Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 41-46
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111007

调和函数的高阶Schwarzian导数

刘禹彤，漆 毅

北京航空航天大学数学科学学院，北京
Email: 18512238676@163.com, 07122@buaa.edu.cn

收稿日期：2020年12月12日；录用日期：2021年1月11日；发布日期：2021年1月18日

摘 要

本文定义了调和函数的高阶Schwarzian导数形式，并证明了其仍具有Möbius不变性。其次，本文给出了调和函数的高阶Schwarzian导数的一种等价刻画。

关键词

调和函数，高阶Schwarzian导数

Higher Order of Schwarzian Derivative of the Harmonic Functions

Yutong Liu, Yi Qi

School of Mathematical Science, Beihang University, Beijing
Email: 18512238676@163.com, 07122@buaa.edu.cn

Received: Dec. 12^{th}, 2020; accepted: Jan. 11^{th}, 2021; published: Jan. 18^{th}, 2021

Abstract

In this paper, we define the higher order of Schwarzian derivative of the harmonic

文章引用: 刘禹彤, 漆毅. 调和函数的高阶Schwarzian导数[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 41-46.
DOI: 10.12677/pm.2021.111007

functions. We also prove that it is still Möbius invariant. Finally, we give an equivalent characterization of the higher order of Schwarzian derivative of the harmonic functions.

Keywords

Harmonic Function, Higher Order of Schwarzian Derivative

1. 引言

若调和函数f在单位圆内部局部单叶，则f可表示为$f=h+\overline{g}$，其中h和g均为单位圆内的解析函数。设$\omega=g'/h'$为调和函数f的第二复特征，$J_f=|h'|^2-|g'|^2$为f 的雅可比。Lewy [1]证明了调和函数f在单位圆内局部单叶当且仅当$J_f\neq 0$。单位圆内局部单叶的调和函数f，如果$J_f>0$，我们称f是正向的；如果$J_f<0$，则称f 是反向的。若调和函数$f=h+\overline{g}$为单位圆内的解析函数，显然可得$f=h$，其中$g=0$。并且，f的第二复特征$\omega=0$。

一个在单连通区域内局部单叶的解析函数f的pre-Schwarzian导数$P(f)$和Schwarzian导数$S(f)$分别定义为

$$P(f)=\frac{f''}{f'},\quad S(f)=P'(f)-\frac{1}{2}P^2(f)=(\frac{f''}{f'})'-\frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})^2. \tag{1}$$

在之后的讨论中，我们仅考虑单位圆内的解析函数，它的pre-Schwarzian导数和Schwarzian导数满足以下性质：

(1)当$\psi\circ f$和f局部单叶解析时，$P(\psi\circ f)=\big(P(\psi)\circ f\big)\cdot f'+P(f)$，$S(\psi\circ f)=\big(S(\psi)\circ f\big)\cdot(f')^2+S(f)$。

(2)当$\psi=A(w)=aw+b,\ a\neq 0$，即$A(w)$为仿射变换时，$P(A\circ f)=P(f)$。

(3)当$\psi=T(w)=\frac{aw+b}{cw+d},\ ad-bc\neq 0$，即$T(w)$为Möbius变换时，$S(T\circ f)=S(f)$。

Hernández-Martin [2] [3]给出了相应的调和函数f的pre-Schwarzian导数$P_H(f)$ 和Schwarzian导数$S_H(f)$定义。若调和函数$f=h+\overline{g}$在单位圆内局部单叶，设$\omega=g'/h'$是它的第二复特征，$J_f=|h'|^2-|g'|^2$，则

$$P_H(f)=\frac{\partial}{\partial z}logJ_f=\frac{h''}{h'}-\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2} \tag{2}$$

令$S(h)=(\frac{h''}{h'})'-\frac{1}{2}(\frac{h''}{h'})^2$为解析函数$h$的Schwarzian导数，且

$$S_H(f)=\frac{\partial}{\partial z}P_H(f)-\frac{1}{2}P_H^2(f)=S(h)+\frac{\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}(\frac{h''\omega'}{h'}-\omega'')-\frac{3}{2}(\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2})^2 \tag{3}$$

容易验证调和函数的pre-Schwarzian导数和Schwarzian导数满足以下性质：

(1)当f解析时，$P_H(f)$和$S_H(f)$满足(1)式。

(2)$P_H(f)=P_H(\overline{f})$和$S_H(f)=S_H(\overline{f})$，其中$\overline{f}$为f的共轭函数。

(3)当$\psi\circ f$局部单叶调和，f局部单叶解析时，

$$P_H(\psi\circ f)=\big(P_H(\psi)\circ f\big)\cdot f'+P(f),\quad S_H(\psi\circ f)=\big(S_H(\psi)\circ f\big)\cdot(f')^2+S(f).$$

(4)当$A(w)=aw+b\overline{w}+c,\ a^2+b^2\neq 0$，即$A(w)$为仿射调和变换，$P_H(A\circ f)=P_H(f)$。

(5)当$T(w)=\frac{aw+b}{cw+d},\ ad-bc\neq 0$，即$T(w)$为Möbius变换，$S_H(T\circ f)=S_H(f)$。

在解析函数的研究中，Schwarzian导数的高阶形式是一个重要的研究方向，许多学者从不同的角度给出了许多重要结果 [4] [5] [6] [7]。

若f在单位圆内解析，其高阶Schwarzian导数$\sigma_n(f)\ (n\geq 3)$，定义为

$$\sigma_3(f)=S(f),\quad \sigma_{n+1}(f)=\sigma_n'(f)-(n-1)P(f)\sigma_n(f) \tag{4}$$

易知$\sigma_n(f)$具有某种Möbius不变性，即若R是单位圆上的Möbius变换，则

$$\sigma_n(f\circ R)=(\sigma_n(f)\circ R)\cdot(R')^{n-1}$$

并且通过计算，我们可知，若$w=f(z)$，

$$\big(\frac{\partial^{n-3}}{\partial w^{n-3}}\sigma_3(f^{-1})\big)\circ f=\frac{\sigma_n(f)}{(f')^{n-1}} \tag{5}$$

因此，我们类似地定义了单位圆内局部单叶的调和函数f的高阶Schwarzian导数$\sigma_n(f)$形式，并且我们将证明$\sigma_n(f)$仍然具有Möbius不变性和上述性质。

2. 主要内容

若调和函数f在单位圆内局部单叶。f可被表示为$f=h+\overline{g}$，其中h和g均是单位圆内的解析函，

DOI: 10.12677/pm.2021.111007

则它的高阶Schwarzian导数$\sigma_n(f)$定义如下$(n \geq 3)$：

$$\sigma_3(f) = S_H(f), \quad \sigma_{n+1}(f) = \frac{\partial}{\partial z}\sigma_n(f) - (n-1)P_H(f)\sigma_n(f). \tag{6}$$

容易验证调和函数的$\sigma_n(f)$满足以下性质：

(1)当f解析时，$\sigma_n(f)$满足(4)式。

(2)$\sigma_n(f) = \sigma_n(\overline{f})$。

(3)当$A(w) = aw + b\overline{w} + c$, $a^2 + b^2 \neq 0$，即$A(w)$为仿射调和变换，$\sigma_n(A \circ f) = \sigma_n(f)$。

(4)当$T(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$, $ad - bc \neq 0$，即$T(w)$为Möbius变换，f在单连通区域内局部单叶调和时，$\sigma_n(T \circ f) = \sigma_n(f)$。

性质2.1. *若R是单位圆上的Möbius变换，f是单位圆内的局部单叶调和函数，则*

$$\sigma_n(f \circ R) = (\sigma_n(f) \circ R) \cdot (R')^{n-1}$$

证明:

当$n = 3$时，显然成立。

当$n > 3$时，使用数学归纳法证明。假设当$n = k$时，结论成立。

当$n = k + 1$时，

$$\begin{aligned}
&\sigma_{k+1}(f \circ R) = \frac{\partial}{\partial z}\sigma_k(f \circ R) - (k-1)P_H(f \circ R)\sigma_k(f \circ R) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\big((\sigma_k(f) \circ R) \cdot (R')^{k-2}\big) - (k-1)\big((P_H(f) \circ R) \cdot R' + \frac{R''}{R'}\big) \cdot \big((\sigma_k(f) \circ R) \cdot (R')^{k-1}\big) \\
&= \big(\frac{\partial}{\partial w}\sigma_k(f) \circ R\big) \cdot (R')^k + (k-1)(\sigma_k(f) \circ R) \cdot (R')^{k-2}R'' \\
&\quad - (k-1)(\sigma_k(f) \circ R)(P_H(f) \circ R)(R')^k - (k-1)(\sigma_k(f) \circ R) \cdot (R')^{k-1}R'' \\
&= (\sigma_{k+1}(f) \circ R) \cdot (R')^k.
\end{aligned}$$

我们仍将使用数学归纳法证明以下性质。

性质2.2. *若$f = h + \overline{g}$是单位圆内的局部单叶调和函数。假设函数f存在反函数f^{-1}，且f^{-1}为调和函数。则*

$$\big(\frac{\partial^{n-3}}{\partial w^{n-3}}\sigma_3(f^{-1})\big) \circ f = (\frac{\overline{h'}}{J_f})^{n-1} \cdot \sigma_n(f) \tag{7}$$

证明：

首先，设$w=f(z)$，我们知道，

$$f_w^{-1}=\frac{\overline{h'}}{J_f},\ \ f_{\overline{w}}^{-1}=-\frac{g'}{J_f},\ \ J_{f^{-1}}=|f_w^{-1}|^2-|f_{\overline{w}}^{-1}|^2=\frac{1}{J_f}.$$

并且定义$\frac{\partial z}{\partial w}=f_w^{-1}$。

当$n=3$时，

$$\sigma_3(f)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}logJ_f-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z}logJ_f)^2=\frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2}J_f}{J_f}-\frac{3}{2}\frac{(\frac{\partial}{\partial z}J_f)^2}{J_f^2}$$

其中，

$$\frac{\partial}{\partial z}J_f=h''\overline{h'}-g''\overline{g'},\qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}J_f=h'''\overline{h'}-g'''\overline{g'}.$$

类似地

$$\sigma_3(f^{-1})=\frac{\frac{\partial^2}{\partial w^2}J_{f^{-1}}}{J_{f^{-1}}}-\frac{3}{2}\frac{(\frac{\partial}{\partial w}J_{f^{-1}})^2}{J_{f^{-1}}^2}$$

则

$$\begin{aligned}\sigma_3(f^{-1})\circ f&=J_f\cdot(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{J_f})\cdot(\frac{\partial z}{\partial w})^2+J_f\cdot(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{J_f})\cdot(\frac{\partial z}{\partial w})\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial w})-\frac{3}{2}J_f^2(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{J_f})^2\cdot(\frac{\partial z}{\partial w})^2\\&=\frac{(\overline{h'})^2}{J_f}\cdot\frac{(\frac{\partial^2}{\partial z^2}J_f)J_f^2-2(\frac{\partial}{\partial z}J_f)^2J_f}{J_f^4}-(\frac{\overline{h'}\frac{\partial}{\partial z}J_f}{J_f^2})^2+\frac{3}{2}(\overline{h'})^2(\frac{\frac{\partial}{\partial z}J_f}{J_f^2})^2\\&=\frac{(\overline{h'})^2}{J_f^2}\cdot(\frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2}J_f}{J_f}-\frac{3}{2}\frac{(\frac{\partial}{\partial z}J_f)^2}{J_f^2}).\end{aligned}$$

所以，当$n=3$时，(7)式成立。

当$n>3$时，使用数学归纳法证明。假设当$n=k$时，结论成立。

当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}\big(\frac{\partial^{k-2}}{\partial w^{k-2}}\sigma_3(f^{-1})\big)\circ f&=\frac{\partial}{\partial z}\big((\frac{\overline{h'}}{J_f})^{k-1}\cdot\sigma_k(f)\big)\frac{\partial z}{\partial w}\\&=-(k-1)\sigma_k(f)(\frac{\overline{h'}}{J_f})^{k-1}\frac{\overline{h'}(\frac{\partial}{\partial z}J_f)}{J_f^2}+(\frac{\overline{h'}}{J_f})^k(\frac{\partial}{\partial z}\sigma_k(f))\\&=-(k-1)\sigma_k(f)(\frac{\overline{h'}}{J_f})^k\frac{\frac{\partial}{\partial z}J_f}{J_f}+(\frac{\overline{h'}}{J_f})^k\big(\sigma_{k+1}(f)+(k-1)P_H(f)\sigma_k(f)\big)\\&=(\frac{\overline{h'}}{J_f})^k\cdot\sigma_{k+1}(f).\end{aligned}$$

其中$P_H(f)=\frac{\frac{\partial}{\partial z}J_f}{J_f}$。

我们需要注意的是在 [8]中，张和刘给出了单叶调和映照的反函数仍调和的等价刻画。但是实际上，若单叶函数f存在f_z和$f_{\overline{z}}$，我们均可由雅可比函数$J_f=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2$，定义其pre-Schwarzian导

数和Schwarzian导数，并且得到它的高阶Schwarzian导数形式。其次，可以证明高阶形式满足性质2.1和性质2.2。

基金项目

国家自然科学基金资助项目No. 11871085。

参考文献

[1] Lewy, H. (1936) On the Non-Vanishing of the Jacobian in Certain One-to-One Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **42**, 689-692. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1936-06397-4

[2] Hernández, R. and Martín, M.J. (2015) Pre-Schwarzian and Schwarzian Derivatives of Harmonic Mappings. *Journal of Geometric Analysis*, **25**, 64-91. https://doi.org/10.1007/s12220-013-9413-x

[3] Hernández, R. and Martín, M.J. (2017) On the harmonic Möbius Transformations. eprint arXiv:1710.05952.

[4] Kim, S.-A. and Sugawa, T. (2011) Invariant Schwarzian Derivatives of Higher Order. *Complex Analysis and Operator Theory*, **5**, 659-670. https://doi.org/10.1007/s11785-010-0081-6

[5] Donaire, J.J. (2019) A Shimorin-Type Estimate for Higher-Order Schwarzian Derivatives. *Computational Methods and Function Theory*, **19**, 315-322. https://doi.org/10.1007/s40315-019-00265-0

[6] Tamanoi, H. (1996) Higher Schwarzian Operators and Combinatorics of the Schwarzian Derivative. *Mathematische Annalen*, **305**, 127-151. https://doi.org/10.1007/BF01444214

[7] Cho, N.E., Kumar, V. and Ravichandran, V. (2018) Sharp Bounds on the Higher Order Schwarzian Derivatives for Janowski Classes. *Symmetry*, **10**, 348. https://doi.org/10.3390/sym10080348

[8] 张兆功, 刘礼泉. 单叶调和映照的反函数[J]. 数学进展, 1996, 25(3): 270-276.