Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1763-1769
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111199

弱(下)鞅的一类 Marshall 型极大值不等式

鲁雅莉，冯德成，蔺 霞

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2021年9月24日；录用日期：2021年10月27日；发布日期：2021年11月3日

摘 要

本文利用一个初等不等式，得到了弱(下)鞅 $\{S_n, n \geq 1\}$ 的一类 **Marshall** 型极大值不等式，同时得到了形如 $\{g(S_n), n \geq 1\}$ 的弱下鞅的一个 **Marshall** 型极大值不等式。

关键词

弱(下)鞅，**Marshall** 型不等式，极大值

A Class of Marshall Type Maximal Inequality for Demi(sub)martingales

Yali Lu, Decheng Feng, Xia Lin

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Sep. 24^{th}, 2021; accepted: Oct. 27^{th}, 2021; published: Oct. 3^{rd}, 2021

Abstract

In this paper, we got a Marshall type maximal inequality for demi(sub)martingale

文章引用: 鲁雅莉，冯德成，蔺霞. 弱(下)鞅的一类 Marshall 型极大值不等式[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1763-1769. DOI: 10.12677/pm.2021.1111199

$\{S_n, n \geq 1\}$ **by using an elementary inequality. At the same time , we got a Marshall type maximal inequality for demisubmartingale** $\{g(S_n), n \geq 1\}$ **.**

Keywords

Demi(sub)martingale, Marshall Type Inequality, Maximal

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 预备知识

在本文中, 设 $\{S_n, n \geq 1\}$ 表示定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\text{P})$ 上的随机变量序列. 记 $S_0 = 0$, $I(A)$ 是集合 A 的示性函数, $p > 0$, $p \neq 1$ 并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

定义 1 设 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\text{P})$ 上的随机变量序列, 如果对任意 $1 \leq i \leq j < \infty$, 有

$$E[(S_j - S_i)f(S_1, \cdots, S_n)] \geq 0,$$

则称随机变量序列 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是一个弱鞅 (demimartingale) , 其中 f 是使上述期望存在且分量不减的函数. 进一步 , 若假设 f 是一个非负函数, 那么称 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是一个弱下鞅 (demisubmartingale).

弱鞅的概念是由 Newman 和 Wright 在文献 [1]中提出的, 之后很多学者对弱鞅进行了研究 , 并给出了一些有意义的结果 [2–12].

设 X 是零均值的平方可积的随机变量, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{EX^2}{\varepsilon^2 + EX^2},$$

Marshall [13]将上述不等式推广到了如下形式

$$P\{\max_{1\leq k\leq n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} EX_k^2}{\varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{n} EX_k^2}, \tag{1}$$

其中, $EX_k = 0$, $E(X_k|X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}) = 0$ a.e., $k \geq 2$, 且 $EX_k^2 < \infty$, $k \geq 1$.

在上述条件下 , 如果令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

那么 $\{S_n, n \geq 1\}$ 就是一个鞅 . Mu等 [14]在$E|X_i|^p < \infty$,$i \geq 1$, 且$p \geq 2$的条件下, 将 (1) 式推广 , 得到如下形式的 Marshall 型不等式

$$P\{\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|S_n|^p}{\alpha^{1-p}\varepsilon^p + E|S_n|^p} ,$$

其中α是下列函数的最大值

$$h(x) = 1 - x + (1-x)^{2-q}x^{q-1}, \qquad x \in [0, 1].$$

之后, Hu等 [15]将文献 [14]中的若干结论推广到弱鞅的情形下 , 得到了弱鞅的 Marshall 型概率不等式 . 文献 [16]将文献 [15]中关于弱鞅 $\{S_n, n \geq 1\}$ 的 Marshall 型极小值不等式推广到了形如 $\{g(S_n), n \geq 1\}$ 的弱下鞅的情形.

受到文献 [15]的启发, 本文利用一个初等不等式得到关于弱鞅 $\{S_n, n \geq 1\}$ 的另外一类 Marshall 型极大值不等式 , 同时得到形如 $\{g(S_n), n \geq 1\}$ 的弱下鞅的一个 Marshall 型极大值不等式 .

2. 弱(下)鞅的一类 Marshall 型极大值不等式

引理 1 [17]若 $E|X|^p < \infty$, $E|Y|^q < \infty$, 则

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}} , \ p > 1, \tag{2}$$

$$E|XY| \geq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}} , \ 0 < p < 1. \tag{3}$$

引理 2 [15] 设 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是一个弱下鞅, 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\varepsilon P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \leq E(S_n I(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon)) . \tag{4}$$

引理 3 [2] 设 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是一个弱鞅(或弱下鞅), $g(\cdot)$ 是 R 上一个不减的凸函数 , 且 $g(0) = 0$, 则$\{g(S_n), n \geq 1\}$是一个弱下鞅.

引理 4 [5] 设 x , y ≥ 0 , 并且 $q \geq 2$, 则有

$$y^q \geq x^q + qx^{q-1}(y-x) + (y-x)^q.$$

引理 5 设 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是一个弱下鞅 , 且对于任意 $n \geq 1$, 有 $ES_n \leq 0$, 假定存在 $1 < p \leq 2$, 使得对于所有 $n \geq 1$, 都有$E|S_n|^p < \infty$. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$[1 - qP(\Lambda)^{q-1}(1 - P(\Lambda))]^{\frac{1}{q}}(E|S_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq \varepsilon P(\Lambda) .$$

这里 $\Lambda = \{\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon\}$.

证明 记 $Y = I(\Lambda)$, 运用引理 1 的 (2) 式和引理 2 , 可以得到

$$\begin{aligned}(E|Y-EY|^q)^{\frac{1}{q}}(E|S_n|^p)^{\frac{1}{p}} &\geq E[(Y-EY)S_n] \\ &= E(YS_n)-EYES_n \\ &= E[I(\Lambda)S_n]-EI(\Lambda)ES_n \\ &\geq E[I(\Lambda)S_n] \\ &\geq E[\varepsilon I(\Lambda)] \\ &= \varepsilon P(\Lambda).\end{aligned}$$

因为 $1<p\leq 2$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 可得 $q\geq 2$. 那么由引理 4 , 则有

$$(1-P(\Lambda))^q\leq 1-P(\Lambda)^q-qP(\Lambda)^{q-1}(1-P(\Lambda))$$

即

$$(1-P(\Lambda))^q+P(\Lambda)^q\leq 1-qP(\Lambda)^{q-1}(1-P(\Lambda))$$

所以

$$P(\Lambda)(1-P(\Lambda))^q+P(\Lambda)^q(1-P(\Lambda))\leq 1-qP(\Lambda)^{q-1}(1-P(\Lambda))$$

又因为

$$E|Y-EY|^q=P(\Lambda)(1-P(\Lambda))^q+P(\Lambda)^q(1-P(\Lambda))$$

从而命题得证.

推论 1 设 $\{S_n,n\geq 1\}$ 是一个弱鞅 , $g(\cdot)$ 是 R 上一个不减的凸函数 , $g(0)=0$, 且对于任意 $n\geq 1$, 有 $Eg(S_n)\leq 0$. 如果存在 $1<p\leq 2$, 使得对于所有 $n\geq 1$, 都有$E|g(S_n)|^p<\infty$. 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$[1-qP(A)^{q-1}(1-P(A))]^{\frac{1}{q}}[E|g(S_n)|^p]^{\frac{1}{p}}\geq \varepsilon P(A)\,,$$

这里 $A=\{\max_{1\leq k\leq n}g(S_k)\geq\varepsilon\}$.

证明 由引理 3 可知, $\{g(S_n),n\geq 1\}$ 是一个弱下鞅 , 再由引理 5 , 结论得证.

引理 6 设 $\{S_n,n\geq 1\}$ 是一个弱鞅 , 且 $ES_1\leq 0$. 如果存在 $1<p\leq 2$, 使得对于所有 $n\geq 1$, 都有$E|S_n|^p<\infty$, 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$[1-qP(\Lambda)^{q-1}(1-P(\Lambda))]^{\frac{1}{q}}(E|S_n|^p)^{\frac{1}{p}}\geq \varepsilon P(\Lambda)\,.$$

这里 $\Lambda=\{\max_{1\leq k\leq n}S_k\geq\varepsilon\}$.

证明 当 $\{S_n,n\geq 1\}$ 是一个弱鞅时, 有 $ES_n=ES_1, n\geq 2$, 所以由引理 5 易得.

定理 1 设 $\{S_n,n\geq 1\}$ 是一个弱下鞅, $ES_n\leq 0$, $n\geq 1$. 若存在 $1<p\leq 2$, 使得对于任意 $n\geq 1$, 均有 $E|S_n|^p<\infty$, 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$P(\Lambda)\leq\frac{1}{1+M}\,.$$

其中 M 是下面方程的正解:

$$(1+x)^q = qx+\beta, \quad x\in(0,+\infty). \tag{6}$$

其中 $\beta=\frac{\varepsilon^q}{(E|S_n|^p)^{\frac{q}{p}}}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\Lambda=\{\max_{1\le k\le n} S_k\ge\varepsilon\}$.

证明 易得方程 (5) 有唯一正解. 由引理 5 可知

$$[1-qP(\Lambda)^{q-1}(1-P(\Lambda))](E|S_n|^p)^{\frac{q}{p}}\ge\varepsilon^q P(\Lambda)^q .$$

当 $P(\Lambda)=0$ 时 , 结论显然成立 .
不妨设 $P(\Lambda)\neq 0$, 则两边同时除以$P(\Lambda)^q$可得

$$[\frac{1}{P(\Lambda)^q}-q\frac{1-P(\Lambda)}{P(\Lambda)}](E|S_n|^p)^{\frac{q}{p}}\ge\varepsilon^q$$

令 $x_0=\frac{1-P(\Lambda)}{P(\Lambda)}$, $\beta=\frac{\varepsilon^q}{(E|S_n|^p)^{\frac{q}{p}}}$, 则有$P(\Lambda)=\frac{1}{1+x_0}$.
因此

$$(1+x_0)^q-qx_0\ge\beta$$

即

$$(1+x_0)^q\ge qx_0+\beta \tag{7}$$

令$h(x)=(1+x)^q-qx-\beta$, M 是方程 (6) 的正解. 因为 $h''(x)=q(q-1)(1+x)^{q-2}>0$, $x\in(0,+\infty)$, 易知 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$上是一个凸函数, 这意味着对于任意 $x\in(0,M)$, 有

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\le\frac{h(M)-h(x)}{M-x},$$

因为 $h(0)=-\beta<0$ 且 $h(M)=0$,所以对于任意 $x\in(0,M)$ 有 $h(x)<0$, 即 M 是使方程 (7) 成立的最小值 , 原命题得证.

定理 2 设 $\{S_n,n\ge1\}$ 是一个弱鞅, $ES_1\le0$. 若存在 $1<p\le2$, 使得对于任意 $n\ge1$, 均有 $E|S_n|^p<\infty$, 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$P(\Lambda)\le\frac{1}{1+M} .$$

其中M是下面方程的正解

$$(1+x)^q = qx+\beta, \quad x\in(0,+\infty).$$

其中 $\beta=\frac{\varepsilon^q}{(E|S_n|^p)^{\frac{q}{p}}}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\Lambda=\{\max_{1\le k\le n} S_k\ge\varepsilon\}$

证明 与定理 1 的证明过程类似，结合引理 6，即可证得结论．

推论 2 设 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是一个弱鞅，$g(\cdot)$ 是 R 上一个不减的凸函数，且对于任意 $n \geq 1$，$Eg(S_n) \leq 0$．若存在 $1 < p \leq 2$, 使得对于任意 $n \geq 1$, 均有 $E|g(S_n)|^p < \infty$，那么对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$P(A) \leq \frac{1}{1+M}.$$

其中 M 是下面方程的正解

$$(1+x)^q = qx + \beta, \quad x \in (0, +\infty).$$

其中 $\beta = \frac{\varepsilon^q}{(E|g(S_n)|^p)^{\frac{q}{p}}}$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$A = \{\max_{1 \leq k \leq n} g(S_k) \geq \varepsilon\}$．

证明 结合推论 1 和定理 1 的证明过程，易得．

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11861057, 11761064), 甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019A-003), 西北师范大学研究生科研资助项目(2020KYZZ001113),甘肃省优秀研究生“创新之星”项目(2021CXZX-262).

参考文献

[1] Newman, C.M. and Wright, A.L. (1982) Associated Random Variables and Martingale Inequalities. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **59**, 361-371. https://doi.org/10.1007/BF00532227

[2] Christofides, T.C. (2000) Maximal Inequalities for Demimartingales and a Strong Large Numbers. *Statistics and Probability Letters*, **50**, 357-363. https://doi.org/10.1016/S0167-7152(00)00116-4

[3] Christofides, T.C. (2004) U-Statistics on Associated Random Variables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **119**, 1-15. https://doi.org/10.1016/S0378-3758(02)00418-4

[4] Christofides, T.C. and Hadjikyriakou, M. (2009) Exponential Inequalities for Demimartingales and N-Demimartingales and Negatively Associated Random Variables. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 2060-2065. https://doi.org/10.1016/j.spl.2009.06.013

[5] Christofides, T.C. and Hadjikyriakou, M. (2012) Maximal and Moment Inequalities for Demimartingales and N-Demimartingales. *Statistics and Probability Letters*, **82**, 683-691. https://doi.org/10.1016/j.spl.2011.12.009

[6] Dai, P.-P., Shen, Y. and Hu, S.-H. (2014) Some Results for Demimartingales and N-Demimartingales. *Journal of Inequalities and Applications*, **2014**, 489-501. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-489

[7] Prakasa Rao, B.L.S. (2007) On Some Maximal Inequalities for Demisubmartingales and N-Demisuper Martingales. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **8**, Article 112.

[8] Prakasa Rao, B.L.S. (2012) Remarks on Maximal Inequalities for Nonnegative Demisubmartingales. *Statistics and Probability Letters*, **82**, 1388-1390. https://doi.org/10.1016/j.spl.2012.03.019

[9] 胡舒合, 杨文志, 王学军, 等. 关于N-弱鞅和弱鞅不等式的一个注记[J]. 系统科学与数学, 2010, 30(8): 1052-1058.

[10] Wang, X.H. and Wang, X.J. (2013) Some Inequalities for Conditional Demimartingales and Conditional N-Demimartingales. *Statistics and Probability Letters*, **83**, 700-709. https://doi.org/10.1016/j.spl.2012.11.017

[11] Wang, J.F. (2004) Maximal Inequalities for Associated Random Variables and Demimartingales. *Statistics and Probability Letters*, **66**, 347-354. https://doi.org/10.1016/j.spl.2003.10.021

[12] Wang, X.J. and Hu, S.H. (2009) Maximal Inequalities for Demimartingales and Their Applications. *Science in China Series A: Mathematics*, **52**, 2207-2217. https://doi.org/10.1007/s11425-009-0067-x

[13] Marshall, A.W. (1960) A One-Sided Analog of Kolmogorov's Inequality. *The Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 483-487. https://doi.org/10.1214/aoms/1177705912

[14] Mu, J.Y. and Miao, Y. (2011) Generalizing the Marshall's Inequality. *Communications in Statistics Theory and Methods*, **40**, 2809-2817. https://doi.org/10.1080/03610926.2010.493276

[15] Hu, S.H., Wang, X.J. and Yang, W.Z. (2012) Some Inequalities for Demimartingales and N-Martingales. *Statistics and Probability Letters*, **82**, 232-239. https://doi.org/10.1016/j.spl.2011.10.021

[16] 冯德成, 王英, 李琴社. 弱(下)鞅的一类Marshall型不等式[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2018, 41(4): 495-499.

[17] 林正炎, 白志东. 概率不等式[M]. 北京: 科学出版社, 2007.