Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(9), 862-865
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.109100

Hans汉斯

一类散度型椭圆方程的霍普夫引理

阿迪拉·阿布都热依木，韩　菲*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: *1321205527@qq.com

收稿日期：2020年8月28日；录用日期：2020年9月17日；发布日期：2020年9月24日

摘　要

极值原理是椭圆偏微分方程的基本性质之一，线性椭圆偏微分方程具有强极值原理，其证明依赖于霍普夫引理。本文得到一类散度型椭圆方程的霍普夫引理。

关键词

椭圆偏微分方程，散度型，霍普夫引理，正解

Hopf's Lemma for a Class of Elliptic Equations of Divergence Type

Adila·Abudureyimu, Fei Han*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
Email: *1321205527@qq.com

Received: Aug. 28th, 2020; accepted: Sep. 17th, 2020; published: Sep. 24th, 2020

Abstract

The Maximum Principle is one of the basic properties of elliptic partial differential equations. Linear elliptic partial differential equations have strong maximum principle, whose proof depends on Hopf's lemma. This paper obtains Hopf's lemma for a class of divergence elliptic equations.

Keywords

Elliptic Partial Differential Equation, Divergence, Hopf's Lemma, Positive Solution

*通讯作者。

文章引用: 阿迪拉·阿布都热依木, 韩菲. 一类散度型椭圆方程的霍普夫引理[J]. 理论数学, 2020, 10(9): 862-865.
DOI: 10.12677/pm.2020.109100

1. 预备知识

椭圆型偏微分方程中，最简单的形式是位势方程 $-\Delta u = f$，其中

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Δ 称为拉普拉斯算子。当 $f = 0$ 时，位势方程也称为拉普拉斯方程，其解称为调和函数[1]。调和函数的基本性质之一是强极值原理，它断言非常值的调和函数最值在闭区域上边界达到，而这个性质的证明需要用到霍普夫引理。拉普拉斯方程的霍普夫引理如下：

引理 1.1 假设 $u \in C(\bar{B}_1)$ 在 $B_1 = B_1(0)$ 内为调和函数，即 $\Delta u = 0$，如果对任意的 $x \in \bar{B}_1$，存在 $x_0 \in \partial B_1$，使得 $u(x) < u(x_0)$，那么有

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \ge C\big(u(x_0) - u(0)\big)$$

其中 C 为正常数且仅依赖于 n。

对如下形式的算子，霍普夫引理也是成立的：

假设 Ω 是一个在 R^n 中的有界连通区域，考虑 Ω 中的算子 L

$$Lu \equiv a_{ij}(x) D_{ij} u + b_i(x) D_i u + c(x) u$$

对于 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$。我们总假设 a_{ij}，b_i 和 c 是连续的并且在 $\bar{\Omega}$ 内有界[2]。

2. 主要结论及证明

引理 1.2 [1] (霍普夫引理)设 B 是 R^n 中的一个开球，在 B 内，$c(x) \ge 0$，$b_i(x)(i = 1,2,\cdots,n)$，$c(x)$ 有界。如果 $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ 满足条件

(1) 在 B 内，$Lu \le 0$；

(2) 存在 $x_0 \in \partial B$ 使 $u(x_0) \ge 0$ 且对任意的 $x \in B$，有 $u(x) < u(x_0)$。

那么

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon} > 0,$$

其中单位向量 υ 与球面 ∂B 在 x_0 处的外法向 n 的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$。

一般来讲，霍普夫极值原理对散度型线性椭圆方程是不成立的，即如下形式的算子：

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a_{ij}(x) \partial_j u\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x), x \in \Omega$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，在 Ω 内，对于 $1 \le i \le N$，有 $b_i \in L^\infty(\Omega)$，$c \in L^\infty(\Omega)$ 且 $c(x) \ge 0$。

但选取适当的 a_{ij}，我们可以得到如下霍普夫原理：

定理 1.3 $\Omega \in R^N$ 为光滑有界域，$a_{ij} \in C^\alpha(\bar{\Omega})$，其中 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$，$1 \le i, j \le N$，$x \in \bar{\Omega}$ 且对所有的 $x \in \bar{\Omega}$ 和 $\xi \in R^N \setminus \{0\}$ 有

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \tag{1.3}$$

假设$u \in C^1(\bar{\Omega})$为下面不等式的弱解：

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\left(a_{ij}(x)\partial_j u\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\partial_i u + c(x)u \le 0 \tag{1.4}$$

在Ω内，对于$1 \le i \le N$，有$b_i \in L^\infty(\Omega)$，$c \in L^\infty(\Omega)$且$c(x) \ge 0$。

假设对$x_0 \in \partial\Omega$，存在一个球$B \subset \Omega$且$x_0 \in \partial B$，$u = u(x)$，满足

$$u(x) > u(x_0)$$

如果$u(x_0) \ge 0$，则

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0 \tag{1.5}$$

ν为外法向，$\nu \in R^N$以便$\langle \nu, n\rangle < 0$，$n$为指向$x_0$的单位外法向量。

证明：定义一个算子

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\left(a_{ij}(x)\partial_j u\right)$$

令$u_0 = u(x_0)$，则

$$L(u-u_0) + \sum_{i=1}^{N} b_i\partial_i(u-u_0) + c(u-u_0) \le -cu_0 \le 0$$

不妨令x_0为原点，通过对变量x进行适当的变换，令e_N为u在x_0点的外法向，保持定向的，此时，u在x_0处的外法向就变成了u在0处对新变量的外法向。

选取一个环$D = \left\{x \in R^N : \frac{1}{2} < |x| < 1\right\}$，$\rho > 0$，令集合$D_\rho = \rho D = \{\rho x : x \in D\}$，选取适当的$\rho_0 > 0$，存在一个$\rho$，$0 < \rho < \rho_0$，使$\rho$包含在$\Omega$内

$$\Omega_\rho = \rho e_N - D_\rho = \left\{x : \frac{\rho}{2} < |x + \rho e_N| < \rho\right\}$$

根据[3]引入一个辅助函数$\upsilon \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$，$\upsilon$是下面问题的弱解：

$$L\upsilon + \sum_{i=1}^{N} b_i\partial_i\upsilon + c\upsilon = 0,\ x \in \Omega_\rho$$

$$\upsilon = 1,\ x \in \partial\Omega_\rho^- \tag{2.1}$$

$$\upsilon = 0,\ x \in \partial\Omega_\rho^+$$

$$\partial\Omega_\rho^- = \left\{x : |x + \rho e_N| = \frac{\rho}{2}\right\} \text{和} \ \partial\Omega_\rho^+ = \left\{x : |x + \rho e_N| = \rho\right\}.$$

由[5]中的定理8.3知，(2.1)存在唯一正解$\upsilon \in H^1(\Omega_\rho)$，这意味着在$\Omega$内几乎处处有$0 \le \upsilon \le 1$，由于$\upsilon \in L^\infty(\Omega)$，经典结果隐含着存在$0 < \beta < 1$，使得$\upsilon \in C^\beta(\bar{\Omega}_\rho)$，此外，强极值原理确保对所有$x \in \Omega_\rho$都有$\upsilon(x) > 0$，再根据[5]中8.11的结果，可得$\upsilon \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_\rho)$ [4]。因此$\upsilon \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$是问题(2.1)的唯一正解。

显然可以找到一个小$\varepsilon > 0$，使得在边界$\partial\Omega_\rho$上有

$$u - u_0 - \varepsilon\upsilon \le 0$$

由弱极值原理[3]知，在Ω_ρ内$u \le u_0 + \varepsilon\upsilon$，尤其是

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(0) \ge \varepsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}(0) \tag{2.2}$$

对于任意的在$x = 0$处指向Ω_ρ的外法向ν，由[4]中的引理 3.4，即：设$\upsilon \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$是问题(2.1)的正解，那么随着$\rho \to 0_+$，都有$\frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}(0) \sim \frac{C_N^*}{\rho}\langle \nu, e_N \rangle$，其中$\nu \in R^N$为单位向量且$C_N^* = \frac{N-2}{2^{N-2}-1}$。可得

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}(0) \to -\infty, \rho \to 0_+ \tag{2.3}$$

由(2.2)和(2.3)得出(1.5)。证毕

注：(a) 球B为“内球”，与边界$\partial\Omega$相切于点$x_0 \in \partial\Omega$；

(b) 当$u(x_0) = 0$时，不需要限制c的符号或对所有$x \in \Omega$，有$c(x) = 0$，那么$u(x_0)$的符号可以是任意的。

基金项目

新疆师范大学重点实验室(XJNUSYS082018A02)。

参考文献

[1] 保继光, 朱汝金. 偏微分方程[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011: 120.

[2] Han, Q. and Lin, F.H. (2011) Elliptic Partial Differential Equations. *American Mathematical Society*, 21-27.

[3] Finn, R. and Gilbarg, D. (1957) Asymptotic Behavior and Uniqueness of Plane Subsonic Flows. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **10**, 23-63. https://doi.org/10.1002/cpa.3160100102

[4] de Lis, S. and José, C. (2015) Hopf Maximum Principle Revisited. *Electronic Journal of Differential Equations*, **115**, 1-9.

[5] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (1983) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer Verlag.