Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 1-6
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111001

点态化完备代数正规类中的低幂等根

杨宗文，娄本功

云南大学数学系，云南 昆明
Email: zwyang@ynu.edu.cn, bglou@ynu.edu.cn

收稿日期：2020年12月8日；录用日期：2021年1月7日；发布日期：2021年1月14日

摘 要

定义了点态化完备代数正规类中的低幂等根，证明了Boolean根β、正则根ν、遗传幂等根χ、λ-根λ、幂等代数根ι都是低幂等根，并且这5个低幂等根满足$\beta \le \nu \le \chi \le \lambda \le \iota$。进一步，证明了低幂等根半单类包含所有0乘代数，幂等代数根ι半单类满足弱同态闭性质。

关键词

点态化完备代数正规类，幂等代数根ι，β-根β，遗传幂等代数根χ，λ-根λ，正则根ν，低幂等根

The Hypoidempotent Radicals in Normal Classes of Pointwise Complete Alagebra

Zongwen Yang, Bengong Lou

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: zwyang@ynu.edu.cn, bglou@ynu.edu.cn

Received: Dec. 8th, 2020; accepted: Jan. 7th, 2021; published: Jan. 14th, 2021

Abstract

The hypoidempotent radicals in normal classes of pointwise complete algebras are defined. It is proved that the Boolean radical β, regular radical ν, hereditary idempotent radical χ, λ-radical λ and idempotent algebras radical ι are all hypoidempotent radicals, and these five hypoidempotent radicals satisfy $\beta \le \nu \le \chi \le \lambda \le \iota$. Furthermore, it is proved that the semisimple class of hypoidempotent radicals contains all 0-multiplication algebras, and the semisimple classes of idempotent algebras radical ι is the weakly homomorphically closed.

文章引用：杨宗文，娄本功．点态化完备代数正规类中的低幂等根[J]．理论数学, 2021, 11(1): 1-6.
DOI: 10.12677/pm.2021.111001

Keywords

Normal Classes of Complete Pointwise Algebras, Idempotent Algebras Radical ι, β-Radical β, Hereditary Idempotent Radical χ, λ-Radical λ, Regular Radical ν, Hypoidempotent Radicals

1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，为了进一步统一的研究一般代数正规类中根性质，文献[16]-[23]分别引入了可积代数正规类、完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24] [25] [26] [27]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类确定的上根——反单根、遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零根、λ-根λ、正则根、κ-根和β-根的结构性质，文献[28]使用预根概念给出了根类的一个映射刻画。

本文在文献[24] [25] [26] [27] [28]建立的点态化完备代数正规类基础上，定义了点态化完备代数正规类中的低幂等根，证明了 Boolean 根β、正则根ν、遗传幂等根χ、λ-根λ、幂等代数根ι都是低幂等根，并且这 5 个低幂等根满足$\beta \le \nu \le \chi \le \lambda \le \iota$，其中 Boolean 根$\beta$、正则根$\nu$、遗传幂等根$\chi$是遗传的，从而是子幂等根，$\lambda$-根$\lambda$、幂等代数根$\iota$不是遗传根，从而是非遗传低幂等根，故不是子幂等根。进一步，证明了低幂等根半单类包含所有 0 乘代数，幂等代数根ι半单类满足弱同态闭性质。

2. 预备知识及基本引理

点态化完备代数正规类的相关概念及性质参见文献[24] [25] [26] [27] [28]，为了建立每个代数的子代数乘积与S_a中点乘积之间的联系，本文使用文献[26] [27]中强化了的点乘积公理。

首先引入根类判别的 2 组条件。

引理 2.1 [26]：$\mathscr{A}$是一个代数类，$\mathrm{R} \subseteq \mathscr{A}$ R 为$\mathscr{A}$中的一个根类$\Leftrightarrow$ R 满足以下 3 个条件：

(a) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果$a \in \mathrm{R}$，则$a/i \in \mathrm{R}$ (即 R 商闭)；

(b) $\forall a \in \mathscr{A}$，$a$有一个最大的 R-理想(记为 R($a$))；

($\bar{\text{c}}$) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果$i, a/i \in \mathrm{R}$，则有$a \in \mathrm{R}$ (称 R 扩张闭)。

引理 2.2 [26]：$\mathscr{A}$是一个代数类，$\mathrm{R} \subseteq \mathscr{A}$，R 为 A 中的一个根类$\Leftrightarrow$ R 满足以下 3 个条件：

(a) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果$a \in \mathrm{R}$，则$a/i \in \mathrm{R}$ (即 R 商闭)；

($\bar{\text{b}}$) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果$i_1 \lhd i_2 \lhd \cdots \lhd i_\mu \lhd \cdots$是$a$的 R-理想升链(即$\forall \mu, i_\mu \in \mathrm{R}$)，则理想$\vee_\mu i_\mu \in \mathrm{R}$ (称 R 有归纳性质)；

($\bar{\text{c}}$) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果$i, a/i \in \mathrm{R}$，则有$a \in \mathrm{R}$ (称 R 扩张闭)。

定义 2.3 [25]：$\mathscr{A}$是一个代数类。

(1) $a \in \mathscr{A}$，如果$\forall i \lhd a$，都有$i^2 = i$，则称代数a是遗传幂等的；

(2) R 是一个根，如果：(1) R 是遗传根；(2) R 根代数都是幂等的；则称 R 是一个子幂等根。

记所有遗传幂等代数的类为χ，遗传幂等代数的类χ是根类，χ根的补根是反单根(所有幂等心的亚

直既约代数类确定的上根)。

定义 2.4 [26]：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，$a\in\mathscr{A}$，$\forall x\in S_a$，设

$$axa=\left\langle\left\{yxz\mid y,z\in S_a\right\}\right\rangle,\ xax=\left\langle\left\{xyx\mid y\in S_a\right\}\right\rangle.$$

(1) $x\in S_a$，如果有 $\langle x\rangle\le axa$，则称 x 是 a 的一个 λ-元素；

(2) 如果 $\forall x\in S_a$，x 是 a 的 λ-元素，则称 a 是一个 λ-代数；

(3) $x\in S_a$，如果有 $\langle x\rangle\le xax$，则称 x 是 a 的一个正则元素；

(4) 如果 $\forall x\in S_a$，x 是 a 的正则元素，则称 a 是一个正则代数。

记所有 λ-代数的类为 λ，记所有正则代数的类为 ν。λ-代数类 λ 与正则代数类 ν 都是根类，正则根 ν 是遗传根，但不是超幂零根，从而不是特殊根。

$$axa=\left\langle\left\{yxz\mid y,z\in S_a\right\}\right\rangle=a(x)a\lhd a,$$

$$xax=\left\langle\left\{xyx\mid y\in S_a\right\}\right\rangle=\langle x\rangle a\langle x\rangle.$$

定义 2.5 [27]：$\mathscr{A}$ 是一个代数类。

(1) $x\in S_a$，如果有 $\left\langle x^2\right\rangle=\langle x\rangle$，则称 x 是一个幂等元；

(2) 如果 $\forall x\in S_a$，有 $\left\langle x^2\right\rangle=\langle x\rangle$，则称 a 是 Boolean 代数。

记所有 Boolean 代数的类为 β。Boolean 代数类 β 是遗传根类、左遗传根、右遗传根及强遗传根，但不是超幂零根。

Boolean 根 β、正则根 ν、遗传幂等根 χ、λ-根 λ 分别是文献[25] [26] [27]中引入的 4 个具体根，下面引入低幂等根及幂等代数根类概念。

定义 2.6：$\mathscr{A}$ 是一个代数类。

(1) $a\in\mathscr{A}$，如果 $a^2=a$，则称代数 a 是一个幂等代数；

(2) R 是一个根，如果 R-代数都是幂等代数，则称 R 是一个低幂等根。

记所有幂等代数的类为 ι。

由定义即有：

引理 2.7：R 是一个根，则：R 是子幂等根 $\Leftrightarrow$ R 是一个遗传的低幂等根。

3. 点态化完备代数正规类中的低幂等根

本节证明所有幂等代数的类 ι 构成一个根类，并讨论 Boolean 根 β、正则根 ν、遗传幂等根 χ、λ-根 λ、幂等代数根 ι 的关系及低幂等根的一个性质。

$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类。

定理 3.1：幂等代数类 ι 是一个根类。

证明：(1) 设 $a\in\beta$，$i\lhd a$，$\forall x\in S_{a/i}$。由 $a\in\iota$，则 $a^2=a$，所以

$$(a/i)^2=\left(a^2\vee i\right)/i=(a\vee i)/i=a/i,$$

从而 a/i 是幂等代数，代数类 ι 对商闭。

(2) $\forall a\in\mathscr{A}$，如果 $i_1\le i_2\le\cdots\le i_\mu\le\cdots$ 是 a 的 ι-理想升链，则 $\forall\mu$，$i_\mu^2=i_\mu$，故

$$\vee i_\mu=\vee i_\mu^2\le\left(\vee i_\mu\right)^2\le\vee i_\mu,$$

从而 $\left(\vee i_\mu\right)^2=\vee i_\mu$，即 $\vee i_\mu$ 是幂等代数，代数类 ι 有归纳性质。

(3) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果$i,a/i\in\iota$，则$i^2=i$，$(a/i)^2=a/i$。因为$(a/i)^2=\left(a^2\vee i\right)/i$，所以

$$a=a^2\vee i=a^2\vee i^2\le a^2\vee a^2=a^2,$$

即$a\in\iota$，代数类ι扩张闭。

根据引理 2.2，幂等代数类ι是一个根类。证毕。

根ι称幂等代数根，幂等代数根ι是最大的低幂等根。对结合环类，整数环 **Z** 是幂等环，但 **Z** 的理想 2**Z** 有$(2\mathrm{Z})^2=4\mathrm{Z}\ne 2\mathrm{Z}$，故幂等代数根$\iota$不是遗传根，从而幂等代数根$\iota$不是子幂等根。

定理 3.2： 正则根ν代数都是幂等根代数，从而正则根ν代数是遗传幂等根代数。

证明： 设a是正则代数，$i\lhd a$，则$\forall x\in S_i$，$\langle x\rangle\le xax\le\langle x\rangle a\langle x\rangle\le iai\le i^2$，所以$i\le i^2$，进而$i^2=i$。又因为正则根$\nu$是遗传根，所以正则根$\nu$是遗传幂等根。证毕。

由定理 3.2 有$\nu\le\chi$。

定理 3.3： 遗传幂等根χ代数都是λ-代数。

证明： 设a是遗传幂等根χ代数，$x\in S_a$，有$\langle x\rangle\le(x)=(x)^2=(x)^3\le axa$，即$a$是$\lambda$-代数。证毕。

由定理 3.3 有$\chi\le\lambda$。

定理 3.4： λ-代数都是幂等代数。

证明： 设a是λ-代数，$x\in S_a$，有$\langle x\rangle\le axa=a(x)a\le aa=a^2$，所以$a\le a^2$，进而$a^2=a$，即$a$是幂等代数。证毕。

由定理 3.4 有$\lambda\le\iota$。

定理 3.5： Boolean 代数都是正则代数。

证明： 设a是 Boolean 代数，$x\in S_a$，有$\langle x\rangle=\langle x^2\rangle=\langle x\rangle^2=\langle x\rangle^3\le\langle x\rangle a\langle x\rangle=xax$，所以$x$是$a$的正则代数元素，进而$a$是正则代数。证毕。

由定理 3.5 有$\beta\le\nu$。

由定理 3.1~3.5 知，Boolean 根β、正则根ν、遗传幂等根χ、λ-根λ、幂等代数根ι都是低幂等根，其中 Boolean 根β、正则根ν、遗传幂等根χ是遗传的，从而是子幂等根，λ-根λ、幂等代数根ι不是遗传根，从而是非遗传低幂等根，故不是子幂等根。并且这 5 个低幂等根满足$\beta\le\nu\le\chi\le\lambda\le\iota$，在结合环类中有$\beta<\nu<\chi<\lambda<\iota$。

定理 3.6： 设$a\in\mathscr{A}$，R 是低幂等根，则 R-半单代数类 PR 满足条件(*)：

(*) 如果$i\lhd a$且$a^2=0$，则$a/i\in\mathrm{PR}$。

证明： R 是一个低幂等根，则 PR 中不含非 0 幂等代数。$i\lhd a$且$a^2=0$，$\mathrm{R}(a/i)=j/i$，$j\lhd a$，$i\le j$，则$(j/i)^2=j/i$。由$a^2=0$有$(j/i)^2\le(a/i)^2=0$，所以$j/i=0$，即$a/i\in\mathrm{PR}$。证毕。

条件(*)即：低幂等根半单类包含所有 0 乘代数。

定理 3.7： 设$a\in\mathscr{A}$，R 是幂等代数根ι，PR 是 R-半单代数类，则满足弱同态闭性质：

如果$i\lhd a\in\mathrm{PR}$且$i^2=0$，则$a/i\in\mathrm{PR}$。

证明： 如果存在$i\lhd a\in\mathrm{PR}$且$i^2=0$，但$a/i\notin\mathrm{PR}$，则存在$j\lhd a$，$i\le j$，使得

$$0\ne\mathrm{R}(a/i)=j/i\lhd a/i。$$

由于$j/i=\mathrm{R}(a/i)$是 R-根代数，从而$j/i=\mathrm{R}(a/i)$是幂等代数，即$j/i=(j/i)^2=\left(j^2\vee i\right)/i$，所以$j=j^2\vee i$。进而

$$j^2=\left(j^2\vee i\right)\left(j^2\vee i\right)\le j^4\vee j^2i\vee ij^2\vee i^2\le j^4\vee\left(j^2\wedge i\right),$$

$$
\begin{aligned}
j^4 &= \left(j^4 \vee \left(j^2 \wedge i\right)\right)\left(j^4 \vee \left(j^2 \wedge i\right)\right) \\
&\le j^8 \vee j^4\left(j^2 \wedge i\right) \vee \left(j^2 \wedge i\right) j^4 \vee \left(j^2 \wedge i\right)^2 \\
&\le j^8 \vee j^6 \vee j^6 = j^6 \le j^4,
\end{aligned}
$$

其中 $j^2 i \vee ij^2 \le j^2 \wedge i$， $j^4\left(j^2 \wedge i\right) \vee \left(j^2 \wedge i\right) j^4 \le j^6$， $\left(j^2 \wedge i\right)^2 \le i^2 = 0$。因此

$$
j^4 = j^6 = j^2 j^4 = j^2 j^6 = \left(j^4\right)^2,
$$

即 j^4 是幂等代数，故 $j^4 \in \mathrm{R} = \iota$。又因为 $j^4 \lhd a \in \mathrm{PR}$，所以 $j^4 = 0$， $\left(j/i\right)^4 = 0$， j/i 是幂 0 代数。再由 $j/i = \left(j/i\right)^2$，即得 $j/i = 0$，与 $0 \ne \mathrm{R}\left(a/i\right) = j/i$ 矛盾。所以 $\forall i \lhd a \in \mathrm{PR}$ 且 $i^2 = 0$，则 $a/i \in \mathrm{PR}$。证毕。

4. 小结

本文定义了点态化完备代数正规类中的低幂等根，证明了 Boolean 根 β、正则根 ν、遗传幂等根 χ、λ-根 λ、幂等代数根 ι 都是低幂等根，并且这 5 个低幂等根满足 $\beta \le \nu \le \chi \le \lambda \le \iota$，其中 Boolean 根 β、正则根 ν、遗传幂等根 χ 是遗传的，从而是子幂等根，λ-根 λ、幂等代数根 ι 不是遗传根，从而是非遗传低幂等根，故不是子幂等根。进一步，证明了低幂等根半单类包含所有 0 乘代数，幂等代数根 ι 半单类满足弱同态闭性质。

基金项目

国家自然科学基金(11861076)；云南省自然科学基金(2019FB139)。

参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley & Sons, New York.

[2] Gardner, B.J. and Wiegandt, R. (2004) Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel. http://ecite.utas.edu.au/27037 https://doi.org/10.1201/9780203913352

[3] Beidar, K.I., Fong, Y. and Ke, W.-F. (1998) On Complemented Radicals. *Journal of Algebra*, **201**, 328-356. https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7254

[4] Tumurbat, S. and Zand, H. (2001) Hereditariness, Strongness and Relationship between Brown-McCoy and Behrens Radicals. *Contributions to Algebra and Geometry*, **42**, 275-280.

[5] 蔡传仁. 对偶根和 FA SZASZ 的问题 21[J]. 数学学报: 中文版, 1989, 32(3): 394-400.

[6] 蔡传仁. 半遗传根的一个特征性质[J]. 数学研究与评论, 1991, 11(1): 9-12.

[7] 谢邦杰. 关于周期环与 Jacobson 环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1982, 2(2): 11-13.

[8] 于宪君. 关于 $F_{A,\delta}$-环与广义周期环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1988, 8(3): 341-345.

[9] 胡小美. 几类与 Jacbson 根相关环的研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 杭州师范大学, 2017.

[10] 于宪君, 朱捷. 关于周期环的几个定理[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2004, 21(3): 20-22.

[11] 杜现昆, 齐毅. 周期环的刻划[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001, 39(3): 29-31.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60. https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A.H. (2002) Radicals and Semi-Simple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Normal University*, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽, 王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602.

[15] Yang, Z.W. (2006) The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal of Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Supernilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of

Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-192.

[17] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Like Modules in Normal Classes of Complete Alagebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 377-386.

[18] 杨宗文, 杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3): 112-116, 120.

[19] 杨宗文, 杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 113-118.

[21] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang, Z.Y. and Li, Y.B. (2010) The General Radicals Theory of the Big Semi-Rings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Yang, Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-902.

[24] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554.

[25] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-722.

[26] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 λ-根和正则根[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 836-842.

[27] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 Jacobson 代数和 Boolean 代数[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1009-1014.

[28] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中 Amitsur-Kurosh 根的映射刻画[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1138-1144.