Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 90-93
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111013

Hans汉斯

Jørgensen不等式的推广

李　娜

河南大学数学与统计学院，河南 开封
Email: mengyifei001@163.com

收稿日期：2020年12月14日；录用日期：2021年1月15日；发布日期：2021年1月25日

摘　要

假设Möbius变换f和g生成一个离散群，我们得到下列Jørgensen不等式的推广：1：若$\langle f,g\rangle$为M的离散子群且$\gamma\neq\beta$，则$|\gamma+1|+|\beta+1|\geq 0.065\cdots$；2：若$\langle f,g\rangle$为$M$的离散子群且$\beta\neq-3$，则$|\gamma+1|+|\beta+3|\geq 0.528\cdots$；3：若$\langle f,g\rangle$为$M$的离散子群且$\beta\neq-4$，则$|\gamma+1|+|\beta+4|\geq 0.246\cdots$。

关键词

离散群，Möbius变换，Jørgensen不等式

The Generalization of Jørgensen’s Inequality

Na Li

Department of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng Henan
Email: mengyifei001@163.com

Received: Dec. 14th, 2020; accepted: Jan. 15th, 2021; published: Jan. 25th, 2021

Abstract

Assume that Möbius transformation f and g genenrate a discrete group. We obtain the following generalizations of Jørgensen’s inequalities: 1: If $\langle f,g\rangle$ is a subgroup of M and $\gamma\neq\beta$, then $|\gamma+1|+|\beta+1|\geq 0.065\cdots$; 2: If $\langle f,g\rangle$ is a subgroup of M and $\beta\neq-3$, then $|\gamma+1|+|\beta+3|\geq 0.528\cdots$; 3: If $\langle f,g\rangle$ is a subgroup of M and $\beta\neq-4$, then $|\gamma+1|+|\beta+4|\geq 0.246\cdots$.

文章引用: 李娜. Jørgensen 不等式的推广[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 90-93.
DOI: 10.12677/pm.2021.111013

Keywords

Discrete Group, Möbius Transformation, Jørgensen's Inequality

1. 引言

令 f 和 g 为两个 Möbius 变换，$\langle f,g\rangle$ 为其生成的离散非初等群，则它满足 Jørgensen 不等式[1]

$$\left|tr\left(fgf^{-1}g^{-1}\right)-2\right|+\left|tr^2\left(f\right)-4\right|\geq 1.$$

Jørgensen 不等式一个重要的作用是可以判断一个二元生成群是否为离散群。历年来，很多学者对其进行研究，并且得到了一系列 Jørgensen 不等式的推广。这些推广主要分为两类。一类是当限定 $\left|tr^2\left(f\right)-4\right|$ 的取值范围时，探讨 $\left|tr\left(fgf^{-1}g^{-1}\right)-2\right|$ 的取值范围，参见[2]和[3]。另一类是固定不等式中 $\left|tr\left(fgf^{-1}g^{-1}\right)-2\right|$ 的形式，变换 $\left|tr^2\left(f\right)-4\right|$ 中的常数项，来得到两项之和的取值范围，参见[2]和[4]。

本文将在已有结果的基础上，通过固定 $\left|tr\left(fgf^{-1}g^{-1}\right)-1\right|$ 的形式，变换 $\left|tr^2\left(f\right)-a\right|$ 中 a 的取值，来得到几个不等式的推广。

本文的安排如下：在第 2 节中，我们将给出本文将用到的主要定义、记号及在证明本文主要结果中用到的经典定理。在第 3 节中，我们将给出本文的主要结果及证明。

2. 预备知识

令 M 表示扩充复平面 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有的 Möbius 变换构成的群。设 Möbius 变换

$$f=\frac{az+b}{cz+d}\in M, ad-bc=1$$

对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL\left(2,\mathbb{C}\right),$$

并且令 $tr\left(f\right)=tr\left(A\right)$，其中 $tr\left(A\right)=a+d$ 表示矩阵 A 的迹。

设 f 和 g 为 Möbius 变换，令

$$\gamma\left(f,g\right)=tr\left(fgf^{-1}g^{-1}\right)-2,$$

$$\beta\left(f\right)=tr^2\left(f\right)-4,$$

$$\beta\left(g\right)=tr^2\left(g\right)-4.$$

我们称 $\left(\gamma\left(f,g\right),\beta\left(f\right),\beta\left(g\right)\right)$ 为二元生成群 $\langle f,g\rangle$ 的参数，并记为 $par\left(\langle f,g\rangle\right)$。这些参数并不依赖于 $SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 中 f 和 g 的矩阵表示的选择。当 $\gamma\left(f,g\right)\neq 0$ 时，由[5]可知 $par\left(\langle f,g\rangle\right)$ 可以在共轭等价的意义下唯一确定 $\langle f,g\rangle$。

M 中的元素除去单位变换外可以分为三类：

1) f 是椭圆元素当且仅当 $\beta(f)\in[-4,0)$；

2) f 是斜驶元素当且仅当 $\beta(f)\notin[-4,0]$；

3) f 是抛物元素当且仅当 $\beta(f)=0$。

Cao. C 在[2]中给出了关于二元生成离散群的如下必要条件。我们将利用如下定理及迹的相关知识，得到我们的主要结果。

定理 2.1 [2]：假设 $\langle f,g\rangle$ 是 M 的一个离散子群，并且 $\gamma(f,g)\neq 0$，$\gamma(f,g)\neq\beta(f)$。若 f 不是二阶的椭圆元素，则

$$\left|\gamma(f,g)\big(\gamma(f,g)-\beta(f)\big)\right|\geq 2-2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0.198\cdots,$$

$$\left|\gamma(f,g)\big(\beta(f)+4\big)\right|\geq 2-2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0.198\cdots,$$

$$\left|\big(\beta(f)-\gamma(f,g)\big)\big(\beta(f)+4\big)\right|\geq 2-2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0.198\cdots.$$

并且上述每一个不等式都是最优的。

3. 主要结果

本节我们将通过选取合适的子群，利用定理 2.1 及不等式求最值的方法，来得到 Jørgensen 不等式的推广。为了书写方便，我们记 $\gamma=\gamma(f,g),\beta=\beta(f)$。

定理 3.1 若 $\langle f,g\rangle$ 为 M 的离散子群且 $\gamma\neq\beta$，则 $|\gamma+1|+|\beta+1|\geq 0.065\cdots$。

证明：因为 $\langle f,g\rangle$ 为离散群，所以其子群 $\langle f^2,g\rangle$ 也为离散群。根据定理 2.1，我们知道若 $\gamma(f^2,g)\neq 0$，$\gamma(f^2)\neq\beta(g)$ 且 f^2 不为二阶椭圆元素，又由

$$\gamma(f^2,g)=\gamma(\beta+4),$$

$$\beta(f^2)=\beta(\beta+4)$$

得到当 $\gamma\neq 0;\beta\neq -2,-4;\gamma\neq\beta$ 时，

$$\left|\big(\beta(f^2)-\gamma(f^2,g)\big)\big(\beta(f^2)+4\big)\right|=\left|(\gamma-\beta)(\beta+4)(\beta+2)^2\right|\geq 0.198\cdots,$$

从而我们得到

$$|\gamma+1|+|\beta+1|\geq 0.065\cdots.$$

而当 $\gamma=0;\beta=-2,-4$ 时，上式显然成立。定理得证。

定理 3.2 若 $\langle f,g\rangle$ 为 M 的离散子群且 $\beta\neq -3$，则 $|\gamma+1|+|\beta+3|\geq 0.528\cdots$。

证明：我们考虑 $\langle f,g\rangle$ 的子群 $\langle f^3,g\rangle$。由

$$\gamma(f^3,g)=\gamma(\beta+3)^2,$$

$$\beta(f^3)=\beta(\beta+3)^2$$

及定理 2.1，我们可得当 $\gamma\neq 0;\beta\neq -1,-3,-4;\gamma\neq\beta$ 时，

$$\left|\gamma(f^3,g)\big(\gamma(f^3,g)-\beta(f^3)\big)\right|=\left|\gamma(\gamma-\beta)(\beta+3)^4\right|\geq 0.198\cdots,$$

从而我们得到

$$\left|\gamma+1\right|+\left|\beta+3\right|\geq 0.528\cdots.$$

而当 $\gamma=0;\beta=-1,-4;\gamma=\beta$ 时，上式显然成立。定理得证。

定理 3.3 若 $\langle f,g\rangle$ 为 M 的离散子群且 $\beta\neq -4$，则 $\left|\gamma+1\right|+\left|\beta+4\right|\geq 0.246\cdots$。

证明：类似定理 3.1 的证明，我们考虑 $\langle f,g\rangle$ 的子群 $\langle f^2,g\rangle$，若 $\gamma\left(f^2,g\right)\neq 0$，$\gamma\left(f^2\right)\neq\beta(g)$ 且 f^2 不为二阶椭圆元素，得到当 $\gamma\neq 0;\beta\neq -2,-4;\gamma\neq\beta$ 时，

$$\left|\gamma\left(f^2,g\right)\left(\gamma\left(f^2,g\right)-\beta\left(f^2\right)\right)\right|=\left|\gamma(\beta+4)^2(\gamma-\beta)\right|\geq 0.198\cdots.$$

从而我们得到

$$\left|\gamma+1\right|+\left|\beta+4\right|\geq 0.246\cdots.$$

而当 $\gamma=0;\beta=-2;\gamma=\beta$ 时，上式显然成立。定理得证。

注：事实上，在证明上述不等式的过程中，我们对于子群和约束条件的选取是有充分考量的。为了得到理想的全局下界做了多番尝试。虽然上述不等式不一定是最优的，但是也依然提供给我们一种得到 Jørgensen 不等式推广的方法。

基金项目

感谢河南省高等学校重点科研项目计划(项目编号：18A110015)的支持。

参考文献

[1] Jørgensen, T. (1976) On Discrete Groups of Möbius Transformations. *American Journal of Mathematics*, **98**, 737-749. https://doi.org/10.2307/2373814

[2] Cao, C. (1995) Some Trace Inequalities for Discrete Groups of Möbius Transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **123**, 3807-3815. https://doi.org/10.2307/2161910

[3] Gehring, F.W. and Martin, G.J. (1991) Some Universal Constraints for Discrete Möbius Groups. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0967-6_25

[4] Tan, D. (1989) On Two-Generator Discrete Groups of Möbius Transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **106**, 763-770. https://doi.org/10.2307/2047433

[5] Gehring, F.W. and Martin, G.J. (1989) Stability and Extremality in Jørgensen's Inequality. *Complex Variables*, *Theory and Application*, **12**, 277-282. https://doi.org/10.1080/17476938908814372