

# 一类3D分片非线性系统的异宿环

吴宝龙, 杨启贵

华南理工大学数学学院, 广东 广州  
Email: qgyang@scut.edu.cn

收稿日期: 2020年12月13日; 录用日期: 2021年1月14日; 发布日期: 2021年1月22日

## 摘要

本文研究了一类具有两个鞍-焦点和一个不连续边界的3D分片非线性系统。通过恰当的变换确定了子系统的稳定流形和不稳定流形。基于稳定流形和不稳定流形建立了系统存在横截穿过切换面两次的异宿环的充分条件, 并运用了一个数值实例验证结果的正确性。

## 关键词

分片非线性系统, 不变流形, 异宿环

# Heteroclinic Cycle of a Class of 3D Piecewise Nonlinear Systems

Baolong Wu, Qigui Yang

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong  
Email: qgyang@scut.edu.cn

Received: Dec. 13<sup>th</sup>, 2020; accepted: Jan. 14<sup>th</sup>, 2021; published: Jan. 22<sup>nd</sup>, 2021

## Abstract

In this paper, one studies a class of 3D piecewise nonlinear systems with two saddle foci and one discontinuous boundary. The stable manifold and unstable manifold of the subsystem are determined by coordinate transformation. Based on stable manifolds and unstable manifolds, the sufficient conditions for the existence of heteroclinic loops which cross the switching surface twice are given. Finally, a numerical example is given to verify the correctness of the theorem.

## Keywords

Piecewise Nonlinear System, Invariant Manifold, Heteroclinic Cycle

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

3D 光滑混沌系统由于在保密通讯、图像加密等领域有广泛的应用前景,因而具有重要研究价值[1] [2] [3]。但是如何严格证明任意 3D 光滑系统的混沌性是非常困难的。对于一类具有连接鞍 - 焦点的同宿轨或异宿环的 3D 光滑系统, Shil'nikov 证明了其同宿轨或异宿环附近存在着混沌不变集[4], 因此, 连接鞍 - 焦点的同宿轨或异宿环对 3D 光滑系统的混沌性研究具有关键作用。然而如何证明任意 3D 光滑系统奇异环的存在性仍然是一个难题。尽管“钓鱼法”、Lyapunov 函数法及定性方法是一些有效的方法去确定 3D 系统奇异环的存在性, 但是这些方法只适用于某些特殊系统[5] [6] [7]。

近几年, 3D 或 4D 分片线性系统奇异环与混沌不变集的存在性成为研究热点[8]-[13]。2016 年 Wu 证明了 3D 两片线性系统存在连接鞍 - 焦点同宿轨[10]; 2018 年 Yang 等给出了 4D 两片线性系统存在只横截穿过切换面两次的同宿轨的充分条件[11]; 2018 年 Wu 等证明了 4D 两片线性系统存在连接双焦点的异宿环[12]; 2019 年 Lu 等给出了 3D 三片线性系统同宿轨与异宿环共存的充分条件[13]。

相较于 3D 分片线性系统, 对于 3D 分片非线性系统奇异环的存在性的研究较少。由于大多数的 3D 非线性系统是不可求解的, 因此确定 3D 非线性系统的稳定流形和不稳定流形是非常不容易的。然而子系统的稳定流形和不稳定流形在构造分片系统奇异环的过程中发挥重要的作用, 因而如何构造存在奇异环的 3D 分片非线性系统仍然是一个具有挑战性的工作。

本文讨论了一类具有两个鞍 - 焦点的 3D 两片非线性系统。通过恰当的变换确定了子系统的稳定流形和不稳定流形。基于构造 3D 分片线性系统异宿环的思想, 严格证明了 3D 两片非线性系统存在连接鞍 - 焦点且只横截穿过切换面两次的异宿环, 并运用一个数值实例验证结果的正确性。

## 2. 3D 分片非线性系统

考虑如下 3D 分片非线性系统

$$\dot{X} = \begin{cases} A_1 X + B_1, & N^T X \leq d, \\ A_2 (X - P) + B_2, & N^T X > d, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $X = (x, y, z)^T$ ,  $P = (a, b, c)^T$ ,  $N^T = (n_1, n_2, n_3)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_1(x^2 + y^2) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ -\beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_2((x-a)^2 + (y-b)^2) \end{pmatrix}.$$

这里  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, e_1, e_2, n_3$  均为正数, 且  $0 < d < an_1 + bn_2 + cn_3$ 。

由于  $0 < d < an_1 + bn_2 + cn_3$ , 故系统(1)有两个鞍-焦点类型的平衡点  $O = (0, 0, 0)^T$  和  $P = (a, b, c)^T$ 。

考虑系统(1)的两个子系统

$$\dot{X} = A_1 X + B_1, \tag{2}$$

$$\dot{X} = A_2 (X - P) + B_2. \tag{3}$$

显然系统(2)和(3)的稳定流形分别为

$$W_{(2)}^s = \left\{ (0, 0, z)^T \mid z \in R \right\}, W_{(3)}^s = \left\{ (a, b, z)^T \mid z \in R \right\}.$$

由条件  $n_3 > 0$  得, 在切换面  $N^T X = d$  上存在一点  $Q_1$  使得  $Q_1 \in W_{(2)}^s$ 。通过计算可得

$$Q_1 = \left( 0, 0, \frac{d}{n_3} \right)^T;$$

进一步在切换面  $N^T X = d$  上也存在一点  $Q_2$  满足  $Q_2 \in W_{(3)}^s$ 。易知

$$Q_2 = \left( a, b, \frac{d - n_1 a - n_2 b}{n_3} \right)^T.$$

对系统(2)进行如下变换

$$\begin{cases} u = x \\ v = y \\ w = z - k_1 (x^2 + y^2), \end{cases}$$

其中

$$k_1 = \frac{e_1}{2\alpha_1 + \gamma_1} > 0,$$

则非线性系统(2)可化为下列系统

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha_1 u + \beta_1 v \\ \dot{v} = -\beta_1 u + \alpha_1 v \\ \dot{w} = -\gamma_1 w, \end{cases}$$

该系统为线性系统且平面  $w = 0$  为其不稳定平面。因此  $z = k_1 (x^2 + y^2)$  为系统(2)的不稳定曲面。故系统(2)的不稳定流形为一个开口向上的抛物面

$$W_{(2)}^u = \left\{ \left( x, y, k_1 (x^2 + y^2) \right)^T \mid x, y \in R \right\}.$$

由于系统(2)满足

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 x + \beta_1 y \\ \dot{y} = \alpha_1 y - \beta_1 x \end{cases}$$

故此线性微分方程组满足初始值  $(x(0), y(0))^T = (x_0, y_0)^T$  的解为

$$\begin{cases} x = e^{\alpha_1 t} (x_0 \cos(\beta_1 t) + y_0 \sin(\beta_1 t)) \\ y = e^{\alpha_1 t} (y_0 \cos(\beta_1 t) - x_0 \sin(\beta_1 t)), \end{cases} \tag{4}$$

因此系统(2)以  $(x(0), y(0), z(0))^T = (x_0, y_0, k_1(x_0^2 + y_0^2))^T$  为初始值的解为

$$\begin{cases} x = e^{\alpha_1 t} (x_0 \cos(\beta_1 t) + y_0 \sin(\beta_1 t)) \\ y = e^{\alpha_1 t} (y_0 \cos(\beta_1 t) - x_0 \sin(\beta_1 t)) \\ z = k_1 (x_0^2 + y_0^2) e^{2\alpha_1 t}. \end{cases} \quad (5)$$

同理, 系统(3)的不稳定流形也为一个开口向上的抛物面

$$W_{(3)}^u = \left\{ (x, y, k_2((x-a)^2 + (y-b)^2) + c)^T \mid x, y \in R \right\}.$$

其中  $k_2 = \frac{e_2}{2\alpha_2 + \gamma_2}$ 。同时系统(3)以  $(x(0), y(0), z(0))^T = (x_0, y_0, k_2((x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2) + c)^T$  为初始值的解为

$$\begin{cases} x = e^{\alpha_2 t} ((x_0 - a) \cos(\beta_2 t) + (y_0 - b) \sin(\beta_2 t)) + a \\ y = e^{\alpha_2 t} (-(x_0 - a) \sin(\beta_2 t) + (y_0 - b) \cos(\beta_2 t)) + b \\ z = k_2 ((x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2) e^{2\alpha_2 t} + c. \end{cases} \quad (6)$$

### 3. 异宿环的存在性

本节证明 3D 分片非线性系统(1)的异宿环的存在性。

**定理 1** 若下列条件成立

- 1)  $k_1 n_3 (a^2 + b^2) = d - n_1 a - n_2 b, k_2 n_3 (a^2 + b^2) = d - n_3 c$ 。
- 2)  $e^{-\alpha_1 t} \frac{U_2 U_4 + U_1 U_3}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} < d - n_3 k_1 (a^2 + b^2) e^{-2\alpha_1 t}, \beta_1 U_2 - \alpha_1 U_1 < 0$ 。
- 3)  $2\alpha_2 n_3 k_2 (a^2 + b^2) < \alpha_2 V_2 + \beta_2 V_1 < \beta_2 \sqrt{V_1^2 + V_2^2} < e^{\alpha_2 t} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} (S - d)$ 。

其中

$$k_1 = \frac{e_1}{2\alpha_1 + \gamma_1}, k_2 = \frac{e_2}{2\alpha_2 + \gamma_2}.$$

$$U_1 = n_1 a + n_2 b, U_2 = n_2 a - n_1 b, U_3 = \alpha_1 U_2 + \beta_1 U_1, U_4 = \beta_1 U_2 - \alpha_1 U_1.$$

$$t_1 = \frac{1}{\beta_1} \arcsin \left( -\frac{U_4}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} \right) + \frac{2\pi}{\beta_1}, \tilde{t}_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_2} \arcsin \left( \frac{\alpha_2 V_2 + \beta_2 V_1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \right).$$

$$V_1 = n_1 b - n_2 a, V_2 = n_1 a + n_2 b, S = n_1 a + n_2 b + n_3 c.$$

则系统(1)存在异宿环  $\Gamma$ , 且异宿环  $\Gamma$  仅横截穿过切换面  $N^T X = d$  两次并经过点

$$Q_1 = \left( 0, 0, \frac{d}{n_3} \right)^T, Q_2 = \left( a, b, \frac{d - n_1 a - n_2 b}{n_3} \right)^T.$$

**证明:** 设  $\varphi(t, X_0)$  表示系统(1)过初始值  $X_0$  的轨线。要证明定理结论, 只需证明下列条件成立

- (i)  $Q_1 \in W_{(3)}^u, Q_2 \in W_{(2)}^u$ 。
- (ii)  $\varphi(t, Q_1) \rightarrow O, \varphi(t, Q_2) \rightarrow P$ , 当  $t \rightarrow +\infty$ 。  $\varphi(t, Q_1) \rightarrow P, \varphi(t, Q_2) \rightarrow O$ , 当  $t \rightarrow -\infty$ 。

(iii)  $N^T(A_1Q_1 + B_1)N^T(A_2(Q_1 - P) + B_2) > 0$ ,  $N^T(A_1Q_2 + B_1)N^T(A_2(Q_2 - P) + B_2) > 0$ 。

首先证明条件(i)是成立的。由条件 1)有

$$Q_1 = \left(0, 0, \frac{d}{n_3}\right)^T = \left(0, 0, k_2(a^2 + b^2) + c\right)^T \in W_{(3)}^u,$$

$$Q_2 = \left(a, b, \frac{d - n_1a - n_2b}{n_3}\right)^T = \left(a, b, k_1(a^2 + b^2)\right)^T \in W_{(2)}^u.$$

因此, 条件(i)成立。

下面证明条件(ii)是成立的。由于  $Q_1 \in W_{(2)}^s$ ,  $Q_2 \in W_{(3)}^s$  且  $W_{(2)}^s$  与  $W_{(3)}^s$  均为直线, 故当  $t \rightarrow +\infty$  有

$$\varphi(t, Q_1) \rightarrow O, \varphi(t, Q_2) \rightarrow P.$$

注意到  $Q_2 \in W_{(2)}^u$ , 因此若当  $t < 0$  时,  $N^T\varphi(t, Q_2) < d$  恒成立, 则有  $\varphi(t, Q_2) \rightarrow O$ , 当  $t \rightarrow -\infty$ 。由(5)可得, 当  $t < 0$  有

$$\varphi(t, Q_2) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} (a \cos(\beta_1 t) + b \sin(\beta_1 t)) \\ e^{\alpha t} (b \cos(\beta_1 t) - a \sin(\beta_1 t)) \\ k_1(a^2 + b^2)e^{2\alpha t} \end{pmatrix}.$$

故

$$N^T\varphi(t, Q_2) = e^{\alpha t} ((n_1a + n_2b)\cos(\beta_1 t) - (n_2a - n_1b)\sin(\beta_1 t)) + n_3k_1(a^2 + b^2)e^{2\alpha t}.$$

记

$$U_1 = n_1a + n_2b, U_2 = n_2a - n_1b,$$

$$f(t) = e^{-\alpha t} (U_1 \cos(\beta_1 t) + U_2 \sin(\beta_1 t)),$$

$$h(t) = d - n_3k_1(a^2 + b^2)e^{-2\alpha t}.$$

由于  $N^T\varphi(t, Q_2) - d = f(-t) - h(-t)$ , 故只需证明当  $t > 0$  时,  $f(t) < h(t)$  恒成立。由于

$$f'(t) = e^{-\alpha t} (U_4 \cos(\beta_1 t) - U_3 \sin(\beta_1 t)).$$

其中

$$U_3 = \alpha_1 U_2 + \beta_1 U_1, U_4 = \beta_1 U_2 - \alpha_1 U_1.$$

由  $f'(t) = 0$  可得

$$U_4 \cos(\beta_1 t) - U_3 \sin(\beta_1 t) = 0.$$

故函数  $f(t)$  的驻点满足

$$\sin(\beta_1 t) = \frac{U_4}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}}, \cos(\beta_1 t) = \frac{U_3}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}}. \tag{7}$$

或者

$$\sin(\beta_1 t) = -\frac{U_4}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}}, \cos(\beta_1 t) = -\frac{U_3}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}}. \tag{8}$$

满足(7)且大于 0 的  $t$  可表示为

$$t_i = \frac{1}{\beta_1} \arcsin\left(\frac{U_4}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}}\right) + \frac{2i\pi}{\beta_1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

满足(8)且大于 0 的  $t$  可表示为

$$t'_j = -\frac{1}{\beta_1} \arcsin\left(\frac{U_4}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}}\right) + \frac{2j\pi}{\beta_1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

同时由于

$$f''(t) = e^{-\alpha_1 t} ((\alpha_1 U_3 - \beta_1 U_4) \sin(\beta_1 t) - (\alpha_1 U_4 + \beta_1 U_3) \cos(\beta_1 t)).$$

因此

$$f''(t_i) = -\beta_1 e^{-\alpha_1 t_i} \sqrt{U_3^2 + U_4^2} < 0.$$

故  $t_i$  是函数  $f(t)$  的极大值点。同理可得

$$f''(t'_j) = \beta_1 e^{-\alpha_1 t'_j} \sqrt{U_3^2 + U_4^2} > 0.$$

所以  $t'_j$  是函数  $f(t)$  的极小值点, 且函数  $f(t)$  在  $t_i$  的极大值满足

$$f(t_i) = e^{-\alpha_1 t_i} \frac{U_2 U_4 + U_1 U_3}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} \leq e^{-\alpha_1 t_1} \frac{U_2 U_4 + U_1 U_3}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} = f(t_1).$$

由于点  $Q_2$  位于切换面上, 故有  $N^T \varphi(0, Q_2) = 0$ , 即  $f(0) = h(0)$ 。由条件 2) 可得

$$f'(0) = U_4 < 0.$$

同时注意到函数  $h(t)$  是单调增加的。因此当  $t > 0$  时, 函数  $f(t)$  和  $h(t)$  的图像如图 1 所示。

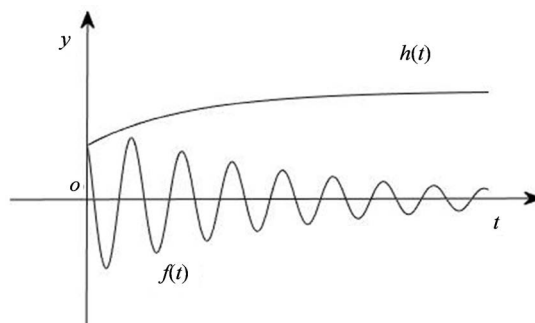


Figure 1. The image of  $f(t)$  and  $h(t)$

图 1. 函数  $f(t)$  和  $h(t)$  的图像

若  $t_1$  满足

$$f(t_1) < h(t_1).$$

那么有

$$f(t) < h(t), \quad t \in (0, +\infty).$$

同时由条件 2) 可得

$$f(t_1) = e^{-\alpha_1 t_1} \frac{U_2 U_4 + U_1 U_3}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} < d - n_3 k_1 (a^2 + b^2) e^{-2\alpha_1 t_1} = h(t_1).$$

所以当  $t < 0$  时,  $N^T \varphi(t, Q_2) < d$  恒成立, 有  $\varphi(t, Q_2) \rightarrow O$ , 当  $t \rightarrow -\infty$ 。

由于  $Q_1 \in W_{(3)}^u$ , 因此若当  $t < 0$  时,  $N^T \varphi(t, Q_1) > d$  恒成立, 则有  $\varphi(t, Q_1) \rightarrow P$ , 当  $t \rightarrow -\infty$ 。由(6)可得, 当  $t < 0$  有

$$\varphi(t, Q_1) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_2 t} (-b \sin(\beta_2 t) - a \cos(\beta_2 t)) + a \\ e^{\alpha_2 t} (a \sin(\beta_2 t) - b \cos(\beta_2 t)) + b \\ k_2 (a^2 + b^2) e^{2\alpha_2 t} + c \end{pmatrix}.$$

所以

$$N^T \varphi(t, Q_1) = e^{\alpha_2 t} ((n_2 a - n_1 b) \sin(\beta_2 t) - (n_2 b + n_1 a) \cos(\beta_2 t)) + n_3 k_2 (a^2 + b^2) e^{2\alpha_2 t} + n_1 a + n_2 b + n_3 c.$$

记

$$\begin{aligned} V_1 &= n_1 b - n_2 a, V_2 = n_1 a + n_2 b, \\ m(t) &= d - n_1 a - n_2 b - n_3 c - n_3 k_2 (a^2 + b^2) e^{-2\alpha_2 t}, \\ g(t) &= e^{-\alpha_2 t} (V_1 \sin(\beta_2 t) - V_2 \cos(\beta_2 t)) = e^{-\alpha_2 t} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sin(\beta_2 t + \theta_1). \end{aligned}$$

其中  $\theta_1$  满足

$$\sin \theta_1 = -\frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \cos \theta_1 = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.$$

由于  $N^T \varphi(0, Q_1) = 0$ , 故有

$$-V_2 = g(0) = m(0) = d - n_1 a - n_2 b - n_3 c - n_3 k_2 (a^2 + b^2) < 0.$$

因此有  $\theta_1 \in (-\pi, 0)$ 。由于  $N^T \varphi(t, Q_1) - d = g(-t) - m(-t)$ , 因此只需证明当  $t > 0$  时,  $g(t) > m(t)$  恒成立。

当  $t > 0$  时, 函数  $g(t)$  和  $m(t)$  的图像如图 2 所示。

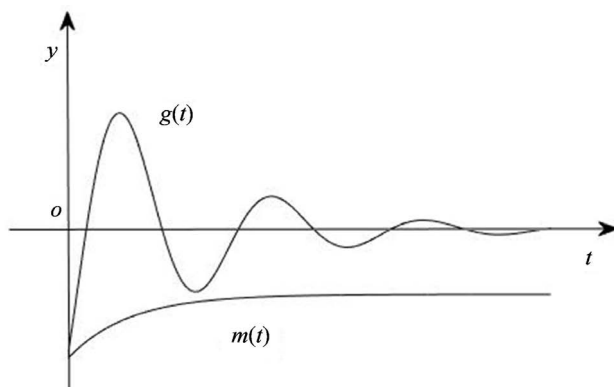


Figure 2. The image of  $g(t)$  and  $m(t)$

图 2. 函数  $g(t)$  和  $m(t)$  的图像

记

$$G(t) = g(t) - m(t).$$

则有

$$G'(t) = e^{-\alpha_2 t} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sin(\beta_2 t + \theta_1 + \theta_2) - 2\alpha_2 n_3 k_2 (a^2 + b^2) e^{-2\alpha_2 t}.$$

其中  $\theta_2$  满足

$$\sin \theta_2 = \frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}, \cos \theta_2 = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}.$$

因此有  $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 。由条件 3) 可得

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\alpha_2 V_2 + \beta_2 V_1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sqrt{V_1^2 + V_2^2}} > 0.$$

因此有  $\theta_1 + \theta_2 \in (0, \pi)$ 。由条件 3) 可知

$$G'(0) = \alpha_2 V_2 + \beta_2 V_1 - 2\alpha_2 n_3 k_2 (a^2 + b^2) > 0.$$

而当  $t \in \left(0, -\frac{\theta_1}{\beta_2}\right)$  有  $\beta_2 t + \theta_1 + \theta_2 \in (\theta_1 + \theta_2, \theta_2)$ 。由条件 3) 可得当  $t \in \left(0, -\frac{\theta_1}{\beta_2}\right)$

$$\begin{aligned} G'(t) &> e^{-\alpha_2 t} \left( \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sin(\beta_2 t + \theta_1 + \theta_2) - 2\alpha_2 n_3 k_2 (a^2 + b^2) \right) \\ &> e^{-\alpha_2 t} \left( \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \min\{\sin(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_2)\} - 2\alpha_2 n_3 k_2 (a^2 + b^2) \right) \\ &= e^{-\alpha_2 t} \left( \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sin(\theta_1 + \theta_2) - 2\alpha_2 n_3 k_2 (a^2 + b^2) \right) \\ &= e^{-\alpha_2 t} G'(0) > 0. \end{aligned}$$

所以当  $t \in \left(0, -\frac{\theta_1}{\beta_2}\right)$ , 函数  $G(t)$  是单调增加的。注意到  $G(0) = 0$ , 所以对于  $t \in \left(0, -\frac{\theta_1}{\beta_2}\right)$  有  $g(t) > m(t)$ 。

同时

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{\theta_1}{\beta_2}\right) &= 0, \\ m\left(-\frac{\theta_1}{\beta_2}\right) &< d - n_1 a - n_2 b - n_3 c < 0. \end{aligned}$$

显然, 对于  $t \in \left(-\frac{\theta_1}{\beta_2}, +\infty\right)$  有

$$m(t) < d - n_1 a - n_2 b - n_3 c.$$

因此若

$$g(t) \geq d - n_1 a - n_2 b - n_3 c.$$

那么就有当  $t > 0$  时,  $g(t) > m(t)$  成立。同时



$$g'(t) = e^{-\alpha_2 t} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sin(\beta_2 t + \theta_1 + \theta_2),$$

$$g''(t) = e^{-\alpha_2 t} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \sin(\beta_2 t + \theta_1 + 2\theta_2).$$

因此函数  $g(t)$  的驻点为

$$\tilde{t}_k = \frac{k\pi - \theta_1 - \theta_2}{\beta_2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

当  $k$  为偶数时

$$g''(\tilde{t}_k) = e^{-\alpha_2 \tilde{t}_k} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \sin(\theta_2) > 0.$$

当  $k$  为奇数时

$$g''(\tilde{t}_k) = -e^{-\alpha_2 \tilde{t}_k} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \sin(\theta_2) < 0.$$

所以  $\tilde{t}_{2k}$  是函数  $g(t)$  的极小值点,  $\tilde{t}_{2k-1}$  是函数  $g(t)$  的极大值点。同时注意到

$$g(\tilde{t}_{2k}) = -e^{-\alpha_2 \tilde{t}_{2k}} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sin(\theta_2) \geq -e^{-\alpha_2 \tilde{t}_2} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sin(\theta_2) = g(\tilde{t}_2).$$

由条件 3) 可得

$$-e^{-\alpha_2 \tilde{t}_2} \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sin(\theta_2) = -e^{-\alpha_2 \tilde{t}_2} \frac{\beta_2 \sqrt{V_1^2 + V_2^2}}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}} > d - n_1 a - n_2 b - n_3 c.$$

因此当  $t > 0$  时,  $g(t) > m(t)$  恒成立。故条件(ii)是成立的。

下面说明条件(iii)是成立的。由于

$$N^T(A_1 Q_1 + B_1) = -\gamma_1 d < 0$$

$$N^T(A_2(Q_1 - P) + B_2) = 2\alpha_2 n_3 k_2 (a^2 + b^2) - \alpha_2 V_2 - \beta_2 V_1 < 0$$

$$N^T(A_2(Q_2 - P) + B_2) = -\gamma_2 (d - n_1 a - n_2 b - n_3 c) > 0$$

$$N^T(A_1 Q_2 + B_1) = \alpha_1 U_1 - \beta_1 U_2 + 2\alpha_1 n_3 k_1 (a^2 + b^2) > 0$$

因此条件(iii)是成立。

因此系统(1)存在只横截穿过切换面两次的异宿环  $\Gamma$ , 且异宿环  $\Gamma$  仅横截穿过切换面  $N^T X = d$  两次并经过点  $Q_1$  和  $Q_2$ , 故定理得证。

当系统(1)中的  $e_1 = e_2 = 0$  时, 系统(1)就由 3D 分片非线性系统转化为 3D 分片线性系统。根据定理 1 可得如下推论。

**推论 1:** 若  $e_1 = e_2 = 0$ , 则 3D 分片线性系统(1)存在横截穿过切换面  $N^T X = d$  两次的异宿环的充分条件为

- 1)  $d = n_1 a + n_2 b = cn_3$ 。
- 2)  $e^{-\alpha_1 t} \frac{U_2 U_4 + U_1 U_3}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} < d, \beta_1 U_2 - \alpha_1 U_1 < 0$ 。
- 3)  $0 < \alpha_2 V_2 + \beta_2 V_1 < \beta_2 \sqrt{V_1^2 + V_2^2} < e^{\alpha_2 \tilde{t}_2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} d$ 。

其中

$$U_1 = n_1 a + n_2 b, U_2 = n_2 a - n_1 b, U_3 = \alpha_1 U_2 + \beta_1 U_1, U_4 = \beta_1 U_2 - \alpha_1 U_1.$$

$$t_1 = \frac{1}{\beta_1} \arcsin \left( -\frac{U_4}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} \right) + \frac{2\pi}{\beta_1}, \tilde{t}_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_2} \arcsin \left( \frac{\alpha_2 V_2 + \beta_2 V_1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \right).$$

$$V_1 = n_1 b - n_2 a, V_2 = n_1 a + n_2 b.$$

#### 4. 数值实例

考虑取如下参数的非线性系统(1)

$$\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 4, e_1 = 8.8, \gamma_1 = 4,$$

$$\alpha_2 = 0.9, \beta_2 = 4, e_2 = 5.8, \gamma_2 = 4,$$

$$a = 0, b = 0.5, c = 0.75,$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = d = 1.$$

故可得

$$Q_1 = \left( 0, 0, \frac{d}{n_3} \right)^T = (0, 0, 1)^T, Q_2 = \left( a, b, \frac{d - n_1 a - n_2 b}{n_3} \right)^T = (0, 0.5, 0.5)^T,$$

$$k_1 = \frac{e_1}{2\alpha_1 + \gamma_1} = 2, k_2 = \frac{e_2}{2\alpha_2 + \gamma_2} = 1.$$

由于

$$k_1 n_3 (a^2 + b^2) = d - n_1 a - n_2 b = 0.5,$$

$$k_2 n_3 (a^2 + b^2) = d - c n_3 = 0.25,$$

$$U_1 = n_1 a + n_2 b = 0.5, U_2 = n_2 a - n_1 b = -0.5,$$

$$U_3 = \alpha_1 U_2 + \beta_1 U_1 = 1.9, U_4 = \beta_1 U_2 - \alpha_1 U_1 = -2.1,$$

$$V_1 = n_1 b - n_2 a = 0.5, V_2 = n_2 b + n_1 a = 0.5, S = n_1 a + n_2 b + n_3 c = 1.25,$$

$$t_1 = \frac{1}{\beta_1} \arcsin \left( -\frac{U_4}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} \right) + \frac{2\pi}{\beta_1} \approx 1.7796,$$

$$\tilde{t}_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_2} \arcsin \left( \frac{\alpha_2 V_2 + \beta_2 V_1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \right) \approx 1.3191,$$

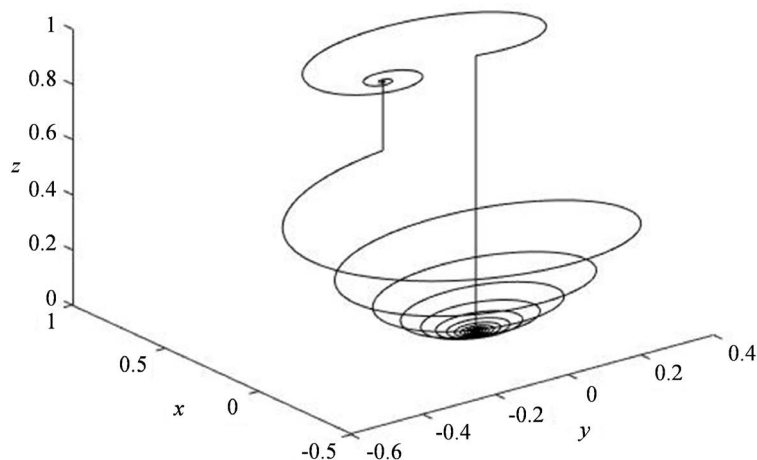
$$e^{-\alpha_1 t_1} \frac{U_2 U_4 + U_1 U_3}{\sqrt{U_3^2 + U_4^2}} \approx 0.4947 < d - n_3 k_1 (a^2 + b^2) e^{-2\alpha_1 t_1} \approx 0.7546,$$

$$\beta_1 U_2 - \alpha_1 U_1 = -2.1 < 0,$$

$$2\alpha_2 n_3 k_2 (a^2 + b^2) = 0.45 < \alpha_2 V_2 + \beta_2 V_1 = 2.45,$$

$$\beta_2 \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \approx 2.8284 < e^{\alpha_2 \tilde{t}_2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} (n_1 a + n_2 b + n_3 c - d) \approx 3.2779.$$

即定理 1 的条件满足, 故由定理 1 可得系统(1)存在只横截穿过切换面两次的异宿环, 如图 3 所示。



**Figure 3.** The heteroclinic cycle of system (1)  
**图 3.** 系统(1)的异宿环

## 5. 总结

本文发现了一类具有两个鞍-焦点的 3D 分片非线性系统。通过对此系统的子系统的分析, 获得系统的稳定流形和不稳定流形。在系统的稳定流形、不稳定流形基础上建立了系统(1)存在只横截穿过切换面两次。特别地, 当系统(1)中的参数  $e_1$  和  $e_2$  均为零时, 系统(1)就转化为 3D 分片线性系统, 从而得到一类 3D 分片线性系统的存在异宿环的判定条件。

## 基金项目

国家自然科学基金(12071151)。

## 参考文献

- [1] Akgul, A., Calgan, H., Koyuncu, I., *et al.* (2016) Chaos-Based Engineering Applications with a 3D Chaotic System without Equilibrium Points. *Nonlinear Dynamics*, **84**, 481-495. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2501-7>
- [2] Yang, C., Ge, Z., Chang, C., *et al.* (2010) Chaos Synchronization and Chaos Control of Quantum-CNN Chaotic System by Variable Structure Control and Impulse Control. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 1977-1985. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.04.019>
- [3] Vaseghi, B., Pourmina, M.A., Mobayen, S., *et al.* (2017) Secure Communication in Wireless Sensor Networks Based on Chaos Synchronization Using Adaptive Sliding Mode Control. *Nonlinear Dynamics*, **89**, 1689-1704. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3543-9>
- [4] Wiggins, S. (2013) Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York.
- [5] Leonov, G.A. (2014) Fishing Principle for Homoclinic and Heteroclinic Trajectories. *Nonlinear Dynamics*, **78**, 2751-2758. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1622-8>
- [6] Yang, Q. and Yang, T. (2018) Complex Dynamics in a Generalized Langford System. *Nonlinear Dynamics*, **91**, 2241-2270. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-4012-1>
- [7] Chen, Y. and Yang, Q. (2015) A New Lorenz-Type Hyperchaotic System with a Curve of Equilibria. *Mathematics and Computers in Simulation*, **112**, 40-55. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2014.11.006>
- [8] Yang, X. and Wu, T. (2016) A Note on Phase Coherence of Chaotic Sets. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **26**, Article ID: 1650243. <https://doi.org/10.1142/S0218127416502436>
- [9] Huan, S., Li, Q., Yang, X., *et al.* (2012) Chaos in Three-Dimensional Hybrid Systems and Design of Chaos Generators. *Nonlinear Dynamics*, **69**, 1915-1927. <https://doi.org/10.1007/s11071-012-0396-0>
- [10] Wu, T., Wang, L., Yang, X., *et al.* (2016) Chaos Generator Design with Piecewise Affine Systems. *Nonlinear Dynamics*, **84**, 817-832. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2529-8>

- 
- [11] Yang, Q. and Lu, K. (2018) Homoclinic Orbits and an Invariant Chaotic Set in a New 4D Piecewise Affine Systems. *Nonlinear Dynamics*, **93**, 2445-2459. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4335-6>
- [12] Wu, T. and Yang, X. (2018) Horseshoes in 4-Dimensional Piecewise Affine Systems with Bifocal Heteroclinic Cycles. *Chaos*, **28**, 113120-1-15.
- [13] Lu, K., Yang, Q., Xu, W., *et al.* (2019) Heteroclinic Cycles and Chaos in a Class of 3D Three-Zone Piecewise Affine Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **478**, 58-81. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.070>