

一种二次代数曲面拼接的新方法

贾为兴, 许燕达, 崔利宏

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连
Email: 2584828172@qq.com

收稿日期: 2020年8月13日; 录用日期: 2020年9月4日; 发布日期: 2020年9月11日

摘要

本文以代数曲面和空间代数曲线上的多元多项式插值问题的研究成果为基础, 主要对二次代数曲面在沿球面的拼接问题进行研究, 得出了用拉格朗日插值法定义在球面上的二次拼接点组的多项式分解方法, 得到了一组满足沿球面进行二次代数曲面拼接时的二次拼接多项式, 使的曲面拼接过程得以简单化。在文章最后我们用实验算例对本文给出的方法进行实现, 验证了方法的有效性。

关键词

代数曲面, 多元Lagrange插值, 光滑拼接, 拼接点组

A New Method for Joining Quadratic Algebraic Surfaces

Weixing Jia, Yanda Xu, Lihong Cui

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 2584828172@qq.com

Received: Aug. 13th, 2020; accepted: Sep. 4th, 2020; published: Sep. 11th, 2020

Abstract

Based on the algebraic surface and space algebra curve based on the research results of multivariate polynomial interpolation problem, mainly to the quadratic algebraic surface along the spherical studies the splicing, obtained by Lagrange interpolation method defined in the sphere of quadratic polynomial decomposition method of splicing point group, and get a set of meet the spherical secondary splicing polynomial algebraic surface, make things simple, at the end of the article, we use experimental example to test and prove its effectiveness.

Keywords

Algebraic Surface, Multivariate Lagrange Interpolation, Smooth Splicing, Splicing Point Group

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

计算数学研究方向中的两个主要研究分支分别是多元多项式插值问题[1]及曲面光滑拼接问题[2], 其中多元多项式插值问题的中的一个主要研究问题就是多元 Lagrange 插值的适定节点组问题, 文献[3] [4] [5] 中学者们给出了插值节点组的构造的方法及其应用。而曲面光滑拼接问题研究的一个主要内容使研究插值与曲面的理论与算法, 在文献[2]中周蕴时等学者较为全面的给出了多次曲面的超限插值与曲面拼接的理论及其算法, 本文结合了 Lagrange 插值理论证明, 在该基础上有一个二次多项式与我们给定的球面沿着某一相交曲线光滑拼接, 并研究其有效性。

二次代数曲面中球面是较为重要的一类, 因为球面问题与实际问题有着广泛的联系, 例如球面可应用于环境资源问题, 对海洋学、气象学等方面的问题进行研究, 还可应用在医疗工程等方面, 与时事热点问题有着密不可分的关系, 因此我们对球面进行研究有着实际的意义与价值。

2. 基本定义和主要定理

定义 1: 在空间中, 满足 n 次代数方程 $f(x, y, z) = 0$ 的点 $P(x, y, z)$ 的全体, 称为 n 次代数曲面。

定义 2 [6]: 设两个代数曲面 $q(x, y, z) = 0$ 与 $g(x, y, z) = 0$ 相交于一条不可约的代数曲线, 则称代数曲面 $q(x, y, z) = 0$ 和 $g(x, y, z) = 0$ 沿着公共边界 $c(x, y, z) = 0$ 拼接。(本论文主要研究 C^0 阶光滑拼接)

定义 3 [7]: 设 n 为 $c(x, y, z) = 0$ 非负整数, 令 $P_n^{(3)}$ 是表示所有的三元 n 次代数多项式构成的集合, 且

$$P_n^{(3)} = \left\{ \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk} x^i y^j z^k \mid a_{ijk} \in R \right\}$$

而且有 $\dim P_n^{(3)} = \binom{n+3}{3}$

定义 4 [7]: 设两个均为 2 次无重复分量代数曲面 $q(x, y, z) = 0$ 、 $h(x, y, z) = 0$ 相交于一条不可约的代数曲线 $c(x, y, z) = 0$, $d_n(2)$ 如下所示:

$$d_n(2) = \binom{n+3}{3} - \binom{n+1}{3} = \begin{cases} \frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1) & n < 2 \\ (n+1)^2 & n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

令 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 是不可约代数曲线 $c(x, y, z) = 0$ 上的 $d_n(2)$ 个互不相同的点, 给定任意一组实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$, 并且能够找到关于该实数组的一个多项式 $g(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 使得所求 $g(x)$ 满足下述条件:

$$g^{(j)}(Q_i) = f_i^{(j)}, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, d_n(2) \quad (2)$$

若对于每一组任意给定的 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$, (2)式总有一组解, 那么称该结点组 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 是沿着二次代数曲线 $c(x, y, z) = 0$ 的 n 次光滑拼接点组, 多项式 $g(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ 是沿着 $c(x, y, z) = 0$ 的拼接多项式, 并简记

为 $A \in I_n^{(3)}(c)$ (代表所有位于 $c(x, y, z) = 0$ 上的 n 次拼接点组的集合)。

定理 1 [7]: 设 $d_n(2)$ 为上述等式所述内容, 那么位于 k 次代数曲线 $c(x, y, z) = 0$ 上的点组 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 能够做成沿 $c(x, y, z) = 0$ 的 n 次拼接结点组的充要条件是对任意零插值条件

$$g^{(j)}(Q_i) = 0, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, d_n(2)$$

的多项式 $g(X) \in P_n^{(3)}$, 均有下述等式成立:

$$g(X) = c(X)r(X)$$

其中当 $n \geq k$ 时, $r(X) \in P_{n-k}^3$

证明:

一方面: 若 $g(X) = c(X)r(X)$

因为 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 为 $q(X) = 0$ 与 n 次代数曲面 $g(X) = 0$ 相交的 k 次代数曲线 $c(X) = 0$ 上的 $d_n(2)$ 个互不相同的点

所以当 $c(Q_i) = 0$ 时, 必有 $g(Q_i) = c(Q_i)r(Q_i) = 0$ 成立

另一方面: 若当 $g(Q_i) = 0, (i = 1, \dots, d_n(2))$ 时, 多项式 $g(X)$ 不能分解为

$$g(X) = c(X)r(X)$$

则此时多项式 $g(X)$ 可分解为: $g(X) = c(X)r(X) + d(X)$

则 $g(Q_i) = c(Q_i)r(Q_i) + d(Q_i) = d(Q_i) \neq 0$ 与 $g(Q_i) = 0, (i = 1, \dots, d_n(2))$ 矛盾。

所以 $g(X)$ 必可分解为 $g(X) = c(X)r(X)$ 。证毕。

3. 实验算例

$$\text{给定 } q(x, y, z): \begin{cases} x = 25 \sin \theta \cos \varphi \\ y = 25 \sin \theta \sin \varphi \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \text{ (球的参数方程),} \\ z = 25 \cos \varphi \end{cases}$$

$$h(x, y, z): \begin{cases} z = (0, 25) \\ r = 25 - z \\ x = r \times \sin(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ (圆锥的参数方程)此时 } q(x, y, z) = 0 \text{ 与 } h(x, y, z) = 0 \text{ 相交于不可约的} \\ y = r \times \cos(t) \end{cases}$$

2 次代数曲线 $c(x, y, z): x^2 + y^2 - 25^2 = 0$ 。

设被插值函数为 $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{4x^2}{5^2} + \frac{4y^2}{5^2} - \frac{z^2}{4^2}} - 10^2$, 在 $c(x, y, z) = 0$ 上任取的 9 个点如下所示:

$$Q_1(24, 7, 0), Q_2(24, -7, 0), Q_3(-24, 7, 0), Q_4(20, 15, 0), Q_5(20, -15, 0)$$

$$Q_7(-7, 24, 0), Q_7(-7, 24, 0), Q_8(7, -24, 0), Q_9(-15, -20, 0)$$

由定义 4 知, $\{Q_1, \dots, Q_9\}$ 构成了定义在相交 2 次代数曲线 $c(X): x^2 + y^2 + z^2 - 25^2 = 0$ 上的二次拼接点组。设在这组实数点组上的二次插值多项式为:

$$g(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

将插值条件带入 $g^{(0)}(Q_i) = f^{(0)}(Q_i), (i = 1, \dots, 9)$, 可以得到如下方程 $A \times X = B$

$$A = \begin{bmatrix} 24^2 & 7^2 & 0 & 168 & 0 & 0 & 24 & 7 & 0 & 1 \\ 24^2 & (-7)^2 & 0 & -168 & 0 & 0 & 24 & -7 & 0 & 1 \\ (-24)^2 & 7^2 & 0 & -168 & 0 & 0 & -24 & 7 & 0 & 1 \\ 20^2 & 15^2 & 0 & 300 & 0 & 0 & 20 & 15 & 0 & 1 \\ 20^2 & (-15)^2 & 0 & -300 & 0 & 0 & 20 & -15 & 0 & 1 \\ (-20)^2 & 15^2 & 0 & -300 & 0 & 0 & -20 & 15 & 0 & 1 \\ (-7)^2 & 24^2 & 0 & -168 & 0 & 0 & -7 & 24 & 0 & 1 \\ 7^2 & (-24)^2 & 0 & -168 & 0 & 0 & 7 & -24 & 0 & 1 \\ (-15)^2 & (-20)^2 & 0 & 300 & 0 & 0 & -15 & -20 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{此时解得} \begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, \\ a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = 0, a_9 = 0, a_{10} = -25^2 \end{cases}$$

得到所求多项式:

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 25^2$$

此时有 $g(X) = x^2 + y^2 - 25^2 = c(X)r(X)$ 。

因为 $g(X) = c(X)r(X)$ 其中 $r(X) = 1 \in P_{n-k}^3 = P_{2-2}^3 = P_0^3$ 是常值函数。

所以由定理 1 可知, $g(X)$ 是 $c(X)$ 的拼接点组(图 1)。

此时 $g(x, y, z): x^2 + y^2 - 25^2 = 0$ 与 $q(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 - 25^2 = 0$ (上圆的一般方程)相交于一条不可约 2 次代数曲线 $c(x, y, z): x^2 + y^2 - 25^2 = 0$ 。

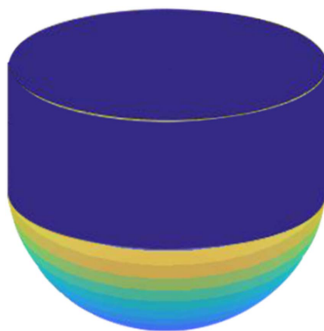


Figure 1. Splicing effect diagram
图 1. 拼接效果图

$$\text{此时 } f(x, y, z) = \sqrt{\frac{4x^2}{5^2} + \frac{4y^2}{5^2} - \frac{z^2}{4^2}} - 10^2 \text{ 在 } Q_{10}(7, 24, 0)、Q_{11}(15, 20, 0) \text{ 两点处的结果为}$$

$f(Q_{10}) = f(Q_{11}) = 0$, 而 $g(x, y, z)$ 在上述两点的值 $g(Q_{10}) = g(Q_{11}) = 0$ 这也验证了如果关系 $g(X) \in P_2^{(3)}$, $g^{(j)}(Q_i) = 0, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, d_n(2)$ 成立, 蕴含了曲线 $c(X) = 0$ 恒有 $g^{(j)}(X) \equiv 0$ 。

基金项目

辽宁省教育厅项目, 辽教函[2018471]。

参考文献

- [1] 梁学章, 李强. 多元逼近[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 21-28.
- [2] 周蕴时, 苏志勋, 奚涌江, 等. CAGD 中的曲线与曲面[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1993.
- [3] 梁学章. 关于多元函数插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124.
- [4] 余震果, 李丽, 李婷, 崔利宏. 关于多元插值适定性问题研究[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2011(2): 17-25.
- [5] 崔利宏, 孟敏, 李笑笑, 高小淞. 二次曲面上 Lagrange 插值节点组构造问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2015(6): 17-25.
- [6] 陈发来, 陈长松, 邓建松. 用分片代数曲面构造管道曲面的过渡曲面[J]. 计算机学报, 2000(9): 912-916.
- [7] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与多元 Kergin 插值[M]. 大连: 辽宁师范大学出版社, 2018(4): 36-39.