**Pure Mathematics** 理论数学, 2021, 11(10), 1747-1751
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110196

Hans汉斯

# 3度非弧传递无核Cayley图

**李婉婷，凌　波***

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2021年9月12日；录用日期：2021年10月14日；发布日期：2021年10月21日

## 摘　要

设$\Gamma = Cay(G,S)$是群$G$上的Cayley图。称$\Gamma$为无核的，如果$G$在$X$中是无核的，其中$G \le X \le Aut\Gamma$。用$H$表示$1 \in V\Gamma$在$X$中的点稳定子。本文对$|H| = 16$时，度数为3的非弧传递图$\Gamma$进行分类研究。

## 关键词

无核Cayley图，单群，自同构群，正规Cayley图

# Core-Free Nonsymmetric Cayley Graphs of Valency 3

**Wanting Li, Bo Ling***

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Sep. 12th, 2021; accepted: Oct. 14th, 2021; published: Oct. 21st, 2021

## Abstract

**Let $\Gamma = Cay(G,S)$ be a Cayley graph of group $G$. Then $\Gamma$ is said to be core-free if $G$ is core-free in $X$, where $G \le X \le Aut\Gamma$. Let $H$ be the stabilizer of $1 \in V\Gamma$ in $X$. We classify the 3-valent nonsymmetric Cayley graphs where $|H| = 16$ in this paper.**

## Keywords

**Core-Free Cayley Graph, Simple Group, Automorphism Group, Normal Cayley Graph**

*通讯作者。

文章引用: 李婉婷, 凌波. 3 度非弧传递无核 Cayley 图[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1747-1751.
DOI: 10.12677/pm.2021.1110196

## 1. 引言

本文仅讨论有限，简单，连通，无向图。

设$\Gamma$是一个图，其顶点集，边集，弧集，图的全自同构群分别记为$V\Gamma$，$E\Gamma$，$Arc\Gamma$，$Aut\Gamma$。设$X \le Aut(\Gamma)$，我们称图$\Gamma$为$X$-点传递的，$X$-边传递的，$X$-弧传递的，如果$X$传递地作用在$V\Gamma$，$E\Gamma$，$Arc\Gamma$。相应地，称图$\Gamma$是点传递的，边传递的，弧传递的，如果$X = Aut(\Gamma)$。

设$G$是一个有限群并记其单位元为1。取$S \subseteq G-\{1\}$，称它为$G$的Cayley子集。设$S$满足$S = S^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in S\}$。定义群$G$关于$S$的Cayley无向图$\Gamma := Cay(G,S)$，其中：

$$V\Gamma := G, E\Gamma := \{\{g, sg\} \mid g \in G, s \in S\}$$

我们称Cayley图$\Gamma = Cay(G,S)$关于$G$是正规的，如果$G \lhd Aut\Gamma$。记$Aut(G,S) = \{\alpha \in Aut(G) \mid S^{\alpha} = S\}$，记$A_1$是顶点1的点稳定子群。由文献[1] (命题4.22)，我们有，$N_{Aut\Gamma}(G) = G : Aut(G,S)$。所以，$\Gamma$是正规Cayley图当且仅当$A_1 = Aut(G,S)$，当且仅当$Aut\Gamma = G : Aut(G,S)$。由此可见，正规Cayley图的全自同构群可被原群完全决定。

单群上的Cayley图，对于非弧传递图，目前相关的结论还是非常少。本文尝试做一些研究。

## 2. 预备知识

设$X$是任意有限群，$H$为$G$的无核子群。设$D$是$H$的双陪集的并，满足$D^{-1} = D$。定义陪集图$\mathrm{Cos}(X,H,D)$，其顶点集$[X:H] := \{Hx \mid x \in X\}$使得$Hx$与$Hy$相邻当且仅当$yx^{-1} \in HDH$。考虑$X$依右乘作用在$H$的右陪集集合$[X:H]$上。注意到该作用是忠实的且保持陪集图的邻接关系，我们可以将$X$看作图$\mathrm{Cos}(X,H,D)$的全自同构群$Aut(\mathrm{Cos}(X,H,D))$的一个子群。显然，$\mathrm{Cos}(X,H,D)$是连通的当且仅当$\langle D \rangle = X$。$\mathrm{Cos}(X,H,D)$的度数为$|D:H|$。容易验证$H$有$n$个轨道当且仅当$D$是$n$个$H$的双陪集的并。进一步，下面是关于陪集图性质的熟知的引理，其证明可参考文献[2] [3] [4]。

**引理2.1.** 设$\mathrm{Cos}(X,H,D)$的定义如上，则

(1) 若$\mathrm{Cos}(X,H,D)$是$X$-对称图，其度数至少为3，则存在元素$g \in X-H$使得$g^2 \in H$，$\langle H,g \rangle = X$。更进一步，我们选择$g$为一个2-元素。

(2) 设$\Gamma = Cay(G,S)$是Cayley图且有$G \le X \le Aut(\Gamma)$。设$H = X_{\alpha}$是$\alpha \in V\Gamma$在$X$中的点稳定子，我们有$\Gamma \cong \mathrm{Cos}(X,H,HSH)$。

(3) 相反地，设$\mathrm{Cos}(X,H,D)$是陪集图，$G$是$H$在$X$中的补。记$S = G \cap D$。则Cayley图$\Gamma = Cay(G,S)$同构于$\mathrm{Cos}(X,H,D)$，因此$|S| = |D:H|$。特别地，如果$\Gamma$的度数为奇数，$S$包含$G$的对合。

设$N = Core_X(G)$是$G$在$X$中的核。由文献[2]，我们容易得出下列结论。

**引理2.2.** 设$\Gamma = Cay(G,S)$是3度Cayley图，$G \le X \le Aut(\Gamma)$。令$N = Core_X(G)$。用$X_1$表示$1 \in V\Gamma$在$X$中的点稳定子。则下列之一成立：

(1) 若$G = N$，则$X \le G : Aut(G,S)$且$X_1 \le Aut(G,S)$。

(2) 若$|G:N|=2$，则存在$D\subseteq N$，其中$1\in D$，$\langle D\rangle=N$且$\Gamma\cong BiCay(N,D)$。

(3) 若$|G:N|>2$，$N$在$V\Gamma$上至少有3个轨道，则$\Gamma_N$是关于$G/N$的Cayley图并且是无核的。

**注2.2.** (a) 若我们限制一些条件，上述引理中有些情形将不会成立。例如，当$G$是非交换单群时，(2)不会出现。

(b) 在情形(3)中，若$N=1$，则通过考虑$X$在$[X:G]$ ($G$在$X$中右陪集的集合)上的右乘作用，我们可将$X$视为对称群$S_n\left(n=|X:G|\right)$的子群，$X$包含$S_n$的一个同构于$H$ ($X$作用$V\Gamma$上的一个点稳定子群)的正则子群；对$[X:G]$中的陪集重新标号为$1,2,\cdots,n$，则$G$为$X$作用在$\{1,2,\cdots,n\}$上的一个点稳定子。

**引理2.3.** 设$\Gamma=Cay(G,S)$是连通无核3度非对称Cayley图，其中$G\le X\le Aut(\Gamma)$。设$H$是$1\in V\Gamma$的点稳定子。则存在一个对合$x_1\in N_X(H)$和2-元素$x_2\in N_X\left(H\cap H^{x_2}\right)$，$x_1$和$x_2$不全包含于$U_{1\ne K\lhd H}N_X(K)$，使得$\Gamma\cong \mathrm{Cos}\left(X,H,Hx_1H\cup Hx_2H\right)$且$S=G\cap\left(Hx_1H\cup Hx_2H\right)$。

## 3. 主要结论

设$\Gamma=Cay(G,S)$是无核(关于$G$) 3度非弧传递Cayley图，其中$G\le X\le Aut(\Gamma)$。用$H$表示$1\in V\Gamma$在$X$中的点稳定子。注意到$\Gamma$是3度非弧传递的，可知$H$一定是2-群，则有下面的结论：

**定理3.1.** 设$|H|=16$。则下列之一成立：

(1) $H$同构于$Z_2\times D_8$；

(2) $H$同构于$Z_2\times Q_8$；

(3) 不存在无核3度非弧传递Cayley图。

设$\Gamma=Cay(G,S)$是无核(关于$G$) 3度非弧传递Cayley图，其中$G\le X\le Aut(\Gamma)$，$H=X_1$表示$1\in V\Gamma$在$X$中的点稳定子。设$D=Hx_1H\cup Hx_2H$，$P=H\cap H^{x_2}$。由引理2.3，我们有$\Gamma\cong\mathrm{Cos}(X,H,D)$，其中对合$x_1\in N_X(H)$，2-元素$x_2\in N_X(P)$，$x_1$和$x_2$不全包含于$U_{1\ne K\lhd H}N_X(K)$。更进一步有$\langle x_1,x_2,H\rangle=X$且$S=G\cap D$。则$P$在$H$中的指数为2。

**证明：**注意到$|H|=16$，由MAGMA [5]和GAP [6]可知，对于$H$，存在14种可能的情形，也就是，$H\cong Z_{16},Z_4\times Z_4$，$(Z_4\times Z_2):Z_2$，$Z_4:Z_4$，$Z_8\times Z_2$，$Z_8:Z_2$，$D_{16}$，$QD_{16}$，$Q_{16}$，$Z_4\times Z_2\times Z_2$，$Z_2\times D_8$，$Z_2\times Q_8$，$(Z_4\times Z_2):Z_2$或$Z_2\times Z_2\times Z_2\times Z_2$。我们将对它们一一进行分析。

首先，令$\Omega:=\{1,2,3,\cdots,16\}$。由前段分析，$X$同构于对称群$S_{16}$的一个子群。假设$H\cong Z_{16}$，则$P\cong Z_8$。因为$\Gamma$是3度图，$|H:P|=2$，注意到循环群的所有子群均为全不变子群，于是$P char H$。由于$x_1\in N_X(H)$且$x_2\in N_X(P)$，则$P^{x_1}=P$。因此，$P\lhd\langle x_1,x_2,H\rangle=X$，换句话说，不存在无核3度非弧传递Cayley图。

假设$H\cong Z_4\times Z_4$，则$P\cong Z_4\times Z_2$。注意到$H$和$P$均只有一个同构于$Z_2\times Z_2$的4阶子群，记为$K$，则$K$是$H$和$P$的特征子群。又因为$x_1\in N_X(H)$，$x_2\in N_X(P)$，这意味着$K^{x_1}=K$，$K^{x_2}=K$，所以$K\lhd\langle x_1,x_2,H\rangle=X$，矛盾于$H$在$X$中无核。

假设$H\cong(Z_4\times Z_2):Z_2$，则$P\cong Z_4\times Z_2$或$Z_2\times Z_2\times Z_2$。若$P\cong Z_2\times Z_2\times Z_2$，因为$H^{x_1}=H$且$P$是$H$中唯一同构于$Z_2\times Z_2\times Z_2$的子群，这意味着$P^{x_1}=P$。另一方面，由于$P^{x_2}=P$，$P\lhd H$，我们有$P\lhd\langle x_1,x_2,H\rangle=X$，矛盾。若$P\cong Z_4\times Z_2$，由MAGMA和GAP可知，不存在满足条件的$x_2$使得$\Gamma$是无核(关于$G$) 3度非弧传递Cayley图。

假设$H\cong Z_4:Z_4$，则$P\cong Z_4\times Z_2$。同样地，与$H\cong Z_4\times Z_4$的情形有相同的讨论，推出矛盾。

假设$H\cong Z_8\times Z_2$，则$P\cong Z_4\times Z_2$或$Z_8$。先假设前者成立，也即，$P\cong Z_4\times Z_2$。因为$H^{x_1}=H$且$P$是$H$中唯一同构于$Z_4\times Z_2$的子群，这意味着$P^{x_1}=P$。另一方面，由于$P^{x_2}=P$，$P\lhd H$，我们有

$P \triangleleft \langle x_1, x_2, H \rangle = X$，矛盾。现设 $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong Z_8 \times Z_2$，$P = \langle a \rangle \cong Z_8$，其中 $a = (1\ 12\ 4\ 10\ 2\ 11\ 3\ 9)(5\ 16\ 8\ 14\ 6\ 15\ 7\ 13)$，$b = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)(9\ 13)(10\ 14)(11\ 15)(12\ 16)$。注意到 $P$ 中只有一个 4 阶子群同构于 $Z_4$，也即，$\langle a^2 \rangle$，则 $\langle a^2 \rangle char \langle a \rangle = P \triangleleft H$，于是 $\langle a^2 \rangle \triangleleft H$。因为 $x_2 \in N_X(P)$，我们有 $\langle a^2 \rangle^{x_2} = \langle a^2 \rangle$。因为 $H$ 中有两个 8 阶子群同构于 $Z_8$，也即，$\langle a \rangle$ 和 $\langle ab \rangle$，因为 $x_1 \in N_X(H)$，那么 $\langle a \rangle^{x_1} = \langle a \rangle$ 或 $\langle ab \rangle$。若 $P^{x_1} = \langle a \rangle^{x_1} = \langle a \rangle = P$，又 $x_2 \in N_X(P)$，推出 $P \triangleleft \langle x_1, x_2, H \rangle = X$，矛盾。注意到 $H$ 中有两个 4 阶子群同构于 $Z_4$，也即，$\langle a^2 \rangle$ 和 $\langle a^2 b \rangle$，因为 $x_1 \in N_X(H)$，那么 $\langle a^2 \rangle^{x_1} = \langle a^2 \rangle$ 或 $\langle a^2 b \rangle$。若 $\langle a \rangle^{x_1} = \langle ab \rangle$，注意到 $a^2 = (ab)^2 = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 8\ 6\ 7)(9\ 12\ 10\ 11)(13\ 16\ 14\ 15)$，我们有 $\langle a^2 \rangle^{x_1} = \langle (ab)^2 \rangle = \langle a^2 \rangle$。因此 $\langle a^2 \rangle \triangleleft \langle x_1, x_2, H \rangle = X$，这与 $H$ 在 $X$ 中无核矛盾。

假设 $H \cong Z_8 : Z_2$，则 $P \cong Z_4 \times Z_2$ 或 $Z_8$。同样地，与 $H \cong Z_8 \times Z_2$ 的情形相同的讨论，推出矛盾。

假设 $H \cong D_{16}$，则 $P \cong D_8$ 或 $Z_8$。注意到 $H$ 中只有一个同构于 $Z_4$ 的 4 阶子群。由 MAGMA 和 GAP，$D_8$ 和 $Z_8$ 均是只有一个同构于 $Z_4$ 的 4 阶子群，令 $K \cong Z_4$。所以 $K$ 是 $H$ 和 $P$ 的特征子群。由于 $x_1$ 和 $x_2$ 的选择，$K \triangleleft \langle x_1, x_2, H \rangle = X$，矛盾。

假设 $H \cong QD_{16}$，则 $P \cong Q_8$，$Z_8$ 或 $D_8$。注意到 $H$ 中分别只有一个同构于 $Q_8$，$Z_8$ 和 $D_8$ 的 8 阶子群。所以当 $P$ 为以上三种子群中的任何一种时，我们有 $P char H$。另一方面，由于 $x_1 \in N_X(H)$，$x_2 \in N_X(P)$，则有 $P^{x_1} = P$，因此我们推出 $P \triangleleft \langle x_1, x_2, H \rangle = X$，矛盾。

假设 $H \cong Q_{16}$，则 $P \cong Q_8$ 或 $Z_8$。注意到 $H$ 中只有一个 2 阶子群同构于 $Z_2$。由 MAGMA 和 GAP，$Q_8$ 和 $Z_8$ 均是只有一个同构于 $Z_2$ 的子群，令 $K \cong Z_2$。所以 $K$ 是 $H$ 和 $P$ 的特征子群。从而必有 $K \triangleleft X$，矛盾。

假设 $H \cong Z_4 \times Z_2 \times Z_2$，则 $P \cong Z_4 \times Z_2$ 或 $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$。若 $P \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2$，因为 $H^{x_1} = H$ 且 $P$ 为 $H$ 中唯一同构于 $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ 的子群，这意味着 $P^{x_1} = P$。另一方面，由于 $P^{x_2} = P$，$P \triangleleft H$，于是 $P \triangleleft \langle x_1, x_2, H \rangle = X$，矛盾。若 $P \cong Z_4 \times Z_2$，由 MAGMA 和 GAP 可知，不存在满足条件的 $x_2$ 使得 $\Gamma$ 是无核(关于 $G$) 3 度非弧传递 Cayley 图。

假设 $H \cong (Z_4 \times Z_2) : Z_2$，则 $P \cong D_8$，$Q_8$ 或 $Z_4 \times Z_2$。由 MAGMA 和 GAP 可知，不存在满足条件的 $x_2$ 使得 $\Gamma$ 是无核(关于 $G$) 3 度非弧传递 Cayley 图。

假设 $H \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$，则 $P \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2$。设 $H = \langle a, b, c, d \rangle$，其中

$$b = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)(9\ 13)(10\ 14)(11\ 15)(12\ 16),$$

$$c = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)(9\ 11)(10\ 12)(13\ 15)(14\ 16),$$

$$d = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 14)(15\ 16).$$

我们断言 $a$ 是由 $b$，$c$ 和 $d$ 决定的。设 $P = \langle b, c, d \rangle$。显然 $P$ 在 $\Omega$ 上半正则，且有两个轨道，记为 $\Delta_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$\Delta_2 = \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$。因为 $H$ 在 $\Omega$ 上是正则的，则 $\Delta_1^a = \Delta_2$。可以发现 $\Sigma_1 = \{1,5\}$，$\Sigma_2 = \{2,6\}$，$\Sigma_3 = \{3,7\}$，$\Sigma_4 = \{4,8\}$，$\Sigma_5 = \{9,13\}$，$\Sigma_6 = \{10,14\}$，$\Sigma_7 = \{11,15\}$，$\Sigma_8 = \{12,16\}$ 是 $b$ 在 $\Omega$ 上的 8 个轨道；$\Sigma_1' = \{1,3\}$，$\Sigma_2' = \{2,4\}$，$\Sigma_3' = \{5,7\}$，$\Sigma_4' = \{6,8\}$，$\Sigma_5' = \{9,11\}$，$\Sigma_6' = \{10,12\}$，$\Sigma_7' = \{13,15\}$，$\Sigma_8' = \{14,16\}$ 是 $c$ 在 $\Omega$ 上的 8 个轨道；$\Sigma_1'' = \{1,2\}$，$\Sigma_2'' = \{3,4\}$，$\Sigma_3'' = \{5,6\}$，$\Sigma_4'' = \{7,8\}$，$\Sigma_5'' = \{9,10\}$，$\Sigma_6'' = \{11,12\}$，$\Sigma_7'' = \{13,14\}$，$\Sigma_8'' = \{15,16\}$ 是 $d$ 在 $\Omega$ 上的 8 个轨道。回忆到 $\Delta_1^a = \Delta_2$，我们有 $(\Sigma_i)^a = \Sigma_j$，$(\Sigma_i')^a = \Sigma_j'$，$(\Sigma_i'')^a = \Sigma_j''$，其中 $i = 1,2,3,4$，$j = 5,6,7,8$。通过计算可知，$a$ 的所有可能的情况有 8 种，将其记为集合 $M$，

$$\begin{aligned}M=\{&(1\ 9)(5\ 13)(3\ 11)(2\ 10)(6\ 14)(4\ 12)(7\ 15)(8\ 16),\\&(1\ 10)(5\ 14)(3\ 12)(2\ 11)(6\ 15)(4\ 13)(7\ 16)(8\ 9),\\&(1\ 11)(5\ 15)(3\ 13)(2\ 12)(6\ 16)(4\ 14)(7\ 9)(8\ 10),\\&(1\ 12)(5\ 16)(3\ 14)(2\ 13)(6\ 9)(4\ 15)(7\ 10)(8\ 11),\\&(1\ 13)(5\ 9)(3\ 15)(2\ 14)(6\ 10)(4\ 16)(7\ 11)(8\ 12),\\&(1\ 14)(5\ 10)(3\ 16)(2\ 9)(6\ 13)(4\ 11)(7\ 12)(8\ 15),\\&(1\ 15)(5\ 11)(3\ 9)(2\ 16)(6\ 12)(4\ 10)(7\ 13)(8\ 14),\\&(1\ 16)(5\ 12)(3\ 10)(2\ 15)(6\ 11)(4\ 9)(7\ 14)(8\ 13)\}\end{aligned}$$

因为 $H$ 在 $\Omega$ 上正则且 $x_2\in N_X(P)$， $H^{x_2}=\langle P,a^{x_2}\rangle$ 在 $\Omega$ 也是正则的，由上面的叙述可知 $a^{x_2}\in M$，从而 $M^{x_2}=M$。不失一般性，设 $a=(1\ 9)(5\ 13)(3\ 11)(2\ 10)(6\ 14)(4\ 12)(7\ 15)(8\ 16)$，将其余元素分别记为 $n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,n_7$。因此 $M=\{a,n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,n_7\}$。然而，通过计算，$\langle n_1,b,c,d\rangle\cong((Z_4\times Z_4):Z_2):Z_2$，$\langle n_2,b,c,d\rangle\cong Z_2\times D_8$，$\langle n_3,b,c,d\rangle\cong((Z_4\times Z_4):Z_2):Z_2$，$\langle n_5,b,c,d\rangle\cong Z_2\times D_8$，$\langle n_6,b,c,d\rangle\cong Z_2\times D_8$，$\langle n_7,b,c,d\rangle\cong Z_2\times D_8$，$\langle n_4,b,c,d\rangle\cong Z_2\times Z_2\times Z_2\times Z_2\cong\langle a,b,c,d\rangle$。所以只有 $a$ 和 $n_4$ 满足条件。注意到 $n_4=ab$，则 $H^{x_2}=\langle P,a^{x_2}\rangle=\langle P,a\rangle$ 或 $\langle P,ab\rangle=\langle a,b,c,d\rangle$，从而 $H\lhd X$，这矛盾于 $H$ 在 $X$ 中是无核的。即完成了定理 3.1 的证明。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(12061089，11701503)；云南省科技厅面上项目(2018FB003)。

## 参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引(上、下册) [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 1999.

[2] Li, J.J. and Lu, Z.P. (2009) Cubic *s*-Arc Transitive Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 6014-6025. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.05.002

[3] Lorimer, P. (1984) Vertex-Transitive Graphs: Symmetric Graphs of Prime Valency. *Journal of Graph Theory*, **8**, 55-68. https://doi.org/10.1002/jgt.3190080107

[4] Sabidussi, G. (1964) Vertex-Transitive Graphs. *Monatshefte für Mathematik*, **68**, 426-438. https://doi.org/10.1007/BF01304186

[5] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[6] GAP, The GAP Group and GAP-Groups (2002) Algorithms, and Programming. Version 4.3.