Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 109-114
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111016

Hans汉斯

亚纯函数及其导数涉及分担值的唯一性

贾　丽，郅皓翔

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: 787138895@qq.com

收稿日期：2020年12月15日；录用日期：2021年1月15日；发布日期：2021年1月25日

摘　要

本文主要证明了若 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，k为大于1的整数。若f与 f' 以1为IM分担值，f' 与 $f^{(k)}$ 以1为CM分担值，且 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

关键词

亚纯函数，分担值，唯一性，导数

Uniqueness of Meromorphic Functions and Their Derivatives Involving Shared Values

Li Jia, Haoxiang Zhi

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 787138895@qq.com

Received: Dec. 15th, 2020; accepted: Jan. 15th, 2021; published: Jan. 25th, 2021

Abstract

In this paper, we shall prove that if a non-constant meromorphic f and its first derivative f' share the value 1 IM, k is an integer greater than 1, f' and $f^{(k)}$ share the value 1 CM. $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$, then $f\equiv f^{(k)}$.

文章引用: 贾丽, 郅皓翔. 亚纯函数及其导数涉及分担值的唯一性[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 109-114.
DOI: 10.12677/pm.2021.111016

Keywords

Meromorphic Function, Shared Value, Uniqueness, Derivative

1. 引言及主要结果

本文中，$f(z)$ 与 $g(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，a，b 为任意有穷复数，m，k 为正整数。若 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同(不计重数)，则称 a 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 IM 分担值；若 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同，且满足每个零点的重级相同，则称 a 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值；$N_k\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f(z)-a$ 的零点重级 $m\le k$ 以 m 重来计数，$m>k$ 以 k 重计数的计数函数；$\bar{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f(z)-a$ 的零点重级大于 k 的零点的精简计数函数数；$\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ 表示 $f'(z)$ 的零点，但不是 $f(z)$ 与 $f(z)-1$ 的零点的精简计数函数；$S(r,f)$ 表示任意满足 $S(r,f)=O\{T(r,f)\}(r\to\infty,r\notin E,mesE<+\infty)$ 的量。

1977 年，Rubel 和 Yang 证明了下述结果：

定理 A [1] 若非常数整函数 f 与 f' 具有两个有穷的 CM 分担值，则 $f\equiv f'$。

1979 年，Mues 和 teinmetz 把定理 A 中的 CM 分担值的条件换成 IM 分担值，得到下述结果：

定理 B [1] 若非常数整函数 f 与 f' 具有两个有穷的 IM 分担值，则 $f\equiv f'$。

1980 年，Gundersen 将定理 A 中的整函数替换为亚纯函数，得到以下结果：

定理 C [1] 若 f 与 f' 以 0，$a(\ne 0)$ 为 CM 分担值，则 $f\equiv f'$。

1983 年，Mues 和 Gunderen 研究了比较一般的情形，得到下述结论：

定理 D [1] 若 f 与 f' 具有两个有穷的 CM 分担值，则 $f\equiv f'$。

1986 年，Frank 和 Ohlenroth 考虑将定理 D 中一阶导数扩展到它的高阶导数，他们得到：

定理 E [1] 若 f 与 $f^{(k)}$ 具有两个有穷的 CM 分担值，则 $f=f^{(k)}$。

1986 年，Jank，Mues，and Volkmann 得出以下两个结论：

定理 F [1] 若 f，f'，f'' 以 $a(\ne 0)$ 为 CM 分担值，则 $f\equiv f'$。

定理 G [2] 设 $f(z)$ 为非常数整函数。若 f 与 f' 以 $a(\ne 0)$ 为 IM 分担值，且当 $f(z)=a$ 时，$f''(z)=a$，则 $f\equiv f'$。

1995 年，H. Zhong 考虑了高阶导数得到以下结论：

定理 H [3] 设 $f(z)$ 为非常数整函数。若 f 与 f' 以 $a(\ne 0)$ 为 CM 分担值，且当 $f(z)=a$ 时，$f^{(k)}(z)=f^{(k+1)}(z)=a$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

围绕定理 C 与定理 D、定理 H 前人得出以下问题：

问题 1 [1] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，$a(\ne 0)$ 为有穷复数，k,m 为两个正整数，且 $m>n+1$。若 f，$f^{(k)}$，$f^{(m)}$ 以 $a(\ne 0)$ 为 CM 分担值，则我们是否能得到 $f\equiv f^{(k)}$。

例 1. 设 k,m 为两个正整数，且 $m>k+1$。若 $a=b^k$，$f(z)=\mathrm{e}^{bz}+a-1$，则 f，$f^{(k)}$，$f^{(m)}$ 以 $a(\neq 0)$ 为 CM 分担值，但是 $f\not\equiv f^{(k)}$。

然而，f 为有穷级整函数时，当 $m=k+1$，问题 1 是成立的。1998 年，C. C. Yang 就证明以下结论：

定理 I [4] 设 $f(z)$ 为有穷级整函数，a 为有穷复数，k 为正整数。若 f，$f^{(k)}$，$f^{(k+1)}$ 以 a 为 IM 分担值，$f^{(k)}$，$f^{(k+1)}$ 以 a 为 CM 分担值，则 $f\equiv f'$。

2001 年，Ping 和 C. C. Yang 参考了问题 1 来减弱了定理 H 的条件，得到以下结果：

定理 J [5] 若 f，$f^{(k)}$，$f^{(k+1)}(k\geq 2)$ 以 $a(\neq 0)$ 为 CM 分担值，则 $f\equiv f'$。

2009 年，Al-Khaladi 围绕定理 B 得出以下结论：

定理 K [6] 若 f 与 f' 以 $a(\neq 0)$ 为 CM 分担值，且 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f'$ 或 $f(z)=\frac{a(z-c)}{1+A\mathrm{e}^{-z}}$，其中 $A\neq 0$，c 为常数。

定理 L [6] 若 f 与 f' 以 $a(\neq 0)$ 为 IM 分担值，且 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f'$ 或 $f(z)=\frac{2a}{1-A\mathrm{e}^{-z}}$，其中 $A\neq 0$，c 为常数。

2013 年，Al-Khaladi 根据定理 K 与定理 L 考虑了高阶导数得出以下结论：

定理 M [7] 若 f 与 $f^{(k)}(k\geq 2)$ 以 $a(\neq 0)$ 为 CM 分担值，且 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

定理 N [7] 若 f 与 $f^{(k)}(k\geq 2)$ 以 $a(\neq 0)$ 为 IM 分担值，且 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^k}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

在本文中，我们围绕以上定理，得到下面的结果：

定理 1 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数。k 为大于 1 的整数。若 f 与 f' 以 1 为 IM 分担值，f' 与 $f^{(k)}(m\neq k)$ 以 1 为 CM 分担值，且 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

由定理 1 容易得到以下两个结论：

推论 1 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数。k 为大于 1 的整数。若 f 与 f' 以 $a(\neq 0)$ 为 IM 分担值，f' 与 $f^{(k)}(m\neq k)$ 以 1 为 CM 分担值，且 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

推论 2 设 $f(z)$ 为非常数整函数。若 f 与 f' 以 $a(\neq 0)$ 为 IM 分担值，且满足 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f'$ 或 $f(z)=\frac{2a}{1-A\mathrm{e}^{-z}}$，其中 $A\neq 0$，c 为常数。

定理 2 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，m，k 为两个大于 1 的整数。若 f 与 $f^{(k)}$ 以 1 为 IM 分担值，$f^{(m)}$ 与 $f^{(k)}(m\neq k)$ 以 1 为 CM 分担值，且满足 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$，则 $f^{(k)}\equiv f^{(m)}\equiv f$。

由定理 2 容易得到以下两个结论：

推论 3 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，m，k 为两个大于 1 的整数。若 f 与 $f^{(k)}$ 以 $a(\neq 0)$ 为 IM 分担值，$f^{(m)}$ 与 $f^{(k)}(m\neq k)$ 以 $a(\neq 0)$ 为 CM 分担值，且满足 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$，则 $f^{(k)}\equiv f^{(m)}\equiv f$。

推论 4 设 $f(z)$ 为非常数整函数，k 为大于 1 的整数。若 f 与 $f^{(k)}$ 以 $a(\neq 0)$ 为 IM 分担值，且 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=S(r,f)$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

2. 几个引理

引理 1 [1] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，$k\geq 1$ 为整数，则 $m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=S(r,f)$。

引理 2 [1] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，$P(f)=a_0f^p+a_1f^{p-1}+\cdots+a_p\ (a_0\neq 0)$ 为 f 的 p 次多项式，其系数 $a_j\ (j=0,1,\cdots,p)$ 均为常数，$b_j\ (j=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(>p)$ 个判别的有穷复数，则

$$m\left(r,\frac{P(f)\cdot f'}{(f-b_1)(f-b_2)\cdots(f-b_q)}\right)=S(r,f).$$

引理 3 [1] 设 $f_j(z)(j=1,2,\cdots,p)$ 为 p 个于 $|z|<R$ 内的亚纯函数，则对于 $0<r<R$ 有

$$m\left(r,\prod_{j=1}^{p}f_j\right)\leq\sum_{j=1}^{p}m(r,f_j),\quad N\left(r,\prod_{j=1}^{p}f_j\right)\leq\sum_{j=1}^{p}N(r,f_j).$$

3. 定理证明

定理 1 的证明

设 $f\not\equiv f^{(k)}$。

令

$$H=\frac{1}{f'}\left(\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}-\frac{f''}{f'-1}\right),\tag{1.1}$$

由引理 3 和(1.1)得

$$m(r,H)=S(r,f).\tag{1.2}$$

若 z_∞ 为 f 的 p 重极点，则

$$H(z)=O\left((z-z_\infty)^p\right),\tag{1.3}$$

由于 1 为 f' 与 $f^{(k)}$ 的 CM 分担值，则 $H(z)$ 在 $f'-1$ 的零点处解析。

由 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$ 和(1.1)得

$$N(r,H)\leq k\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)\leq S(r,f).\tag{1.4}$$

当 $H(z)\equiv 0$ 时，由(1.1)式得 $f'-1\equiv c\left(f^{(k)}-1\right)$ (c 为非零常数)。

故

$$N(r,f)=0.\tag{1.5}$$

当 $H(z)\not\equiv 0$ 时。

由(1.4)与(1.3)，(1.2)式得

$$N(r,f) \le N\left(r,\frac{1}{H}\right) \le T(r,H)+O(1) \le S(r,f). \tag{1.6}$$

由引理 3 和(1.5)、(1.6)得

$$\begin{aligned}
\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right) &\le \bar{N}\left(r,\frac{f}{f'}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&\le T\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1) \\
&\le N\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f), \\
&\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}(r,f)+S(r,f) \\
&\le S(r,f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{N}\left(r,\frac{1}{f''}\right) &\le \bar{N}\left(r,\frac{f'}{f''}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right) \\
&\le T\left(r,\frac{f''}{f'}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+O(1) \\
&\le N\left(r,\frac{f''}{f'}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f), \\
&\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\bar{N}(r,f)+S(r,f) \\
&\le S(r,f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(3)}}\right) &\le \bar{N}\left(r,\frac{f''}{f^{(3)}}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f''}\right) \\
&\le T\left(r,\frac{f^{(3)}}{f''}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f''}\right)+O(1) \\
&\le N\left(r,\frac{f^{(3)}}{f''}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f''}\right)+S(r,f). \\
&\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f''}\right)+\bar{N}(r,f)+S(r,f) \\
&\le S(r,f)
\end{aligned}$$

以此类推下去得

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(m)}}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)=S(r,f). \tag{1.7}$$

由定理的条件以及(1.7)得 $f \equiv f^{(k)}$。

定理 2 的证明

不妨设 $m > k$。设 $f^k \not\equiv f^m$。

令

$$H=\frac{1}{f'}\left(\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}-\frac{f^{(m+1)}}{f^{(m)}-1}\right), \tag{1.8}$$

由引理 3 和(1.8)得

$$m(r,H)=S(r,f). \tag{1.9}$$

若 z_∞ 为 f 的 p 重极点，则 $H(z)=O\left((z-z_\infty)^p\right)$。

由于 1 为 $f^{(m)}$ 与 $f^{(k)}$ 的 CM 分担值，则 $H(z)$ 在 $f^{(k)}-1$ 的零点处解析。

由 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)=S(r,f)$ 和(1.8)得 $N(r,H)\le k\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)\le S(r,f)$。

当 $H(z)\equiv 0$ 时，由(1.8)式得 $f^{(k)}-1\equiv c\left(f^{(m)}-1\right)$ (c 为非零常数)。故 $N(r,f)=0$。

当 $H(z)\not\equiv 0$ 时，以下与定理 1 类似得到结论。

参考文献

[1] Yi, H.X. and Yang, C.C. (1995) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing.

[2] Chang, J.M. and Fang, M.L. (2003) Uniqueness of Entire Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **288**, 97-111. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00581-X

[3] Zhong, H. (1995) Entire Functions That Share One Value with Their Derivaatives. *Kodai Mathematical Journal*, **18**, 250-259.

[4] Yang, L.Z. (1998) Uniqueness Theorems on Entire Functions That Share One Value with One or Two of Their Derivatives. *Proceedings of the 6th International Colloquium on Complex Analysis*, 176-183.

[5] Li, P. and Yang, C.C. (2001) Uniqueness Theorems on Entire Functions and Their Derivatives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **253**, 50-57. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7007

[6] Al-Khaladi, A.H.H. (2009) Meromorphic Functions That Share One Finite Value CM or IM with Their First Derivative. *Journal of University of Anber for Pure Science*, **3**, 69-73.

[7] Al-Khaladi, A.H.H. (2013) Meromorphic Functions That Share One Finite Value CM or IM with Their *k*-th Derivative. *Results in Mathematics*, **63**, 95-105. https://doi.org/10.1007/s00025-011-0163-4