Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 126-130
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111018

一类数学考研题的解法

郭淑妹，郭　杰，李新娜

战略支援部队信息工程大学基础部，河南 郑州
Email: guoshumeixmu@163.com

收稿日期：2020年12月21日；录用日期：2021年1月22日；发布日期：2021年1月29日

摘　要

2010~2020的考研数学中，几乎每年都有一道关于矩阵相似的题目，本文把题目中的矩阵分为实对称矩阵、非实对称矩阵和抽象矩阵，不同的矩阵采用相对应的矩阵相似的相关性质进行求解，达到事半功倍的效果。

关键词

相似矩阵，实对称阵，行列式，特征值

Methods for Solving a Class of Mathematics of Postgraduate Entrance Examination

Shumei Guo, Jie Guo, Xinna Li

Foundation Department, Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: guoshumeixmu@163.com

Received: Dec. 21st, 2020; accepted: Jan. 22nd, 2021; published: Jan. 29th, 2021

Abstract

In the 2010~2020 Mathematics of Postgraduate Entrance Examination, almost every year, there was a question about the matrix similar, this article divides the question matrix into the real symmetric matrix, the non-real symmetric matrix and the abstract matrix, different matrixes are solved by using corresponding matrixes with similar correlation properties, and the result is twice

文章引用：郭淑妹，郭杰，李新娜. 一类数学考研题的解法[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 126-130.
DOI: 10.12677/pm.2021.111018

the result with half the effort.

Keywords

Similar Matrix, Real Symmetric Matrices, The Determinant, The Eigenvalue

1. 引言

相似矩阵，就是同一个线性变换的不同的描述矩阵。一族相似矩阵就是同一个线性变换的描述。而可逆矩阵 P 就是描述同一线性变换两组基之间的过渡矩阵，也表示了两组基之间的一个变换关系。

同一个线性变换的不同矩阵描述，从实际运算性质来看并不是不分好坏的。有些描述矩阵就比其他的矩阵性质好得多，比如对角矩阵。所以矩阵的相似变换可以把一个比较“丑”的矩阵变成一个比较“美”的矩阵，并且要保证这两个矩阵都是描述了同一个线性变换，这就是矩阵的相似对角化。

矩阵的对角化问题在代数学习中占有重要的地位：相似对角化可以应用在矩阵高次幂的求解、微分方程的求解、人口迁移问题、流行病传播、马尔可夫链预测等；合同对角化为矩阵的奇异值分解提供了理论依据，可以利用矩阵与对角阵相似的关系化二次型为标准形等[1] [2] [3]。既满足合同关系又满足相似关系的矩阵为正交矩阵，正交矩阵具有优良的性质，在理论和实际中具有重要的应用。

2010~2020 的考研数学中，相似矩阵每年都考，题目类型填空、选择、计算题都有可能出现。但是计算量不大，也是比较容易得分的地方，但是有些学生对相似矩阵的性质和判定理解不清晰，把矩阵相似的必要条件看成充要条件，做题时就会走弯路，浪费时间。本文把题目中的已知矩阵分为实对称矩阵和非实对称矩阵，再根据相应的方法去做题，这样就能快速准确作出题目。

2. 相似矩阵的定义和性质

相似矩阵是线性代数学习中的一种矩阵，定义为：设 A，B 为 n 阶方阵，若存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，称 A 与 B 相似，记为 $A\sim B$，矩阵 P 称为相似变换阵。相似是一种等价关系，具有反身性、对称性、传递性。

矩阵 A，B 相似的常用性质为“四等五相似”：1) A 与 B 特征多项式相同，从而 A，B 特征值相同；2) $|A|=|B|$；3) $tr(A)=tr(B)$ (迹相等)；4) $r(A)=r(B)$；5) $A^{\mathrm{T}}\sim B^{\mathrm{T}}$；6) $A^{-1}\sim B^{-1}$；7) $A^{k}\sim B^{k}$；8) $f(A)\sim f(B)$ [4]。

需要注意的是这些性质是矩阵相似的必要条件，只有矩阵相似的时候，这些性质才成立。

n 阶矩阵 A 与对角阵 Λ 相似的充分条件为：矩阵 A 有 n 个不同的特征值。

如果 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值，则矩阵 A 与对角阵相似，但是矩阵 A 与对角阵相似，并不一定是有 n 个不同的特征值，有重根的时候也有可能是可以相似对角化的。

A 与对角阵 Λ 相似充要条件为：矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量；矩阵 A 每个重特征值的几何重数等于其代数重数。充分条件和充要条件可以判定一个实非对称矩阵是否可以相似对角化。

对于实对称矩阵 A 来说，特征值全为实数，且有 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}$，实对称矩阵是肯定可以相似对角化的[5] (证明见文献 5)。

3. 实对称矩阵

如果一个矩阵是实对称矩阵 A 具有以下性质：1) 实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量是正交的；2) 实对称矩阵 A 的特征值都是实数，特征向量都是实向量；3) n 阶实对称矩阵 A 必可对角化，且相似对角阵上的元素即为矩阵本身特征值；4) 若特征值 λ_0 具有 k 重特征值必有 k 个线性无关的特征向量，或者说必有秩 $r(A-\lambda_0 E)=n-k$ 其中 E 为单位矩阵[6]。在题目中出现矩阵为实对称矩阵时，矩阵相似的必要性质应用的比较多。

例 1 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为( )。

分析：可以发现这两个矩阵都是实对称矩阵，并且第二个矩阵为对角阵，实对称矩阵必可对角化，第一个矩阵对角化后的矩阵为第二个矩阵，即可得出两个矩阵相似。实对称矩阵与对角阵相似的充要条件可认为是两个矩阵的特征值相同。容易看出第二个矩阵的特征值值为 0，2 和 b，所以第一个矩阵的特征值也应为 0，2 和 b，求出第一个矩阵的特征多项式，进而算出 $a=0$，b 为任意常数。

例 2 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+A=0$，若 A 的秩为 3，则 A 相似于矩阵( )。

分析：A 为实对称阵，由 $A^2+A=O$，得 $A^2+A=A(A+E)=O$，两边同时取行列式，得 $A=O, A+E=O$，可以求出 A 特征值为 0 和−1，已知 A 的秩为 3，所以 A 相似的对角阵为秩为 3 的对角阵，所以−1 为 A 的三重根，所以矩阵 A 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$。

例 3 证明 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 相似。

分析：矩阵 A 为实对称阵，A 肯定与对角阵相似，要证 A 与 B 相似，利用相似关系的传递性，证 A 与 B 与同一对角阵相似即可。求出矩阵 A 的特征值为 $-n, 0$，因为 A 的秩为 1，所以 0 为 $n-1$ 重，矩阵 A 相似于对角阵 $\begin{bmatrix} -n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$，可知矩阵 B 的特征根也为 $-n, 0$，0 为 $n-1$ 重特征根，矩阵 A 与矩阵 B 特征值相同，只需证矩阵 B 可对角化即可，因为 $r(0E-B)=1$，特征值 0 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量，所以矩阵 B 有 n 个线性无关的特征向量，可以对角化。

4. 非实对称矩阵

非实对称矩阵的相似化考察中，如果两个矩阵相似，就可以利用必要条件“四等五相似”进行计算；判断 n 阶非实矩阵相似比较方便的是利用矩阵有 n 个不同的特征值，如果矩阵有重根，然后才利用矩阵有 n 个线性无关的特征向量。

例 4 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$。(I) 求 a，b 值。

分析：矩阵 A 与 B 相似，利用性质两个矩阵的迹相同和行列式相同，得出两个方程，解出 a，b 值即可。

例 5 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，判断 A,B,C 的相似关系。

分析：C 为实对称矩阵，肯定可以相似对角化，所以要判断的是 A，B 是否能相似对角化，可以看出用矩阵 A，B 的特征值均为 1，2，2，对于非实对称矩阵能对角化的充要条件是二重根 2 对应 2 个线性无关的特征向量，由 $r(2E-A)=1$，$r(2E-B)=2$ 即可判断出 A，C 相似，B，C 不相似。

例 6 下列矩阵中，与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为(　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

分析：这个题目可以看出 A 与几个矩阵的秩为 3，特征值均为 1，1 为三重根，且 $r(A-E)=2$，只需判断出与矩阵与 E 相减，秩也为 2 即可，经过计算答案为 A。

例 7、设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量。1) 证明 P 为可逆阵；2) 若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵。

分析：α 不是 A 的特征值，所以 $A\alpha$ 与 α 不存在线性关系，矩阵 P 的行列式不为零，所以为可逆阵。对关系式 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$ 进行变形，得 $P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$，由此可得矩阵 A 与矩阵 B 相似，矩阵 B 可对角化，A 就相似于对角矩阵，B 为非实对称矩阵，特征值为−3 和 2，互不相同，所以 B 可相似对角化，即得 A 可相似于对角矩阵。

5. 相似矩阵的应用

相似矩阵最常见的一个应用是利用矩阵正交相似对角化，化二次型为标准型，先求出二次型的矩阵，这里的矩阵为对称阵，肯定能够对角化，然后得到对应特征值的特征向量。如果特征值互不相同，单位化特征向量可得到正交阵，如果特征值相同，那就需要对同一特征值对应的特征向量进行施密特正交化。一种比较常见的应用是利用矩阵的相似对角化 $P^{-1}AP=\Lambda$，对矩阵的高次幂进行求解。对角阵的高次幂比较易于计算，所以可得高次幂计算为 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$，此类题目在考研题中也有出现。另一种应用是利用矩阵相似的性质，可以求矩阵的秩、矩阵的行列式等。

例 8、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求 A^{99}。

分析：利用矩阵相似对角化。首先求出矩阵 A 的特征值：$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，由于特征值互不相同，矩阵 A 必可对角化，有三个特征值求出三个线性无关的特征向量，特征向量组成可逆阵 P，这里不必求出正交阵，使得

$P^{-1}AP\sim\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，可得 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$，即可求出 A^{99}。

例 9、设三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有三个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，证明：$r(A)=2$。

分析：这道题乍一看和矩阵的相似没有什么关系，但是矩阵有三个不同的特征值，我们就要想到矩阵 A 必可相似对角化，而相似矩阵的很多性质相同，由对角阵的秩可得出 A 的秩。由 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，即 A 的特征值必有 0。又因为 A 有三个不同的特征值，则 A 必可相似对角化，由于 A 三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0。则可设其对角矩阵为

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0\end{pmatrix},\lambda_1\neq\lambda_2\neq 0$$，即得出 $r(A)=2$。

6. 总结

纵观近年来的考研题目，相似矩阵的考题越来越灵活，前几年二次型化为标准形考的比较多，后面相似矩阵的性质考的比较多，题目形式也变得比较多样，题目考察知识点不再单一，综合性比较强，难度有所提升。但是万变不离其宗，所考察内容还是相似矩阵的性质、判定一个矩阵是否可以相似对角化、相似矩阵的应用。在学习的时候，多思考，勤归纳总结，一道题目多想几种解题方法，对知识进行融会贯通。

对于相似矩阵问题，当已知矩阵为实对称矩阵时，矩阵肯定能够对角化，做题目时用的较多为矩阵的“四等五相似”性质；当矩阵非对称时，常用的是矩阵相似的充要条件和充分条件判定矩阵的相似；求矩阵高次幂的运算时，只用利用矩阵相似的性质考试时只有看清题目，找对方法，对症下药才能快速准确进行解答。

参考文献

[1] 丘维声. 高等代数[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.

[2] 杜院录, 等. 高等代数[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2017.

[3] 王凤肆, 等. 线性代数课程教学执行计划[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2015.

[4] 同济大学应用数学系. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[5] 程云鹏, 等. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2010.

[6] 方文波. 线性代数及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.