Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 53-61
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111009

*q*微分算子的应用

丁瑾源一

重庆师范大学，重庆
Email: 929424820@qq.com

收稿日期：2020年12月12日；录用日期：2021年1月11日；发布日期：2021年1月18日

摘　要

本文通过对两个基础超几何级数恒等式的一系列变换，再对其应用*q*微分算子 $D_{q,a}^{n}$ ，推导出了两个终止型的基础超几何级数恒等式。再将其中一个恒等式进行简单的字母代换后，和另外三个终止型的级数恒等式联立起来，得到了三个新的恒等式。这三个新的恒等式是对已知恒等式的扩展，深入的研究将在以后的研究中给出。

关键词

*q*微分算子，终止型级数，海涅级数，*q*-移位阶乘，基础超几何级数

The Applications of the *q*-Difference Operator

Jinyuanyi Ding

Chongqing Normal University, Chongqing
Email: 929424820@qq.com

Received: Dec. 12th, 2020; accepted: Jan. 11th, 2021; published: Jan. 18th, 2021

Abstract

In this paper, we derive two terminating basic hypergeometric series identities by doing some transformations and applying *q*-difference operator $D_{q,a}^{n}$ to two basic hypergeometric series identities. After we substitute some parameters in one of them, then combine other three terminating identities with it, we derive three new identities. They are extensions of the ones already known, and further research will be given in future studies.

文章引用: 丁瑾源一. *q* 微分算子的应用[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 53-61.
DOI: 10.12677/pm.2021.111009

Keywords

***q*-Difference Operator, Terminating Series, Heine's Series, *q*-Shift Factorial, Basic Hypergeometric Series**

1. 引言

自从G.-C. Rota和他的同事们将哑运算发展起来后[1] [2]，利用算子的方法研究基础超几何级数就吸引了Goldman和Rota [3] [4]，Andrews [5]，Roman [6]的兴趣，它们在相应的文章中做了一系列的研究。在算子后续的发展中，William Y. C. Chen 和 Zhi-Guo Liu 对一些特殊的算子做了研究。其中他们对添加参数的算子研究颇深，利用这些特殊的算子去证明了一部分著名的恒等式[7]。算子作为一个证明恒等式的工具，被国际上很多数学大家和学者拿来研究，其中 Zhi-Guo Liu 还利用算子以及莱布尼兹公式逐步推导得到了几个很有价值的扩展式，其中一个扩展式推导出了著名的 Ramanujan θ 函数的相关函数[8]。算子的应用对于基础超几何函数的研究至关重要。

1997 年，William Y. C.和 Zhi-Guo Liu 介绍了一种建立在 q-移位算子和 q-微分算子基础上的算子[9]，它出现在 Roman 的工作中[6]，William Y. C.和 Zhi-Guo Liu 用以下符号 θ 来表示：

$$\theta = \eta^{-1} D_q$$

在这篇文章中还引入了一个由 θ 算子构造的指数算子：

$$E(b\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b\theta)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n}$$

其中 b 是一个参数。用欧拉等式来表示，$E(b\theta)$ 也可写成 $(-b\theta;q)_\infty$。随后通过 θ 算子的莱布尼兹公式，得到了它的几个基本性质：

$$\theta\left\{(at;q)_\infty\right\} = (-t)(at;q)_\infty$$

$$\theta^k\left\{(at;q)_\infty\right\} = (-t)^k (at;q)_\infty$$

从以上 θ 算子的基本性质，又推导出了 $E(b\theta)$ 指数算子的重要性质：

$$E(b\theta)\left\{(at;q)_\infty\right\} = (at,bt;q)_\infty$$

$$E(b\theta)\left\{(as,at;q)_\infty\right\} = \frac{(as,at,bs,bt;q)_\infty}{(abst/q;q)_\infty}$$

William Y. C.和 Zhi-Guo Liu 紧接着发表了第二篇文章[7]，文中构造了一个基于 D_q 算子的 T 算子：

$$T(bD_q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bD_q)^n}{(q;q)_n}$$

以及它的两个基本性质：

$$T\left(bD_q\right)\left\{\frac{1}{(at;q)_\infty}\right\}=\frac{1}{(at,bt;q)_\infty}$$

$$T\left(bD_q\right)\left\{\frac{1}{(as,at;q)_\infty}\right\}=\frac{(abst;q)_\infty}{(as,at,bs,bt;q)_\infty}$$

应用 T 算子，William Y. C.和 Zhi-Guo Liu 证明了著名的 q-Pfaff-Saalschütz 公式、高斯 ${}_2\phi_1$ 求和公式和欧拉转换公式的 Jackson q-模拟。用添加参数的方法，q-Pfaff-Saalschütz 公式可以很容易地从 q-Chu-Vandermonde 卷积公式中推导得到；高斯 ${}_2\phi_1$ 求和公式可以由 Cauchy 二项式定理简单推导得到；欧拉转换公式的 Jackson q-模拟也可以由 Cauchy 二项式定理的变形推导得到。

2003 年，Zhi-Guo Liu 证明了如何使用 q-指数算子技术从 q-Chu-Vandermonde 卷积公式推导出 q-Hahn 多项式的转换公式[10]，用同样的方法，文中还证明了 Sears 的 ${}_3\phi_2$ 转换公式，它可以从 Heine 的转换公式的 Roger 迭代得到；以及著名的 Sears 的 ${}_4\phi_3$ 转换公式，它可以从他的 ${}_3\phi_2$ 转换公式推导得到。随后，同样用算子技术，文中给出了三项 Sears 的 ${}_3\phi_2$ 转换公式和 Andrews 的恒等式的新证明。

2005 年，Zhizheng Zhang 和 Jun Wang 介绍了两个有趣的算子恒等式[11]，将它们和 q-指数算子技术应用在了许多基础超几何级数及 q-积分的终止型求和公式中，推导出了许多 q-级数恒等式和 q-积分恒等式。这篇文章首先引入了两个 n 阶算子：

$$\theta^n\left\{\frac{(at;q)_\infty}{(av;q)_\infty}\right\}=v^n q^{-\binom{n}{2}}(t/v;q)_n\frac{(at;q)_\infty}{(av/q^n;q)_\infty}$$

$$D_q^n\left\{\frac{(av;q)_\infty}{(at;q)_\infty}\right\}=t^n(v/t;q)_n\frac{(avq^n;q)_\infty}{(at;q)_\infty}$$

接下来，这篇文章介绍了两个新的算子恒等式，它们是 William Y. C.和 Zhi-Guo Liu 在前文中引入的 T 算子和 $E(b\theta)$ 指数算子的推广：

$$\begin{aligned}T\left(dD_q\right)\left\{\frac{(av;q)_\infty}{(as,at,aw;q)_\infty}\right\}&=(av,dv;q)_\infty\frac{(adstw/v;q)_\infty}{(as,at,aw,ds,dt,dw;q)_\infty}\\&\quad\times{}_3\phi_2\left(\begin{matrix}v/s,v/t,v/w\\av,dv\end{matrix};q,adstw/v\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E(d\theta)\left\{\frac{(at,as,aw;q)_\infty}{(av;q)_\infty}\right\}\\&=\frac{(at;q)_\infty}{(av;q)_\infty}\cdot\frac{(as,aw,ds,dw;q)_\infty}{(adsw/q;q)_\infty}{}_3\phi_2\left(\begin{matrix}t/v,q/as,q/aw\\q/av,q^2/adsw\end{matrix};q,q\right)\end{aligned}$$

2006 年，Jian-Ping Fang 构造了一个新的 q-指数算子[12]：

$${}_1\phi_0\left(\begin{matrix}b\\-\end{matrix};q,-c\theta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b;q)_n(-c\theta)^n}{(q;q)_n}$$

并且推导得到了许多算子恒等式：

$${}_1\phi_0\left(\begin{matrix}b\\-\end{matrix};q,-c\theta\right)\left\{\frac{(as,at;q)_\infty}{(aw;q)_\infty}\right\}=\frac{(as,at,bct;q)_\infty}{(aw,ct;q)_\infty}{}_3\phi_2\left(\begin{matrix}b,s/w,q/at\\q/ct,q/aw\end{matrix};q,q\right)$$

$$ {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} b \\ - \end{matrix} ;q,-c\theta\right)\left\{\frac{(as;q)_\infty}{(aw;q)_\infty}\right\}=\frac{(as;q)_\infty}{(aw;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left(\begin{matrix} b,s/w \\ q/aw \end{matrix} ;q,qc/a\right) $$

$$ {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} b \\ - \end{matrix} ;q,-c\theta\right)\left\{(as;q)_\infty\right\}=\frac{(as,bcs;q)_\infty}{(cs;q)_\infty} $$

应用这些算子恒等式，他给出了 Jackson 的 ${}_2\phi_2$ 转换公式的一个形式扩展式。同时，通过算子技术，他还推导得出了 Bailey 的 ${}_3\psi_3$ 求和公式的形式扩展式，以及 Sears 终止型平衡 ${}_4\phi_3$ 转换公式的扩展。

2007 年，Vincent Y. B. Chen，Nancy S. S. Gu 介绍了 Cauchy 扩充算子[13]：

$$ T\left(a,b;D_q\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}\left(bD_q\right)^n $$

很明显，这个 Canchy 算子包含两个参数，它可作为算子 $T\left(bD_q\right)$ 的推广。

接着，他们令算子 $T\left(a,b;D_q\right)$ 作用在参数 c 上，以下恒等式是 Cauchy q-二项式定理的结果：

$$ T\left(a,b;D_q\right)\left\{\frac{1}{(ct;q)_\infty}\right\}=\frac{(abt;q)_\infty}{(bt,ct;q)_\infty} $$

其中 $|bt|<1$。

$$ T\left(a,b;D_q\right)\left\{\frac{1}{(cs,ct;q)_\infty}\right\}=\frac{(abt;q)_\infty}{(bt,cs,ct;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left\{\begin{matrix} a,ct \\ abt \end{matrix} ;q,bs\right\} $$

其中 $\max\left\{|bs|,|bt|\right\}<1$。

$$ T\left(a,b;D_q\right)\left\{\frac{(cv;q)_\infty}{(cs,ct;q)_\infty}\right\}=\frac{(abs,cv;q)_\infty}{(bs,cs,ct;q)_\infty}\,{}_3\phi_2\left\{\begin{matrix} a,cs,v/t \\ abs,cv \end{matrix} ;q,bt\right\} $$

其中 $\max\left\{|bs|,|bt|\right\}<1$。

在许多算子恒等式中，利用许多参数的对称性，Vincent Y. B. Chen 和 Nancy S. S. Gu 很容易推导出了 Heine’s ${}_2\phi_1$ 转换公式和 Sears’ ${}_3\phi_2$ 转换公式。应用这些算子恒等式，他们还得到了 Askey-Wilson 积分、Askey-Roy 积分、Sears 两项求和公式的推广。

2016 年，在前人研究的基础上，Nadia Na Li 和 Wei Tan 构造了两个带有三个参数的 q-指数算子的推广[14]：

$$ T\left[\begin{matrix} u,v \\ w \end{matrix} \middle| q;tD_x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u,v;q)_n}{(q,w;q)_n}\left(tD_x\right)^n $$

$$ E\left[\begin{matrix} u,v \\ w \end{matrix} \middle| q;t\theta_x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u,v;q)_n}{(q,w;q)_n}\left(t\theta_x\right)^n $$

并且得到了许多算子恒等式：

$$ \begin{aligned} &T\left[\begin{matrix} u,v \\ w \end{matrix} \middle| q;tD_x\right]\left\{\frac{(xa;q)_\infty}{(xb,xc;q)_\infty}\right\} \\ &=\frac{(xa;q)_\infty}{(xb,xc;q)_\infty}\sum_{n,k\ge 0}\frac{(u,v;q)_{n+k}}{(q;q)_n(w;q)_{n+k}}\frac{(a/b,xc;q)_k}{(q,xa;q)_k}(bt)^k(tc)^n \end{aligned} $$

$$E\begin{bmatrix} u,v & |q;t\theta_x \\ w & \end{bmatrix}\left\{\frac{(xa,xc;q)_\infty}{(xb;q)_\infty}\right\}$$
$$=\frac{(xa,xc;q)_\infty}{(xb;q)_\infty}\sum_{n,k\ge 0}\frac{(u,v;q)_{n+k}}{(w;q)_{n+k}(q;q)_n}\frac{(a/b,q/xc;q)_k}{(q,q/xb;q)_k}(-1)^n(tc)^{n+k}q^{-\binom{k}{2}-nk}$$

$$T\begin{bmatrix} u,v & |q;tD_x \\ w & \end{bmatrix}\left\{\frac{P_n(x,y/a)(xc;q)_\infty}{(xa,xb;q)_\infty}\right\}$$
$$=\frac{(y;q)_n}{a^n}\frac{(xc;q)_\infty}{(xa,xb;q)_\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},xa;q)_k q^k}{(q,y;q)_k}\sum_{i,j\ge 0}\frac{(u,v;q)_{i+j}}{(q;q)_i(w;q)_{i+j}}\frac{(c/b,q^k xa;q)_j}{(q,xc;q)_j}(tb)^j(q^k ta)^i$$

(其中 $P_n(a,b)=a^n(b/a;q)_n$)。

$$E\begin{bmatrix} u,v & |q;t\theta_x \\ w & \end{bmatrix}\left\{\frac{P_n(x,y/a)(xb,xc;q)_\infty}{(xa;q)_\infty}\right\}$$
$$=\frac{(y;q)_n}{a^n}\frac{(xc,xb;q)_\infty}{(xa;q)_\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},xa;q)_k q^k}{(q,y;q)_k}$$
$$\times\sum_{i,j\ge 0}\frac{(u,v;q)_{i+j}}{(q;q)_i(w;q)_{i+j}}(bt)^{i+j}\frac{(cq^{-k}/a,q/xb;q)_j}{(q,q^{1-k}/xa;q)_j}(-1)^i q^{-\binom{j}{2}-ij}$$

(其中 $P_n(a,b)=a^n(b/a;q)_n$)。

应用上面这几个算子恒等式，Nadia Na Li 和 Wei Tan 推导出了两个 q-Gauss 和式的形式扩展式，以及 q-Chu-Vandermonde 和式的推广。

2019 年，Husam L. Saad 和 Sadeq M. Khalaf 推广了 Nadia Na Li 和 Wei Tan 构造的两个带有三个参数的 q-指数算子，得到了以下一个新的推广 q-算子[15]：

$${}_r\phi_s\begin{pmatrix} a_1,\cdots,a_r & ;q,-c\theta \\ b_1,\cdots,b_s & \end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,\cdots,a_r;q)_k(-c\theta)^k}{(b_1,\cdots,b_s;q)_k(q;q)_k}\left[(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right]^{1+s-r}$$

以及以下几个算子恒等式：

$${}_r\phi_s\begin{pmatrix} a_1,\cdots,a_r & ;q,-c\theta \\ b_1,\cdots,b_s & \end{pmatrix}\left\{(au,at;q)_\infty\right\}=(au,at;q)_\infty\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}W_{k+j}\frac{(ct)^k}{(q;q)_k}$$
$$\times\left[(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right]^{1+s-r}\frac{(q/at;q)_j}{(q;q)_j}(actu/q)^j\left[(-1)^j q^{\binom{j}{2}}\right]^{s-r}q^{kj(s-r)}$$

$${}_r\phi_s\begin{pmatrix} a_1,\cdots,a_r & ;q,-c\theta \\ b_1,\cdots,b_s & \end{pmatrix}\left\{a^n(at;q)_\infty\right\}=a^n(at;q)_\infty\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}W_{k+j}\frac{(ct)^k}{(q;q)_k}$$
$$\times\left[(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right]^{1+s-r}\frac{(q^{-n},q/at;q)_j}{(q;q)_j}(ct)^j\left[(-1)^j q^{\binom{j}{2}}\right]^{s-r}q^{kj(s-r)}$$

应用这些算子恒等式，Husam L. Saad 和 Sadeq M. Khalaf 得到了一些推广的恒等式。

算子的研究还有很多很多，前人应用各种算子证明了不少著名的恒等式，还得到了很多新的恒等式，

算子的意义非同小可。本文将简单应用两个算子，推得了几个新的恒等式。

2. 预备知识

本文用[16]中的 q 记号，假设 $|q|<1$，q-移位阶乘被定义为：

$$(a;q)_0=1,\ (a;q)_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-aq^k\right),\ (a;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^k\right),\ n=1,2,\cdots$$

对任意正整数 n，q-移位阶乘 $(a;q)_n$ 有以下形式：

$$(a;q)_n=\frac{(a;q)_\infty}{\left(aq^n;q\right)_\infty} \tag{1.1}$$

$$\left(a,aq;q^2\right)_n=(a;q)_{2n} \tag{1.2}$$

为方便，多个阶乘可写成以下形式：

$$\left(a_1,a_2,\cdots,a_m;q\right)_n=\left(a_1;q\right)_n\left(a_2;q\right)_n\cdots\left(a_m;q\right)_n$$

基础超几何级数 ${}_{r+1}\phi_r$ 被定义为：

$${}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\cdots,a_{r+1}\\ b_1,b_2,\cdots,b_r\end{matrix};q,z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a_1;q\right)_n\left(a_2;q\right)_n\cdots\left(a_{r+1};q\right)_n}{(q;q)_n\left(b_1;q\right)_n\left(b_2;q\right)_n\cdots\left(b_r;q\right)_n}z^n \tag{1.3}$$

其中 $q\neq 0$ 。

关于 x 的 q 微分算子被定义为：

$$D_{q,x}\{f(x)\}=\frac{f(x)-f(xq)}{x}$$

以上 q 微分算子的两个性质[17]：

$$D_{q,x}^n\left\{\frac{(tx;q)_\infty}{(sx;q)_\infty}\right\}=s^n\left(\frac{t}{s};q\right)_n\frac{\left(txq^n;q\right)_\infty}{(sx;q)_\infty} \tag{1.4}$$

$$D_{q,x}^n\left\{\frac{1}{(sx;q)_\infty}\right\}=\frac{s^n}{(sx;q)_\infty} \tag{1.5}$$

3. 微分算子的应用

定理 1 若 k 为任意非负整数，则有：

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{\left(b,-b,q^{-k};q\right)_n\left(-zq^n\right)^n}{\left(b^2,q;q\right)_n\left(zq^n;q\right)_{n-k}}=\sum_{n=0}^{k}\frac{\left(q^{-k},q\right)_n\left(z^2q^{2n}\right)^n}{\left(b^2q,b^2;q^2\right)_n}$$

证明：在参考文献[9]中，第 100 页练习题 3.2 (i)：

$${}_3\phi_2\left[\begin{matrix}a,b,-b\\ b^2,az\end{matrix};q,-z\right]=\frac{(z;q)_\infty}{(az;q)_\infty}{}_2\phi_1\left(a,aq;qb^2;q^2,z^2\right),\ |z|<1$$

由(1.1)，(1.2)，(1.3)，上式可写成以下形式：

$$\frac{1}{(z;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b,-b;q)_n(-z)^n\left(azq^n;q\right)_\infty}{\left(b^2,q;q\right)_n\left(aq^n;q\right)_\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{\left(b^2q,q^2;q^2\right)_n\left(aq^{2n};q\right)_\infty}$$

在以上等式左右两边同时应用算子 $D_{q,a}^{n}$，有：

$$\frac{1}{(z;q)_{\infty}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b,-b;q)_{n}(-z)^{n}}{(b^{2},q;q)_{n}}D_{q,a}^{n}\left\{\frac{(azq^{n};q)_{\infty}}{(aq^{n};q)_{\infty}}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(b^{2}q,q^{2};q^{2})_{n}}D_{q,a}^{n}\left\{\frac{1}{(aq^{2n};q)_{\infty}}\right\} \tag{1.6}$$

由(1.4)和(1.5)，可得：

$$D_{q,a}^{n}\left\{\frac{(azq^{n};q)_{\infty}}{(aq^{n};q)_{\infty}}\right\}=q^{n^{2}}(z;q)_{n}\frac{(azq^{2n};q)_{\infty}}{(aq^{n};q)_{\infty}} \tag{1.7}$$

$$D_{q,a}^{n}\left\{\frac{1}{(aq^{2n};q)_{\infty}}\right\}=\frac{q^{2n^{2}}}{(aq^{2n};q)_{\infty}} \tag{1.8}$$

将(1.7) (1.8)代入(1.6)，并再次运用(1.1)，有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b,-b,a;q)_{n}(-zq^{n})^{n}(azq^{2n};q)_{\infty}}{(b^{2},q;q)_{n}(zq^{n};q)_{\infty}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_{2n}(z^{2}q^{2n})^{n}}{(b^{2}q,q^{2};q^{2})_{n}}$$

在上式中，令 $a=q^{-k}$，其中 k 为任意非负整数，就可得到定理 1 的等式。

定理 2

$${}_{2}\phi_{1}\left(\begin{matrix}q^{-n},b\\c\end{matrix};q,q^{n}z\right)=\frac{\left(\frac{c}{b},bz;q\right)_{\infty}}{(c,z;q)_{\infty}}{}_{2}\phi_{1}\left(\begin{matrix}q^{-n},b\\bz\end{matrix};q,q^{n}z\right) \tag{1.9}$$

证明：在参考文献[9]中第 359 页，(III.2)：

$${}_{2}\phi_{1}(a,b;c;q,z)=\frac{\left(\frac{c}{b},bz;q\right)_{\infty}}{(c,z;q)_{\infty}}{}_{2}\phi_{1}\left(\frac{abz}{c},b;bz;q,\frac{c}{b}\right)$$

由 q 转换公式(1.1)，上式可写为以下形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b;q)_{n}z^{n}(a;q)_{\infty}}{(c,q;q)_{n}(aq^{n};q)_{\infty}}=\frac{\left(\frac{c}{b},bz;q\right)_{\infty}}{(c,z;q)_{\infty}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b;q)_{n}\left(\frac{c}{b}\right)^{n}}{(bz;q)_{n}(q;q)_{n}}\frac{\left(\frac{abz}{c};q\right)_{\infty}}{\left(\frac{abzq^{n}}{c};q\right)_{\infty}}$$

在以上等式左右两边同时应用算子 $D_{q,a}^{n}$，有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b;q)_{n}z^{n}}{(c,q;q)_{n}}D_{q,a}^{n}\left\{\frac{(a;q)_{\infty}}{(aq^{n};q)_{\infty}}\right\}=\frac{\left(\frac{c}{b},bz;q\right)_{\infty}}{(c,z;q)_{\infty}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b;q)_{n}\left(\frac{c}{b}\right)^{n}}{(bz;q)_{n}(q;q)_{n}}D_{q,a}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{abz}{c};q\right)_{\infty}}{\left(\frac{abzq^{n}}{c};q\right)_{\infty}}\right\} \tag{1.10}$$

由(1.4)可知：

$$D_{q,a}^{n}\left\{\frac{(a;q)_{\infty}}{(aq^{n};q)_{\infty}}\right\}=q^{n^{2}}(q^{-n};q)_{n} \tag{1.11}$$

$$D_{q,a}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{abz}{c};q\right)_{\infty}}{\left(\frac{abzq^{n}}{c};q\right)_{\infty}}\right\}=\left(\frac{bzq^{n}}{c}\right)^{n}\left(q^{-n};q\right)_{n} \tag{1.12}$$

将(1.11)，(1.12)代入(1.10)，便完成了定理 2 的证明。

在参考文献[9]中第 359 页式 6、7、8：

$$\begin{aligned}
{}_{2}\phi_{1}\left(q^{-n},b;c;q,z\right)&=\frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_{n}}{(c;q)_{n}}\left(\frac{bz}{q}\right)^{n}{}_{3}\phi_{2}\left(q^{-n},\frac{q}{z},c^{-1}q^{1-n};bc^{-1}q^{1-n},0;q,q\right)\\
&=\frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_{n}}{(c;q)_{n}}{}_{3}\phi_{2}\left(\begin{matrix}q^{-n},b,\frac{bzq^{-n}}{c}\\ \frac{bq^{1-n}}{c},0\end{matrix};q,q\right)\\
&=\frac{\left(\frac{c}{b};q\right)_{n}}{(c;q)_{n}}b^{n}{}_{3}\phi_{1}\left(\begin{matrix}q^{-n},b,\frac{q}{z}\\ \frac{bq^{1-n}}{c}\end{matrix};q,\frac{z}{c}\right)
\end{aligned}$$

在以上三个式子中，都令 $z=zq^{n}$，再分别联立(1.9)，得到以下三个定理：

定理 3

$$\left(bq^{n-1}z\right)^{n}{}_{3}\phi_{2}\left(\begin{matrix}q^{-n},\frac{1}{q^{n-1}z},\frac{q^{1-n}}{c}\\ \frac{bq^{1-n}}{c},0\end{matrix};q,q\right)=\frac{\left(\frac{cq^{n}}{b},bz;q\right)_{\infty}}{\left(cq^{n},z;q\right)_{\infty}}{}_{2}\phi_{1}\left(\begin{matrix}q^{-n},b\\ bz\end{matrix};q,q^{n}z\right)$$

定理 4

$${}_{3}\phi_{2}\left(\begin{matrix}q^{-n},b,\frac{bz}{c}\\ \frac{bq^{1-n}}{c},0\end{matrix};q,q\right)=\frac{\left(\frac{cq^{n}}{b},bz;q\right)_{\infty}}{\left(cq^{n},z;q\right)_{\infty}}{}_{2}\phi_{1}\left(\begin{matrix}q^{-n},b\\ bz\end{matrix};q,q^{n}z\right)$$

定理 5

$$b^{n}{}_{3}\phi_{1}\left(\begin{matrix}q^{-n},b,\frac{1}{zq^{n-1}}\\ \frac{bq^{1-n}}{c}\end{matrix};q,\frac{q^{n}z}{c}\right)=\frac{\left(\frac{cq^{n}}{b},bz;q\right)_{\infty}}{\left(cq^{n},z;q\right)_{\infty}}{}_{2}\phi_{1}\left(\begin{matrix}q^{-n},b\\ bz\end{matrix};q,q^{n}z\right)$$

显然，以上三个定理是成立的，本文不做证明。

4. 结论

本文通过两个 q 微分算子，得到了几个不同的恒等式，可以进一步思考，能不能利用这几个恒等式得到基础超几何级数中著名的恒等式。

基金项目

重庆市自然科学基金(cstc2019jcyj-msxmX0143)。

参考文献

[1] Roman, S. and Rota, G.-C. (1978) The Umbral Calculus. *Advances in Mathematics*, **27**, 95-188. https://doi.org/10.1016/0001-8708(78)90087-7

[2] Rota, G.-C. (1975) Finite Operator Calculus. Academic Press, New York.

[3] Goldman, J. and Rota, G.-C. (1969) The Number of Subspaces of a Vector Space. In: Tutte, W., Ed., *Recent Progress in Combinatorics*, Academic Press, Cambridge, 75-83.

[4] Goldman, J. and Rota, G.-C. (1970) On the Foundations of Combinatorial Theory. IV. Finite Vector Spaces and Eulerian Generating Functions. *Studies in Applied Mathematics*, **49**, 239-258. https://doi.org/10.1002/sapm1970493239

[5] Andrews, G.E. (1971) On the Foundation of Combinatorial Theory V, Eulerian Differential Operators. *Studies in Applied Mathematics*, **50**, 345-375. https://doi.org/10.1002/sapm1971504345

[6] Roman, S. (1985) More on the Umbral Calculus, with Emphasis on the q-Umbral Caculus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **107**, 222-254. https://doi.org/10.1016/0022-247X(85)90367-1

[7] Chen, W.Y.C. and Liu, Z.-G. (1997) Parameter Augmentation for Basic Hypergeometric Series, II. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series A*, **80**, 175-195. https://doi.org/10.1006/jcta.1997.2801

[8] Liu, Z.G. (2013) On the q-Derivative and q-Series Expansions. *Number Theory*, **9**, 2069-2089. https://doi.org/10.1142/S1793042113500759

[9] Chen, W.Y.C. and Liu, Z.-G. (1998) Parameter Augmentation for Basic Hypergeometric Series, I. In: Sagan, B.E. and Stanley, R.P., Eds., *Mathematical Essays in Honor of Gian-Carlo Rota*, Birkhäuser, Basel, 111-129. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4108-9_5

[10] Liu, Z.-G. (2003) Some Operator Identities and q-Series Transformation Formulas. *Discrete Mathematics*, **265**, 119-139. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00626-X

[11] Zhang, Z.-Z. and Wang, J. (2005) Two Operator Identities and Their Applications to Terminating Basic Hypergeometric Series and q-Integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **312**, 653-665. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.064

[12] Fang, J.-P. (2007) q-Differential Operator and Its Applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **332**, 1393-1407. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.087

[13] Chen, V.Y.B. and Gu, N.S.S. (2008) The Cauchy Operator for Basic Hypergeometric Series. *Advances in Applied Mathematics*, **41**, 177-196. https://doi.org/10.1016/j.aam.2007.08.001

[14] Li, N.N. and Tan, W. (2016) Two Generalized q-Exponential Operators and Their Applications. *Advances in Difference Equations*, **2016**, Article No. 53.

[15] Saad, H.L. and Khalaf, S.M. (2019) The Operator ${}_r\phi_s$ and the Polynomials K_n. *Basrah Journal of Science*, **37**, 25-43.

[16] Gasper, G. and Rahman, M. (2004) Basic Hypergeometric Series, 2nd Edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526251

[17] Liu, Z.-G. (2002) An Expansion Formula for q-Series and Applications. *The Ramanujan Journal*, **6**, 429-447. https://doi.org/10.1023/A:1021306016666