5, R_6 组成的。如图 1 所示。



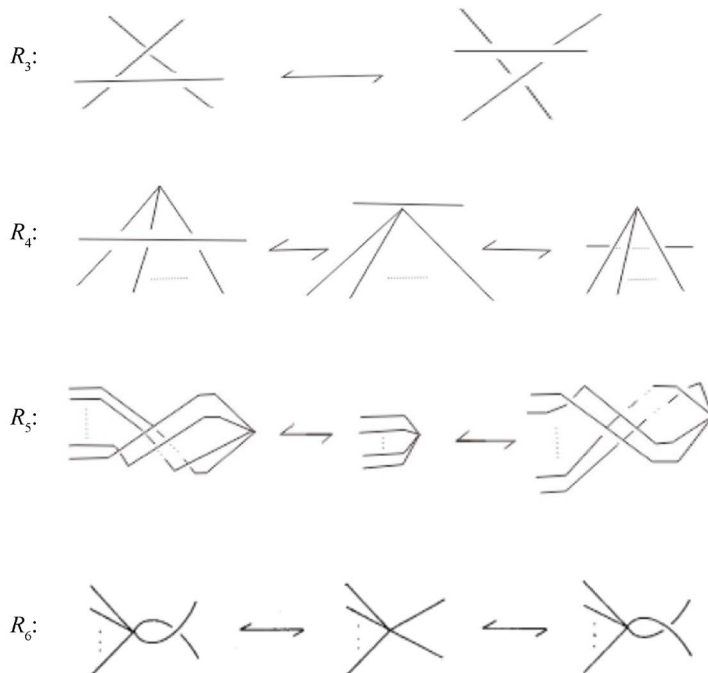


Figure 1. Reidemeister move
图 1. R 变换

3. 2-洛朗多项式

3.1. 2-洛朗多项式的定义

定义 3.1 [3] 图 $G=(V,E)$, V 是 G 的顶点集, E 是 G 的边集. $\mu(G)$ 和 $\beta(G)$ 分别表示图的连通分支数和一维 Betti 数. 且 $f(G)=x^{\mu(G)}y^{\beta(G)}$, $h(G)$ 是一个 2-洛朗多项式:

$$h(G)=h(G)(x,y)=\sum_{F\subseteq E}(-x)^{|F|}f(G-F).$$

注解 3.1 F 是 E 的子集, $|F|$ 是 F 包含元素的数目, $G-F=(V,E-F)$ 且 x 和 y 是不定元, 定义 $h(\emptyset)=1$. 且 $G-F=(V,G-F)$.

命题 3.1 [3] 如果 e 是图 G 的一个非环边. 有 $h(G)=h(G/e)-\frac{1}{x}h(G-e)$, 其中 G/e 表示在图 G 中缩边 e 于一点, $G-e$ 表示把边 e 删掉.

证明 F 和 F' 是 E 的子集, $|F|$ 是 F 包含元素的数目, 且 $|F|=|F'|+1$.

$$\begin{aligned} h(G) &= \sum_{e\in F\subseteq E}(-x)^{|F|}f(G-F) + \sum_{e\in F'\subseteq E}(-x)^{|F'|}f(G-F) \\ &= \sum_{F\subseteq E-e}(-x)^{|F|}f(G/e-F) - 1/x \cdot \sum_{F'\subseteq E-e}(-x)^{|F'|}f(G-e-F) \\ &= h(G/e) - \frac{1}{x}h(G-e). \end{aligned}$$

命题 3.2 [3] 如果 e 是图 G 的一个环边. 则 $h(G)=\left(y-\frac{1}{x}\right)h(G-e)$.

证明 当 e 是图 G 的环边时, 那么 $G/e=G-e$, 则

$$\begin{aligned}
h(G) &= \sum_{e \notin F \subset E} (-x)^{-|F|} f(G-F) + \sum_{e \in F \subset E} (-x)^{-|F|} f(G-F) \\
&= y \sum_{F \subset E-e} (-x)^{-|F|} f(G/e-F) - 1/x \cdot \sum_{F' \subset E-e} (-x)^{-|F'|} f(G-e-F) \\
&= yh(G/e) - \frac{1}{x} h(G-e) \\
&= \left(y - \frac{1}{x} \right) h(G-e).
\end{aligned}$$

3.2. 2-洛朗多项式的性质

给定两个图 G_1 和 G_2 ， $G_1 \cup G_2$ 表示图 G_1 和 G_2 不交并， $G_1 \vee G_2$ 表示图 G_1 和 G_2 的一点并。我们称 G 有一割边 e ，如果 $G-e$ 比 G 有更多的连通分支数。

性质 3.1 [3] $h(G_1 \cup G_2) = h(G_1)h(G_2)$ 。

证明 令 $F = F_1 \cup F_2$ ， $E = E_1 \cup E_2$ ， $F_1 \subset E_1 \subset G_1$ ， $F_2 \subset E_2 \subset G_2$ 。

因为 $\mu(G_1 \cup G_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2)$ ， $\beta(G_1 \cup G_2) = \beta(G_1) + \beta(G_2)$ 。

$$\begin{aligned}
h(G_1)h(G_2) &= \sum_{F_1 \subset E_1 \subset E} (-x)^{-|F_1|} f(G_1-F_1) \cdot \sum_{F_2 \subset E_2 \subset E} (-x)^{-|F_2|} f(G_2-F_2) \\
&= \sum_{F_1, F_2 \subset E} (-x)^{-|F_1|-|F_2|} \cdot x^{\mu(G_1-F_1)+\mu(G_2-F_2)} y^{\beta(G_1-F_1)+\beta(G_2-F_2)} \\
&= \sum_{F_1, F_2 \subset E} (-x)^{-|F_1|-|F_2|} f(V, G_1-F_1 \cup G_2-F_2) \\
&= h(G_1 \cup G_2).
\end{aligned}$$

性质 3.2 [3] $h(G_1 \vee G_2) = \frac{1}{x} h(G_1)h(G_2)$ 。

证明 令 $F = F_1 \cup F_2$ ， $E = E_1 \cup E_2$ ， $F_1 \subset E_1 \subset G_1$ ， $F_2 \subset E_2 \subset G_2$ 。

$$\begin{aligned}
h(G_1 \vee G_2) &= \sum_{F \subset E} (-x)^{-|F|} f(G_1 \vee G_2 - F) \\
&= \sum_{F_1 \subset E_1} (-x)^{-|F_1|} \cdot \sum_{F_2 \subset E_2} (-x)^{-|F_2|} \cdot \frac{1}{x} f(G_1-F_1) f(G_2-F_2) \\
&= \frac{1}{x} h(G_1)h(G_2).
\end{aligned}$$

性质 3.3 [3] 如果 G 有割边，则 $h(G) = 0$ 。

证明 设 e 是 G 的割边，则 $G-e = G_1 \cup G_2$ ， $G/e = G_1 \vee G_2$ 。由命题 3.1，性质 3.1 和性质 3.2 可得

$$\begin{aligned}
h(G) &= h(G/e) - \frac{1}{x} h(G-e) \\
&= h(G_1 \vee G_2) - \frac{1}{x} h(G_1 \cup G_2) \\
&= \frac{1}{x} h(G_1)h(G_2) - \frac{1}{x} h(G_1)h(G_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3.3. 多重边图的 2-洛朗多项式计算

命题 3.3 $h(\bullet) = x$ 。

证明 由定义可得, $h(\bullet) = (-x)^0 \cdot xy^0 = x$ 。

命题 3.4 $h(\bullet\bullet) = x^2$ 。

证明 由性质 3.1, $h(G_1 \cup G_2) = h(G_1)h(G_2)$, 可得 $h(\bullet\bullet) = h(\bullet)h(\bullet) = x \cdot x = x^2$ 。

定义 3.2 给定两个可分的图 G_1 和 G_2 , V_1 和 V_2 分别是 G_1 和 G_2 的任意两个顶点, 将 V_1 和 V_2 用 n 条边连接起来, 记作 $G_1 \vee_n G_2$ 。如图 2 所示。

注解 3.2 其中 $(G_1 \vee_n G_2) / \{e_{1,\dots,n}\}$ 表示图 $G_1 \vee_n G_2$ 把边 $e_1 \dots e_n$ 去掉同时将 V_1 和 V_2 两个顶点粘结在一起, $(G_1 \vee_n G_2) - \{e_{1,\dots,n}\}$ 表示图 $G_1 \vee_n G_2$ 中去掉边 $e_1 \dots e_n$ 。

并有以下等式成立

$$\begin{aligned} ((G_1 \vee_n G_2) - e_1) / \{e_{2,\dots,n}\} &= ((G_1 \vee_n G_2) - \{e_{1,2}\}) / \{e_{3,\dots,n}\} \\ &= \dots = ((G_1 \vee_n G_2) - \{e_{1,\dots,n-1}\}) / e_n = (G_1 \vee_n G_2) / \{e_{1,\dots,n}\}. \end{aligned}$$

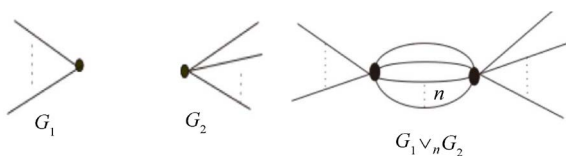


Figure 2. $G_1 \vee_n G_2$

图 2. $G_1 \vee_n G_2$

定理 3.1

$$h(G_1 \vee_n G_2) = \sum_{i=1}^n \frac{C_n^{n+1-i} \cdot y^{n-i}}{(-x)^{i-1}} h[(G_1 \vee_n G_2) / \{e_{1,\dots,n}\}] + \frac{1}{(-x)^n} h[(G_1 \vee_n G_2) - \{e_{1,\dots,n}\}].$$

证明 设 F 和 F_n 是 E 的子集, E 是 $G_1 \vee_n G_2$ 的边集 $|F|$ 是 F 包含元素的数目, 则 $|F| = |F_n| + n$ 。由 2-洛朗多项式的定义 $h(G) = h(G)(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (-x)^{-|F|} f(G - F)$, 对 F 中所包含 n 条边 e_1, e_2, \dots, e_n 的情况进行分类:

1) 若 F 中只含某一条边 e_i , 共有 C_n^{n-1} 种情况, 且每一种情况的计算结果是相同的, 如图 3 所示。

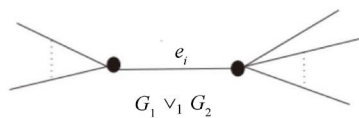


Figure 3. $G_1 \vee_1 G_2$

图 3. $G_1 \vee_1 G_2$

由割边的定义可知 e_i 是图 $G_1 \vee_1 G_2$ 的割边, 则 $h(G_1 \vee_1 G_2) = 0$ 。

2) 若 F 中只含两条边 e_{i_1, i_2} , 共有 C_n^{n-2} 种情况, 且每一种情况的计算结果是相同的, 如图 4 所示。

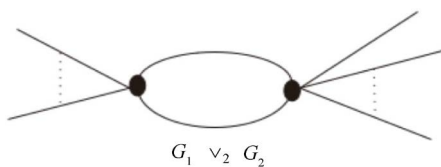


Figure 4. $G_1 \vee_2 G_2$

图 4. $G_1 \vee_2 G_2$

$$\begin{aligned}
 & h(G_1 \vee_2 G_2) \\
 &= \sum_{e_{i_1, i_2} \notin F \subset E} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_2 G_2) - F] + C_2^1 \cdot \sum_{\substack{e_{i_1} \notin F \subset E \\ e_{i_2} \in F \subset E}} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_2 G_2) - F] \\
 &+ \sum_{e_{i_1, i_2} \in F \subset E} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_2 G_2) - F] \\
 &= y \cdot \sum_{F \subset E - \{e_{i_1, i_2}\}} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_2 G_2) / \{e_{i_1, i_2}\} - F] - \frac{C_2^1}{x} \cdot \sum_{F_1 \subset E - \{e_{i_1, i_2}\}} (-x)^{-|F_1|} f[((G_1 \vee_2 G_2) - e_{i_2}) / e_{i_1} - F] \\
 &+ \frac{1}{x^2} \cdot \sum_{F_2 \subset E - \{e_{i_1, i_2}\}} (-x)^{-|F_2|} f[(G_1 \vee_2 G_2) - \{e_{i_1, i_2}\} - F] \\
 &= yh[(G_1 \vee_2 G_2) / \{e_{i_1, i_2}\}] - \frac{C_2^1}{x} h[((G_1 \vee_2 G_2) - e_{i_2}) / e_{i_1}] + \frac{1}{x^2} h[(G_1 \vee_2 G_2) - \{e_{i_1, i_2}\}] \\
 &= \left(y - \frac{C_2^1}{x} \right) h[(G_1 \vee_2 G_2) / \{e_{i_1, i_2}\}] + \frac{1}{x^2} h[(G_1 \vee_2 G_2) - \{e_{i_1, i_2}\}].
 \end{aligned}$$

3) 若 F 中只含 3 条边 e_{i_1, i_2, i_3} ，共有 C_n^{n-3} 种情况，且每一种情况的计算结果是相同的。

$$\begin{aligned}
 & h(G_1 \vee_3 G_2) \\
 &= \sum_{e_{i_1, i_2, i_3} \notin F \subset E} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_3 G_2) - F] + C_3^2 \cdot \sum_{\substack{e_{i_1, i_2} \notin F \subset E \\ e_{i_3} \in F \subset E}} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_3 G_2) - F] \\
 &+ C_3^1 \cdot \sum_{\substack{e_{i_1} \notin F \subset E \\ e_{i_2, i_3} \in F \subset E}} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_3 G_2) - F] + \sum_{e_{i_1, i_2, i_3} \in F \subset E} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_3 G_2) - F] \\
 &= y^2 h[(G_1 \vee_3 G_2) / \{e_{i_1, i_2, i_3}\}] - \frac{C_3^2 \cdot y}{x} h[((G_1 \vee_3 G_2) - e_{i_3}) / \{e_{i_1, i_2}\}] \\
 &+ \frac{C_3^1}{x^2} h[((G_1 \vee_3 G_2) - \{e_{i_2, i_3}\}) / e_{i_1}] - \frac{1}{x^3} h[(G_1 \vee_3 G_2) - \{e_{i_1, i_2, i_3}\}] \\
 &= \left(y^2 - \frac{C_3^2 \cdot y}{x} + \frac{C_3^1}{x^2} \right) h[(G_1 \vee_3 G_2) / \{e_{i_1, i_2, i_3}\}] - \frac{1}{x^3} h[(G_1 \vee_3 G_2) - \{e_{i_1, i_2, i_3}\}].
 \end{aligned}$$

4) 若 F 中只含 k 条边 e_{i_1, \dots, i_k} ，共有 C_n^{n-k} 种情况，且每一种情况的计算结果是相同的。

$$\begin{aligned}
 & h(G_1 \vee_k G_2) \\
 &= \sum_{e_{i_1, \dots, i_k} \notin F \subset E} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_k G_2) - F] + C_k^{k-1} \cdot \sum_{\substack{e_{i_2, \dots, i_k} \notin F \subset E \\ e_{i_1} \in F \subset E}} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_k G_2) - F] \\
 &+ \dots + C_k^1 \cdot \sum_{\substack{e_{i_k} \notin F \subset E \\ e_{i_1, \dots, i_{k-1}} \in F \subset E}} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_k G_2) - F] + \sum_{e_{i_1, \dots, i_k} \in F \subset E} (-x)^{-|F|} f[(G_1 \vee_k G_2) - F] \\
 &= \left[y^{k-1} + \frac{C_k^{k-1} y^{k-2}}{(-x)^1} + \frac{C_k^{k-2} y^{k-3}}{(-x)^2} + \dots + \frac{C_k^1 y^0}{(-x)^{k-1}} \right] h[(G_1 \vee_k G_2) / \{e_{i_1, \dots, i_k}\}] \\
 &+ \frac{1}{(-x)^k} h[(G_1 \vee_k G_2) - \{e_{i_1, \dots, i_k}\}] \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{C_k^{k+1-i} \cdot y^{k-i}}{(-x)^{i-1}} h[(G_1 \vee_k G_2) / \{e_{i_1, \dots, i_k}\}] + \frac{1}{(-x)^k} h[(G_1 \vee_k G_2) - \{e_{i_1, \dots, i_k}\}].
 \end{aligned}$$

综上所述，对 F 中所包含 n 条边 e_1, e_2, \dots, e_n 的情况进行分类，得到多重边图的 2-洛朗多项式为：

$$h(G_1 \vee_n G_2) = \sum_{i=1}^n \frac{C_n^{n+1-i} \cdot y^{n-i}}{(-x)^{i-1}} h[(G_1 \vee_n G_2) / \{e_{1, \dots, n}\}] + \frac{1}{(-x)^n} h[(G_1 \vee_n G_2) - \{e_{1, \dots, n}\}].$$

定义 3.3 [4] θ_n 表示由两个顶点和 n 条连接这两个顶点的边组成的图，也被称为“s-theta 图”，如图 5 所示。

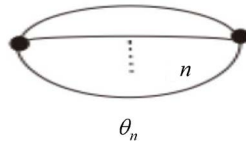


Figure 5. θ_n
图 5. θ_n

推论 3.1 θ_n 图的 2-洛朗多项式的计算公式为：

$$h(\theta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{C_n^{n+1-i} \cdot xy^{n-i}}{(-x)^{i-1}} + \frac{x^2}{(-x)^n}.$$

证明 由 θ_n 图的定义可知， θ_n 图是 $G_1 \vee_n G_2$ 图的一种特殊情况，当图 G_1 和 G_2 分别是两个点时 $G_1 \vee_n G_2 = \theta_n$ ，所以由定理 1 和命题 1，命题 2 可得：

$$\begin{aligned} h(\theta_n) &= h(G_1 \vee_n G_2) \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{C_n^{n+1-i} \cdot y^{n-i}}{(-x)^{i-1}} \right] \cdot h[(G_1 \vee_n G_2) / \{e_{1, \dots, n}\}] \\ &\quad + \frac{1}{(-x)^n} \cdot h[(G_1 \vee_n G_2) - \{e_{1, \dots, n}\}] \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{C_n^{n+1-i} \cdot y^{n-i}}{(-x)^{i-1}} \right] \cdot h(\bullet) + \frac{1}{(-x)^n} \cdot h(\bullet\bullet) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{C_n^{n+1-i} \cdot xy^{n-i}}{(-x)^{i-1}} + \frac{x^2}{(-x)^n}. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Negami, S. (1987) Polynomial Invariants of Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **299**, 601-622. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1987-0869224-1>
- [2] 姜伯驹. 绳圈的数学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011: 53-69.
- [3] Yamada, S. (1989) An Invariant of Spatial Graphs. *Journal of Graph Theory*, **13**, 537-551. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190130503>
- [4] Li, M., Lei, F., Li, F. and Vesnin, A. (2018) The Yamada Polynomial of Spatial Graphs Obtained by Edge Replacements. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **27**, Article ID: 1842004. <https://doi.org/10.1142/S021821651842004X>