Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 47-52
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111008

Hans汉斯

S-Poset内射包的一个注记

李玉林

长安大学理学院，陕西 西安
Email: 1942348167@qq.com

收稿日期：2020年12月12日；录用日期：2021年1月11日；发布日期：2021年1月18日

摘 要

设S是一个序半群，本文采用序代数理论和quantale理论中的研究方法，在以S-poset为对象以S-次可乘映射为态射的范畴中，对于一类特殊的态射$\varepsilon_{\le}$，构造了S-poset的内射包。本文的结果不仅推广了基于S是序幺半群时的相应结果，而且也得到了剩余S-poset的内射包。

关键词

序半群，*S*-Poset，内射包

A Note on Injective Hulls of *S*-Poset

Yulin Li

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi
Email: 1942348167@qq.com

Received: Dec. 12th, 2020; accepted: Jan. 11th, 2021; published: Jan. 18th, 2021

Abstract

Let S be a posemigroup. Inspired by the study method of order algebra theory and quantale theory, we construct an $\varepsilon_{\le}$-injective hull for an arbitrary S-poset in the category of S-poset with S-submultiplicative morphisms with respect to a specific class of morphisms $\varepsilon_{\le}$. The results of the present paper not only generalize the corresponding results based on S be a pomonoid but also lead to injective hull for residuated S-poset.

Keywords

Posemigroup, *S*-Poset, Injective Hull

文章引用: 李玉林. *S*-Poset 内射包的一个注记[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 47-52.
DOI: 10.12677/pm.2021.111008

1. 引言

受群作用和环的模理论研究的启发，在众多的学科中都产生了半群作用相关结构。因此在不同的领域半群作用有着不同的名称，比如：S-自动机，S-操作数，S-多边形，S-集，S-代数等[1] [2] [3] [4]。作为半群作用与偏序集理论的结合，S-poset 理论近年来得到了发展[5]-[10]。粗略地说，S-poset 是一个带有序半群 S-作用并且满足一定的相容条件的偏序集。

内射性是重要的范畴性质，在以S-poset为对象的范畴中，内射性也得到了众多的关注与研究[1] [5] [6] [7] [11]。目前对于该范畴的研究，S 通常被假定为一个序幺半群，带有的态射不同，该范畴的性质相应的也不同。为了得到以 S-poset 为对象的范畴中的内射对象的完整刻画，在文献[11]中，研究了以 S-poset 为对象以 S-次可乘映射为态射构成的范畴中的内射对象，并进一步得到了 S-poset 相对于一类 $\varepsilon_{\le}$ 态射的内射包。但，文献[11]中的主要结果是基于 S 为序幺半群得到的，因此，一个自然的问题是，这些结果能否推广到 S 是一般的序半群上，这是本文的主要动机。在以 S-poset 为对象以 S-次可乘映射为态射构成的范畴中，对于一类特殊的态射 $\varepsilon_{\le}$，本文构造了任意 S-poset 的内射包。

2. 预备知识

设 P 是一个偏序集[12]，$A \subseteq P$，定义 $\downarrow A = \{x \in P : \exists a \in A, s.t.\ x \le a\}$。如果 $A = \downarrow A$，则称 A 为下集。$\downarrow a = \downarrow \{a\}$。本文用到的其它有关偏序集的概念和结论请参考文献[12]。

定义 2.1 [13]设 $(S,\otimes)$ 是半群，$(S,\le)$ 是偏序集。如果 $\le$ 关于半群的乘法 $\otimes$ 是相容的，即 $\forall s_1,s_2,t_1,t_2 \in S, s_1 \le t_1, s_2 \le t_2$，有 $s_1 \otimes s_2 \le t_1 \otimes t_2$，则称 $(S,\otimes,\le)$ 为序半群。进一步，如果 $(S,\otimes)$ 是一个幺半群，则称 $(S,\otimes,\le)$ 是序幺半群。

如果没有特别说明，本文中的 $(S,\otimes,\le)$ 均为序半群，S^1 表示一个序幺半群带有幺元 1。

定义 2.2 [5]设 $(A,\le)$ 是一个偏序集，$*: S \times A \to A$ 是一个映射($\forall (s,a) \in S \times A$，$*(s,a)$ 记为 $s*a$)。如果对任意的 $a,b \in A, s,t \in S$，满足以下条件：

(1) $(s \otimes t)*a = s*(t*a)$；

(2) $s \le t, a \le b \Rightarrow s*a \le t*b$，

则称 $(A,*,\le)$ 为 S-poset，为方便简记为 ${}_S A$ 或 A。如果 S^1 是一个序幺半群，S^1-poset A 还需满足：$\forall a \in A, 1*a = a$。

定义 2.3 [11]设 $({}_S A,*,\le)$ 是 S-poset，$(A,\le)$ 是完备格，且 $\forall M \subseteq A, s \in S$，都有 $s*(\vee M) = \vee\{s*m \mid m \in M\}$，则称 ${}_S Q$ 是一个 S-quantale。$s*\_ : A \to A$ 有伴右随，记为 $s \to_S \_ : A \to A$。

设 $({}_S A,*,\le)$ 和 $({}_S B,*,\le)$ 是 S-poset，称映射 $f: {}_S A \to {}_S B$ 是 S-可乘的(相应的，S-次可乘的)，如果 $\forall a \in A, s \in S$，$s*f(a) = f(s*a)$ (相应的，$s*f(a) \le f(s*a)$)。

设 $({}_S A,*,\le)$ 和 $({}_S B,*,\le)$ 是 S-poset，称映射 $f: {}_S A \to {}_S B$ 是 S-poset 同态(相应的 S-poset 次同态)，如果 $f:(A,\le) \to (B,\le)$ 是保序映射且 f 是 S-可乘的(相应的，S-次可乘的)。

以 S-poset 为对象以 S-poset 同态为态射的范畴记为 ${}_S\mathbf{Pos}$。

以 S-poset 为对象以 S-poset 次同态为态射的范畴记为 ${}_S\mathbf{Pos}^{\le}$。

定义 2.4 [14]设 **A** 是一个范畴，M 是 A 中的一个态射类，

1) 称 **A** 中的对象 C 为 M-内射的，如果对 M 中的任意态射 $m:A\to B$ 以及 A 中的态射 $f:A\to C$，都存在唯一的态射 $g:B\to C$ 使得 $f=g\circ m$。

2) 称 M 中的态射 $m:A\to B$ 为 M-本质的，如果对 **A** 中任意态射 $f:B\to C$，$f\circ m\in M$ 有 $f\in M$。

3) 对于 **A** 中的对象 A 的和对象 B，称对象 B 是对象 A 的 M-内射包，如果对象 B 是 M-内射的，且存在一个 M-本质态射 $m:A\to B$。

有关范畴的相关知识，本文未作解释的请参考文献[14]。

3. 主要结果

注意本文中的 S 是一个序半群而不是序幺半群。但是根据文献[11]，我们可以得到一系列相似的结论。为简明起见，我们省掉类似的证明。

设 ε 表示是序嵌入的 S-poset 同态构成的类。设 $\varepsilon_{\le}$ 表示范畴 ${}_S\mathbf{Pos}^{\le}$ 中满足条件：$\forall a,a'\in A,s\in S$，$s*e(a)\le e(a')\Rightarrow s*a\le a'$ 的态射构成的类。显然，$\varepsilon\subseteq\varepsilon_{\le}$。

通过类似于文献[11]中命题 4 和命题 5 的证明，可以得到以下结论：

命题 3.1 (1)设 ${}_SQ$ 是一个 S-quantale，则 ${}_SQ$ 在范畴 ${}_S\mathbf{Pos}^{\le}$ 中是 $\varepsilon_{\le}$-内射的。

(2) 在范畴 ${}_S\mathbf{Pos}^{\le}$ 中，每个 S-quantale 的收缩是 S-quantale。

对任意一个偏序集 P，$D(P)$ 表示 P 的所有下集组成的集合。设 $({}_SA,*,\le)$ 是一个 S-poset。对任意的 $X,Y\in D(A),s\in S$，定义

$$s*X=\{s*x\mid x\in X\}.$$

$$s\bullet X=\downarrow(s*X).$$

可以证明 $({}_SD(A),\bullet,\subseteq)$ 也是一个 S-quantale。因此，由命题 3.1 我们可以知道 ${}_SD(A)$ 在范畴 ${}_S\mathbf{Pos}^{\le}$ 中是 $\varepsilon_{\le}$-内射的。而且，类似于文[11]中定理 7 的证明，可知 ${}_SA$ 在范畴 ${}_S\mathbf{Pos}^{\le}$ 中是 $\varepsilon_{\le}$-内射的当且仅当 ${}_SA$ 是一个 S-quantale。

回忆一下偏序集 P 上的映射 $j:P\to P$ 被称为 P 上的闭包算子，如果 j 是保序的，增值的，幂等的。令 $P_j=j(P)$，即 $P_j=\{x\in P\mid j(x)=x\}=\{j(x)\mid x\in P\}$。如果 j 是 P 上的闭包算子，则 $\forall a,b\in P$，$a\le j(b)\Leftrightarrow j(a)\le j(b)$。有关闭包算子的更多性质，请参考文献[12]。

设 $({}_SA,*,\le)$ 是 S-poset，如果 j 是 $({}_SA,*,\le)$ 上的闭包算子，且 j 是 S-次可乘的，则 j 被称为 $({}_SA,*,\le)$ 上的核映射。容易得到如下的结论：

1) 设 j 是 S-poset $({}_SA,*,\le)$ 上的核映射，则 $\forall a\in A,s\in S$，$j(s*a)=j(s*j(a))$。

2) 设 j 是 S-quantale $({}_SQ,*,\le)$ 上的核映射，则 $({}_S(Q_j),*_j,\le)$ 是 S-quantale，其中，$\forall a\in Q_j,s\in S$，$s*_j a=j(s*a)$。

设 $({}_SA,*,\le)$ 是 S-poset，对任意的 $D\in D(A)$，定义

$$cl(D)=\{x\in A\mid \forall a\in A,s\in S,s\bullet D\subseteq\downarrow a\Rightarrow s*x\le a\};$$

$$ul(D)=\{x\in A\mid \forall b\in A,D\subseteq\downarrow b\Rightarrow x\le b\};$$

$$cu(D)=cl(D)\cap ul(D).$$

引理 3.2 设 $({}_SA,*,\le)$ 是 S-poset，则 cu 是 S-quantale $({}_SD(A),\bullet,\subseteq)$ 上的核映射，且 $\forall a\in A$，

$cu(\downarrow a)=\downarrow a$。

证明：容易验证 cl 和 ul 是 $({}_S D(A),\bullet,\subseteq)$ 上的闭包算子。所以 cu 是 ${}_S D(A)$ 上的闭包算子。设 $s\in S, D\in D(A)$，为证明 $s\bullet cu(D)\subseteq cu(s\bullet D)$，只需证明 $s*cu(D)\subseteq cu(s\bullet D)$。

(1) 设 $x\in cu(D), a\in A, t\in S, t\bullet(s\bullet D)\subseteq\downarrow a$，则 $(t\otimes s)\bullet D\subseteq\downarrow a$。因为 $x\in cu(D)\subseteq cl(D)$，所以 $(t\otimes s)*x\le a$，从而 $t*(s*x)\le a$，因此 $s*x\in cl(s\bullet D)$。

(2) 设 $x\in cu(D), b\in A, s\bullet D\subseteq\downarrow b$，则 $x\in cu(D)\subseteq cl(D)$。所以 $s*x\le b$。从而 $s*x\in ul(s\bullet D)$。

由(1) (2)可知 $s*cu(D)\subseteq cl(s\bullet D)\cap ul(s\bullet D)=cu(s\bullet D)$。

(3) 设 $k\in A$，则 $ul(\downarrow k)=\downarrow k$。设 $x\in ul(\downarrow k), a\in A, s\in S, s\bullet(\downarrow k)\subseteq\downarrow a$，则 $s*x\le s*k\in s\bullet(\downarrow k)\subseteq\downarrow a$，即 $s*x\le a$，所以 $x\in cl(\downarrow k)$，从而 $ul(\downarrow k)\subseteq cl(\downarrow k)$。因此 $cu(\downarrow k)=ul(\downarrow k)\cap cl(\downarrow k)=ul(\downarrow k)=\downarrow k$。

由引理 3.2，可以得到如下的命题：

命题 3.3 设 $({}_S A,*,\le)$ 是 S-poset，则 $({}_S(D(A)_{cu}),\bullet_{cu},\subseteq)$ 是一个 S-quantale。因此 $({}_S(D(A)_{cu}),\bullet_{cu},\subseteq)$ 在范畴 ${}_S\mathbf{Pos}^{\le}$ 中是 $\varepsilon_{\le}$ 内射的。

设 $({}_S A,*,\le)$ 是 S-poset，定义一个映射 $\eta: A\to D(A)_{cu}$ 为：

$$\forall a\in A, \eta(a)=\downarrow a.$$

定理 3.4 设 $({}_S A,*,\le)$ 是 S-poset，则 $({}_S(D(A)_{cu}),\bullet_{cu},\subseteq)$ 是 $({}_S A,*,\le)$ 在范畴 ${}_S\mathbf{Pos}^{\le}$ 中的 $\varepsilon_{\le}$-内射包。

证明：只需证明 $\eta: {}_S A\to {}_S D(A)_{cu}$ 是 $\varepsilon_{\le}$-本质的。

(1) 设 $s\in S, a\in A$，则 $s\bullet_{cu}\eta(a)=cu(s\bullet\downarrow(a))=cu(\downarrow(s*a))=\downarrow(s*a)=\eta(s*a)$。所以 $\eta: {}_S A\to {}_S D(A)_{cu}$ 是 S-次可乘的。又因为 η 是序嵌入，从而，$\eta\in\varepsilon\subseteq\varepsilon_{\le}$，因此 $\eta\in\varepsilon_{\le}$。

(2) 设 $\psi:({}_S(D(A)_{cu}),\bullet_{cu},\subseteq)\to({}_S B,*,\le)$ 是 S-poset 次同态，且 $\psi\circ\eta\in\varepsilon_{\le}$。要证明 $\psi\in\varepsilon_{\le}$，只需证明 $\forall D,D'\in D(A)_{cu}, t\in S$，$t*\psi(D)\le\psi(D')\Rightarrow t\bullet_{cu}D\subseteq D'$。

设 $D,D'\in D(A)_{cu}, t\in S$，$t*\psi(D)\le\psi(D')$，则 $D'=cu(D')$，$t\bullet_{cu}D=cu(t\bullet D)$。

(i) 设 $s\in S, a\in A, s\bullet D'\subseteq\downarrow a$，则 $cu(s\bullet D')\subseteq cu(\downarrow a)=\downarrow a=\eta(a)$。对任意的 $d\in D$，有

$$\begin{aligned}
&s*(t*(\psi\eta(d)))=s*(t*(\psi(\downarrow d)))\\
&\le s*(t*(\psi(D)))(\because\downarrow d\subseteq d)\\
&\le s*\psi(D')\\
&\le\psi(s\bullet_{cu}D')\ (\because\psi\text{是}S\text{-次可乘的})\\
&=\psi(cu(s\bullet D'))\\
&\le\psi(\eta(a))
\end{aligned}$$

因为 $\psi\circ\eta\in\varepsilon_{\le}$，从而 $s*(t*d)\le a$。由 d 的任意性可知 $s*(t*D)\subseteq\downarrow a$，所以 $s\bullet(t\bullet D)=s\bullet\downarrow(t*D)=\downarrow(s*(t*D))\subseteq\downarrow a$。对任意的 $x\in t\bullet_{cu}D$，有 $x\in cl(t\bullet D)$，从而 $s*x\le a$，所以 $x\in cl(D')$。由于 x 的任意性，因此，$t\bullet_{cu}D\subseteq cl(D')$。

(ii) 设 $b\in A, D'\subseteq\downarrow b$，对任意的 $e\in D$，有 $t*(\psi\eta(e))=t*\psi(\downarrow e)\le t*\psi(D)\le\psi(D')\le\psi(\downarrow b)=\psi\eta(b)$。由假设 $\psi\circ\eta\in\varepsilon_{\le}$，可得 $t*e\le b$。因此 $t*e\in ul(D')$。

由于 e 的任意性，从而 $t*D\subseteq ul(D')$，所以 $t\bullet D\subseteq ul(D')$。因此 $t\bullet_{cu}D\subseteq ul(t\bullet D)\subseteq ul(ul(D'))=ul(D')$。

由(i)~(ii)可得 $t\bullet_{cu}D\subseteq cl(D')\cap ul(D')=cu(D')=D'$。

引理 3.5 在 S^1-poset $({}_{S^1}A,*,\leq)$ 中，$cu=cl$。

证明：设 $D\in D(A), y\in cl(D)$，设 $b\in A, D\subseteq\downarrow b$，则 $1\bullet D=D\subseteq\downarrow b$。从而 $y=1*y\leq b$，所以 $y\in ul(D)$。所以 $cl(D)\subseteq ul(D)$。因此 $cu(D)=cl(D)$。

通过定理 3.4，引理 3.5，可以重新得到文献[11]的主要结论。

命题 3.6 设 $({}_{S^1}A,*,\leq)$ 是 S^1-poset，则 $\left(\eta,{}_{S^1}D(A)_{cl}\right)$ 是 $({}_{S}A,*,\leq)$ 在范畴 ${}_{S}\mathbf{Pos}^{\leq}$ 中的 $\varepsilon_{\leq}$ 内射包。

定义 3.7 设 $({}_{S}A,*,\leq)$ 是 S-poset，如果对任意的 $s\in S$，$s*-:A\to A$ 有右伴随，即有一个映射 $s\to_S -:A\to A$，使得对任意的 $a,b\in A$，$s*a\leq b\Leftrightarrow a\leq s\to_S b$，则称 S-poset $({}_{S}A,*,\leq)$ 为剩余 S-poset。

引理 3.8 在剩余 S-poset $({}_{S}A,*,\leq)$ 中，$cu=ul$。

证明：设 $D\in D(A), x\in ul(D)$。设 $s\in S, a\in A, s\bullet D\subseteq\downarrow a$。则 $s*D\subseteq\downarrow a$。$\forall d\in D$，$s*d\leq a$，即 $d\leq s\to_S a$，从而，$D\subseteq\downarrow(s\to_S a)$。由假设 $x\in ul(D)$，可得 $x\leq s\to_S a$，即 $s*x\leq a$，从而 $x\in cl(D)$，所以 $ul(D)\subseteq cl(D)$，因此 $cu(D)=ul(D)$。

由定理 3.4 和引理 3.8，我们可以得到如下的结论。

命题 3.9 设 $({}_{S}A,*,\leq)$ 是一个剩余 S-poset，则 $\left(\eta,{}_{S}\left(D(A)_{ul}\right)\right)$ 是 ${}_{S}A$ 在范畴 ${}_{S}\mathbf{Pos}^{\leq}$ 中的 $\varepsilon_{\leq}$-内射包。

推论 3.10 在剩余 S^1-poset $({}_{S^1}A,*,\leq)$ 中，$cu=cl=ul$。

4. 结论

本文运用序代数理论的相关知识，构造出了 S-poset 的内射包。并推广到 S 是序幺半群时的相应结果，最后得到剩余 S-poset 的内射包。

参考文献

[1] Skornyakov, L.A. (1986) Injectivity of All Ordered Left Polygons over a Monoid. *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Seriya I*, **3**, 17-19.

[2] Kilp, M., Knauer, U. and Mikhalev, A.V. (2000) Monoids, Acts and Categories (With Applications to Wreath Products and Graphs). Walter de Gruyter, Berlin, New York. https://doi.org/10.1515/9783110812909

[3] 王蕊，赵彬. Quantale 代数及其代数理想[J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(2): 44-49.

[4] 李伟. S-代数的表示范畴[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2010, 32(4): 101-104.

[5] Fakhruddin, S.M. (1998) On the Category of *S*-Posets. *Acta Mathematica Scientia*, **52**, 85-92.

[6] Zhang, X. and Laan, V. (2007) On Homological Classification of Pomonoids by Regular Weak Injectivity Properties of *S*-Posets. *Central European Journal of Mathematics*, **5**, 181-200. https://doi.org/10.2478/s11533-006-0036-3

[7] Ebrahimi, M.M., Mahmoudi, M. and Rasouli, H. (2010) Banaschewski's Theorem for *S*-Posets: Regular Injectivity and Completeness. *Semigroup Forum*, **80**, 313-324. https://doi.org/10.1007/s00233-010-9207-4

[8] 张霞，徐彦涛. 偏序群 S 上 S-偏序系的内射包[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2014, 46(4): 12-15.

[9] 武全，赵彬. 模糊 S-偏序集的内射壳[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(2): 216-224.

[10] 毛徐新，徐罗山. S-超连续偏序集的性质及等价刻画[J]. 计算机工程与应用, 2015, 51(1): 9-12.

[11] Zhang, X. and Laan, V. (2015) On Injective Hulls of S-Posets. *Semigroup Forum*, **91**, 62-70. https://doi.org/10.1007/s00233-014-9646-4

[12] Davey, B.A. and Priestley, H.A. (2002) Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809088

[13] 谢祥云. 序半群引论[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[14] Adámek, J., Herrlich, H. and Strecker, G.E. (1990) Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats. Wiley, New York.