Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(10), 1739-1746
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110195

Hans汉斯

一类非线性微分差分方程的指数多项式解

韦燕红，陈 莉

五邑大学数学与计算科学学院，广东 江门

收稿日期：2021年9月9日；录用日期：2021年10月11日；发布日期：2021年10月20日

摘 要

本文研究一类非线性微分差分方程

$$f^{n}(z)+q(z)e^{Q(z)}L(z,f)=p_1e^{\alpha_1 z}+p_2e^{\alpha_2 z},$$

且 $f(z)$ 满足 $f\in\Gamma_0$ 的有穷级整函数解，得到 $f(z)=e^{\frac{\alpha_2}{n}z+B}$ 或 $f(z)=e^{\frac{\alpha_1}{n}z+B}$，其中$B$是常数；$n\ge k+2$，$n,k$ 是非零整数，$L(z,f)$是不恒为零的k次齐次线性微分－差分多项式；$q(z)$是非恒为零多项式，$Q(z)$是非常数多项式，$p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2$ 是非零常数且 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\notin\left\{1,\frac{k}{n},\frac{n}{k}\right\}$；并给出2个例子说明解的存在性。本文推广了文献6中Chen等人的结果。

关键词

值分布，微分差分方程，指数多项式，有穷级

Exponential Polynomial Solutions of One Class of Non-Linear Differential-Difference Equations

Yanhong Wei, Li Chen

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: Sep. 9th, 2021; accepted: Oct. 11th, 2021; published: Oct. 20th, 2021

Abstract

In this paper, we study entire solutions of finite order of the following type nonlinear differen-

文章引用: 韦燕红, 陈莉. 一类非线性微分差分方程的指数多项式解[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1739-1746.
DOI: 10.12677/pm.2021.1110195

tial-difference equations in the complex plane

$$f^n(z)+q(z)e^{Q(z)}L(z,f)=p_1e^{\alpha_1 z}+p_2e^{\alpha_2 z}.$$

If $f(z)$ belongs to Γ_0, then $f(z)=e^{\frac{\alpha_2}{n}z+B}$ or $f(z)=e^{\frac{\alpha_1}{n}z+B}$, where B is a constant. $n\ge k+2$, n,k are non-zero integers, $L(z,f)$ is a nonvanishing differential-difference polynomial of degree is equal to *k*. $q(z)$ is a nonvanishing polynomial and $Q(z)$ is not a constant polynomial, $p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2$ are nonzero constants such that $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\notin\left\{1,\frac{k}{n},\frac{n}{k}\right\}$. We give two examples, which show the existence of solution. This paper generalizes the results of Chen *et al.* in literature 6.

Keywords

Value Distribution, Differential-Difference Equations, Exponential Polynomial, Finite Order

1. 引言与定理

本文使用 Nevalinna 理论的符号，假设读者熟悉值分布的相关理论(详见参考文献[1] [2])。

定义 1 设 $P_j(z)$ 和 $Q_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是关于 z 的多项式，$f(z)$ 是非常数亚纯函数，则 $f(z)=P_1(z)e^{Q_1(z)}+P_2(z)e^{Q_2(z)}+\cdots+P_k(z)e^{Q_k(z)}$ 称为指数型多项式。

常见的指数多项式类型有：

$$\Gamma_0=\left\{e^{\alpha(z)}\mid\alpha(z)\text{是一个非常数多项式}\right\},$$

$$\Gamma_0'=\left\{p(z)e^{\alpha(z)}\mid p(z)\text{是一个多项式且}\alpha(z)\text{是一个非常数多形式}\right\}。$$

定义 2 [3] 我们把形如 $L(z,f)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(z)\left[f^{(v_{i_1})}(z+c_{i_1})\right]^{k_{i_1}}\cdots\left[f^{(v_{i_m})}(z+c_{i_m})\right]^{k_{i_m}}$ 称为 k 次齐次线性复微分－差分多项式，其中 $k_{i_1}+\cdots+k_{i_m}=k,i=1,\cdots,m$，$m$ 是一个正整数且 $\varphi_i(z)(i=1,\cdots,m)$ 是多项式。如果 $c_{i_1}=\cdots=c_{i_m}$ $(i=1,\cdots,m)$，则称 $L(z,f)$ 有相同的位移。

目前，不少学者研究非线性微分差分方程解的存在性和解的结构。在利用 Nevalinna 理论研究这类方程时，指数多项式起着很重要的作用。

在 2012 年，Wen [4]等人研究了 $f^n(z)+q(z)e^{Q(z)}f(z+c)=P(z)$ 的有限级整函数解，其中 $n\ge 2$ 是整数，$q(z)$，$Q(z)$ 和 $P(z)$ 是多项式且 $q(z)$ 不恒等于 0，$Q(z)$ 不是常数。在 2016 年，Liu [5]在 Wen 等人研究的基础上研究了一类非线性微分差分方程 $f^n(z)+q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c)=P(z)$ 的有限级超越整函数解，这里 $k\ge 1$。他得到了相似的结果。

在 2018 年，Chen 等人[6]考虑用 $p_1e^{\lambda z}+p_2e^{-\lambda z}$ 替换 $P(z)$，研究

$$f^n(z)+q(z)e^{Q(z)}f(z+c)=p_1e^{\lambda z}+p_2e^{-\lambda z},\tag{1.1}$$

得到下面的定理：

定理 1 设 $n\ge 3$ 是整数，c,λ,p_1 和 p_2 是非零常数，$q(z)$ 是非恒为零多项式，$Q(z)$ 是非常数多项式。如果 $f(z)$ 是方程(1.1)的一个有限级整函数解，那么下面结论成立：

(I) 每个解都满足 $\rho(f)=\deg Q=1$；

(II) 如果 $f\in\Gamma_0$，那么以下两种情况必有一种成立

(a) $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}z+B}$，$Q(z)=-\dfrac{n+1}{n}\lambda z+b$；

(b) $f(z)=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}z+B}$，$Q(z)=\dfrac{n+1}{n}\lambda z+b$。

这里，b 和 B 都是常数。

Chen 等人猜测上述定理在 $n=2$ 时仍成立。因此，在 2020 年，Xu 等人[7]考虑当 $n=2$ 时的情况，得到了更一般的结论，部分地解决了 Chen 等人的猜想。他们研究以下非线性微分差分方程

$$f^2(z)+q(z)\mathrm{e}^{Q(z)}f^{(k)}(z+c)=p_1\mathrm{e}^{\alpha_1 z}+p_2\mathrm{e}^{\alpha_2 z}, \tag{1.2}$$

得到以下定理：

定理 2 设 k 是一个非负整数，c,α_1,α_2,p_1 和 p_2 是非零常数且 $\alpha_1\ne\alpha_2$，$q(z)$ 是非恒为零多项式，$Q(z)$ 是非常数多项式。如果 $f(z)$ 是方程(1.2)的一个超越整函数解，那么：

(1) 每个解都满足 $\rho(f)=\deg Q\ge 1$；

(2) 如果 $f(z)$ 是指数多项式，那么 $\rho(f)=\deg Q=1$；

(3) 如果 $f\in\Gamma_0'$，那么以下两种情况必有一种成立

(a) $f(z)=g(z)\mathrm{e}^{\frac{\alpha_2}{n}z+B}$，$Q(z)=\left(\alpha_1-\dfrac{\alpha_2}{2}\right)z+b$，

$$g^2(z)\mathrm{e}^{2B}=p_2,\quad q(z)\left[\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^s g(z+c)^{(k-s)}\right]\mathrm{e}^{\frac{\alpha_2 c}{2}+b+B}=p_1;$$

(b) $f(z)=g(z)\mathrm{e}^{\frac{\alpha_1}{n}z+B}$，$Q(z)=\left(\alpha_2-\dfrac{\alpha_1}{2}\right)z+b$，

$$g^2(z)\mathrm{e}^{2B}=p_1,\quad q(z)\left[\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^s g(z+c)^{(k-s)}\right]\mathrm{e}^{\frac{\alpha_2 c}{2}+b+B}=p_2.$$

这里 b 和 B 是常数，$g(z)$ 是多项式。

受文献[3] [4] [5] [6] [7]的启发，本文考虑研究一类非线性微分差分方程

$$f^n(z)+q(z)\mathrm{e}^{Q(z)}L(z,f)=p_1\mathrm{e}^{\alpha_1 z}+p_2\mathrm{e}^{\alpha_2 z} \tag{1.3}$$

的有限级整函数解，得到如下定理：

定理 3 设 $n\ge k+2$，n,k 是非零整数，$L(z,f)$ 是不恒为零的 k 次齐次线性微分－差分多项式，$q(z)$ 是非恒为零多项式，$Q(z)$ 是非常数多项式，$p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2$ 是非零常数且 $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\notin\left\{1,\dfrac{k}{n},\dfrac{n}{k}\right\}$。如果 $f(z)$ 是方程(1.3)的一个有限级整函数解，那么：

(I) 每个解都满足 $\rho(f)=\deg Q=1$；

(II) 如果 $f\in\Gamma_0$，那么以下两种情况必有一种成立

(a) $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{\alpha_2}{n}z+B}$， $Q(z)=\left(\alpha_1-\frac{k\alpha_2}{n}\right)z+s$， $p_1=q(z)\mathrm{e}^sD(z)$， $p_2=\mathrm{e}^{Bn}$；

(b) $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{\alpha_1}{n}z+B}$， $Q(z)=\left(\alpha_2-\frac{k\alpha_1}{n}\right)z+s$， $p_1=\mathrm{e}^{Bn}$， $p_2=q(z)\mathrm{e}^sD(z)$。

这里，B 和 s 是常数， $D(z)$ 是一个非零多项式。

下面给出 2 个例子进行说明。

例 1 函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 是 $f^3(z)+2\mathrm{e}^zf'(z+\log 2)=4\mathrm{e}^{2z}+\mathrm{e}^{3z}$ 的有穷级超越整函数解，其中 $k=1$，$\alpha_1=2$，$\alpha_2=3$， $q(z)=2$， $D(z)=2$， $p_1=4$， $p_2=1$。此时满足定理 3 的(I)和(II)中的(a)。

例 2 函数 $f(z)=2\mathrm{e}^z$ 是 $f^4(z)+2\mathrm{e}^zf'(z-1)f''(z+1)=16\mathrm{e}^{4z}+8\mathrm{e}^{3z}$ 的有穷级超越整函数解，其中 $k=2$，$\alpha_1=4$， $\alpha_2=3$， $q(z)=2$， $D(z)=4$， $p_1=16$， $p_2=8$。此时满足定理 3 的(I)和(II)中的(b)。

注：显然 $k=1$， $\alpha_1=-\alpha_2$ 时，定理 1 是定理 3 的特殊情形。

2. 引理

证明定理 3 需要下述的引理证明。

引理 1 [2]设 $f_j(z)(j=1,2,\cdots,n)(n\ge 2)$ 为亚纯函数， $g_j(z)(j=1,2,\cdots,n)$ 为整函数，且它们满足下列条件：

1) $f_1(z)\mathrm{e}^{g_1(z)}+f_2(z)\mathrm{e}^{g_2(z)}+\cdots+f_n(z)\mathrm{e}^{g_n(z)}\equiv 0$；

2) 当 $1\le j<k\le n$ 时， $g_j(z)-g_k(z)$ 不是常数；

3) 当 $1\le j\le n$ 且 $1\le h<k\le n$ 时，$T(r,f_j)=o\left(T\left(r,\mathrm{e}^{g_h(z)-g_k(z)}\right)\right)(r\to\infty,r\notin E)$。其中 $E\subset(1,\infty)$ 是有限线性测度或对数测度集。那么， $f_j\equiv 0\ (j=1,2,\cdots,n)$。

引理 2 [3]如果 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，c,h 是任意两个互不相同的复数，若 $f(z)$ 的超级 $\rho_2(f)<1$，那么

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}(z+h)}{f(z+c)}\right)=S(r,f).$$

此外，若 $L(z,f)$ 是 k 次微分差分多项式，那么

$$m\left(r,\frac{L(z,f)}{f^k(z)}\right)=S(r,f).$$

引理 3 [8]设 $f(z)$ 是一个非常数有限级超越亚纯函数，$P(z,f)$ 和 $Q(z,f)$ 是两个以 $f(z)$ 的小函数为系数且关于 $f(z)$ 的差分多项式，使得

$$f^n(z)P(z,f)=Q(z,f),$$

差分多项式 $Q(z,f)$ 中关于 $f(z)$ 和 $f(z+c)$ 的总次数不超过 n。设 $c\in\mathbb{C}$， $\delta<1$，那么对于所有 r，除去一个有限对数测度的可能例外值有

$$m(r,P(z,f))=o\left(\frac{T(r+|c|,f)}{r^\delta}\right)+o(T(r,f)).$$

注：当 $P(z,f)$ 和 $Q(z,f)$ 是两个以 $f(z)$ 的小函数为系数且关于 $f(z)$ 的微分差分多项式时，有

$$m(r,P(z,f))=S(r,f).$$

3. 定理 3 的证明

3.1. 结论(I)的证明

设 $f(z)$ 是方程(1.3)的有限级整函数解，那么

$$\begin{aligned} nT(r,f) = T(r,f^n) &= m(r,f^n) \\ &= m\left(r, p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} - q(z) e^{Q(z)} L(z,f)\right) \\ &\le m\left(r, e^{Q(z)}\right) + m\left(r, L(z,f)\right) + S(r,f) + O(r) \\ &\le m\left(r, e^{Q(z)}\right) + m\left(r, \frac{L(z,f)}{f^k} f^k\right) + S(r,f) + O(r) \\ &\le m\left(r, e^{Q(z)}\right) + km(r,f) + S(r,f) + O(r) \\ &\le T\left(r, e^{Q(z)}\right) + kT(r,f) + S(r,f) \end{aligned}$$

因为 $n > k$，所以有

$$(n-k)T(r,f) \le T\left(r, e^{Q(z)}\right) + S(r,f),$$

因此，$\rho(f) \le \deg Q$。

假设 $\rho(f) < \deg Q$，由方程(1.3)右边的级为 1，我们有 $\deg Q = 1$，此时 $\rho(f) < 1$。取 $Q(z) = az + b$，其中 $a \ne 0$。那么方程(1.3)可写为

$$p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} + p_3 e^{az+b} + p_4 = 0.$$

其中，$p_3 = -q(z)L(z,f)$，$p_4 = -f^n(z)$ 且它们的级均小于 1。

以下分三种情况讨论。

情况 1. $a \ne \alpha_1$ 和 $a \ne \alpha_2$。

由引理 1 可知，$p_1 = p_2 = 0$。与 p_1, p_2 是非零常数矛盾。

情况 2. $a = \alpha_1$ 和 $a \ne \alpha_2$。

方程(1.3)可写为

$$\left(p_1 + p_3 e^b\right) e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} + p_4 = 0,$$

由引理 1 可知，$p_2 = 0$ 与 p_2 是非零常数矛盾。

情况 3. $a \ne \alpha_1$ 和 $a = \alpha_2$。

类似于情况 2，得到 $p_1 = 0$ 与 p_1 是非零常数矛盾。

因此，$\rho(f) = \deg Q(z)$。又因为 $\deg Q(z) \ge 1$，所以 $\rho(f) \ge 1$。

设 $\rho(f) > 1$，令 $P(z) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$，$G(z) = q(z)L(z,f)$，那么 $\rho(P) = 1$。

方程(1.3)可写为

$$f^n(z) + G(z) e^{Q(z)} = P(z). \tag{3.1}$$

对(3.1)微分，可得

$$nf^{n-1} f' + H(z) e^{Q(z)} = P'(z). \tag{3.2}$$

其中，$H(z) = G'(z) + Q'(z)G(z)$。由(3.1)和(3.2)消去 $e^{Q(z)}$，得

$$f^{n-1}\left(H(z)f(z)-nG(z)f'(z)\right)=P(z)H(z)-P'(z)G(z)$$

因为$n\geq k+2$，$P(z)H(z)-P'(z)G(z)$是关于$f(z)$的次数不超过 k 的微分差分多项式。由引理 3 可得，

$$m\left(r,H(z)f(z)-nG(z)f'(z)\right)=S(r,f)$$

和

$$m\left(r,f(z)\left(H(z)f(z)-nG(z)f'(z)\right)\right)=S(r,f).$$

若$H(z)f(z)-nG(z)f'(z)$不恒为 0，那么

$$\begin{aligned}
&T(r,f)=m(r,f)\\
&\leq m\left(r,f(z)\right)\left(H(z)f(z)-nG(z)f'(z)\right)+m\left(r,\frac{1}{H(z)f(z)-nG(z)f'(z)}\right),\\
&\leq T\left(r,H(z)f(z)-nG(z)f'(z)\right)+S(r,f)=S(r,f)
\end{aligned}$$

得到矛盾。

若$H(z)f(z)-nG(z)f'(z)\equiv 0$，那么

$$\frac{q'(z)}{q(z)}+Q'(z)+\frac{L'(z,f)}{L(z,f)}=n\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

积分得，

$$q(z)L(z,f)e^{Q(z)}=cf^{n}(z). \tag{3.3}$$

这里，c 是非零常数。

把式子(3.3)代入(1.3)，有

$$(1+c)f^{n}(z)=P. \tag{3.4}$$

当$1+c\neq 0$时，方程(3.4)的左边级大于 1，而右边级等于 1，得到矛盾。当$1+c=0$时，$P(z)=p_1e^{\alpha_1 z}+p_2e^{\alpha_2 z}\equiv 0$，矛盾。因此，$\rho(f)=\deg Q(z)=1$。

3.2. 结论(II)的证明

因为$f\in\Gamma_0$及结论(I) $\rho(f)=\deg Q(z)=1$，故设

$$f(z)=e^{Az+B} \tag{3.5}$$

和

$$Q(z)=rz+s, \tag{3.6}$$

这里 A,r 是非零常数，B 和 s 是常数。

由式子(3.5)可得

$$L(z,f)=D(z)e^{Akz}, \tag{3.7}$$

其中，$D(z)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(z)A^{v_{i_1}k_{i_1}+\cdots+v_{i_m}k_{i_m}}e^{A\left(c_{i_1}k_{i_1}+\cdots+c_{i_m}k_{i_m}\right)+kB}$。把式子(3.5)~(3.7)代入(1.3)，整理后有

$$\mathrm{e}^{Bn}\mathrm{e}^{(nA-\alpha_2)z}+q(z)\mathrm{e}^{s}D(z)\mathrm{e}^{(Ak+r-\alpha_2)z}-p_1\mathrm{e}^{(\alpha_1-\alpha_2)z}-p_2=0. \tag{3.8}$$

以下分四种情况讨论

情况 1. $nA-\alpha_2=0$ 和 $Ak+r-\alpha_2=0$

由引理 1 可得 $p_1=0$。矛盾。

情况 2. $nA-\alpha_2\neq 0$ 和 $Ak+r-\alpha_2\neq 0$。

如果 $nA-\alpha_2\neq Ak+r-\alpha_2\neq \alpha_1-\alpha_2$，那么由方程(3.8)和引理 1 可得 $p_1=0$。矛盾。

如果 $nA-\alpha_2$，$Ak+r-\alpha_2$ 和 $\alpha_1-\alpha_2$ 有且只有两个相等，不失一般性，我们假设 $nA-\alpha_2=Ak+r-\alpha_2\neq\alpha_1-\alpha_2$，由方程(3.8)有

$$\left[\mathrm{e}^{Bn}+q(z)\mathrm{e}^{s}D(z)\right]\mathrm{e}^{(nA-\alpha_2)z}-p_1\mathrm{e}^{(\alpha_1-\alpha_2)z}-p_2=0. \tag{3.9}$$

由方程(3.9)和引理 1 可得 $p_1=p_2=0$，矛盾。

如果 $nA-\alpha_2=Ak+r-\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$，由方程(3.8)有

$$\left[\mathrm{e}^{Bn}+q(z)\mathrm{e}^{s}D(z)-p_1\right]\mathrm{e}^{(\alpha_1-\alpha_2)z}-p_2=0.$$

由引理 1 可得 $p_2=0$，矛盾。

情况 3. $nA-\alpha_2=0$ 和 $Ak+r-\alpha_2\neq 0$。

如果 $Ak+r-\alpha_2\neq\alpha_1-\alpha_2$，那么 $p_1=0$，矛盾。

如果 $Ak+r-\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$，则 $A=\dfrac{\alpha_2}{n}$，$r=\alpha_1-\dfrac{k\alpha_2}{n}\neq 0$。即 $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\neq\dfrac{k}{n}$。由方程(3.8)有

$$\left[q(z)\mathrm{e}^{s}D(z)-p_1\right]\mathrm{e}^{(\alpha_1-\alpha_2)z}+\left[\mathrm{e}^{Bn}-p_2\right]=0.$$

由引理 1 可得，$p_1=q(z)\mathrm{e}^{s}D(z)$，$p_2=\mathrm{e}^{Bn}$，$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{\alpha_2}{n}z+B}$，$Q(z)=\left(\alpha_1-\dfrac{k\alpha_2}{n}\right)z+s$。

情况 4. $nA-\alpha_2\neq 0$ 和 $Ak+r-\alpha_2=0$。

如果 $nA-\alpha_2\neq\alpha_1-\alpha_2$，由引理 1 可得 $p_1=0$。矛盾。

如果 $nA-\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$，则 $A=\dfrac{\alpha_1}{n}$，$r=\alpha_2-\dfrac{k\alpha_1}{n}\neq 0$。即 $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\neq\dfrac{n}{k}$。由方程(3.8)有

$$\left[\mathrm{e}^{Bn}-p_1\right]\mathrm{e}^{(\alpha_1-\alpha_2)z}+\left[q(z)\mathrm{e}^{s}D(z)-p_2\right]=0.$$

由引理 1 可得，$p_1=\mathrm{e}^{Bn}$，$p_2=q(z)\mathrm{e}^{s}D(z)$，$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{\alpha_1}{n}z+B}$，$Q(z)=\left(\alpha_2-\dfrac{k\alpha_1}{n}\right)z+s$。

基金项目

广东省自然科学基金资助项目(2021A1515010062)和江门市基础与理论科学研究类科技计划项目(2021A24)。

参考文献

[1] Hayman, W. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht.

[3] 高林奎. 非线性复微分-差分方程的指数型多项式解及复微分-差分多项式的值分布研究[D]: [博士学位论文]. 南昌: 南昌大学, 2019.

[4] Wen, Z.T., Heittokangas, J. and Laine, I. (2012) Exponential Polynomials as Solutions of Certain Nonlinear Difference Equations. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **28**, 1295-1306. https://doi.org/10.1007/s10114-012-1484-2

[5] Liu, K. (2016) Exponential Polynomials as Solutions of Differential-Difference Equations of Certain Types. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **13**, 3015-3027. https://doi.org/10.1007/s00009-015-0669-1

[6] Chen, M.F., Gao, Z.S. and Zhang, J.L. (2018) Entire Solutions of Certain Type of Non-Linear Difference Equations. *Computational Methods and Function Theory*, **19**, 17-36. https://doi.org/10.1007/s40315-018-0250-6

[7] Xu, J.F. and Rong, J.X. (2020) Exponential Polynomials and Nonlinear Differential-Difference Equations. *Journal of Function Spaces*, **2020**, Article ID: 6901270. https://doi.org/10.1155/2020/6901270

[8] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Difference Analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with Applications to Difference Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **34**, 477-487. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.010