Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1827-1840
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111206

二次代数扩域上理想计数函数在短区间上的均值估计

朱爽爽

青岛大学，山东 青岛

收稿日期：2021年10月10日；录用日期：2021年11月15日；发布日期：2021年11月22日

摘 要

设 $\mathbb{K}$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 的二次代数扩张，$a_{\mathbb{K}}(n)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的理想计数函数，本文利用Selberg-Delange方法给出 $a_{\mathbb{K}}(n)^l$ 在短区间 $n\in[x,x+y]$ 上的均值估计如下：

$\sum\limits_{x<n\le x+y} a_{\mathbb{K}}(n)^l = y(\log x)^{2^{l-1}-1}\left\{\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(l)}{(\log x)^k}+O\left(R_N(x,y)\right)\right\}$，对于 $x^{1-\left(\frac{2^l}{3}+2\right)^{-1}}\le y\le x$ 一致成立，$R_N(x,y)=\frac{y}{x}\sum\limits_{k=1}^{N+1}\frac{k\left|\lambda_{k-1}(l)\right|}{(\log x)^k}+\frac{(c_1N+1)^{N+1}}{x^{\frac{c}{4}}}+M\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1}$，其中 c,c_1,c_2 均为与 ℓ 有关的常数。

关键词

理想计数函数，Selberg-Delange方法，二次域，短区间，均值估计

Mean Value Estimation of Ideal Counting Function in Short Interval over Quadratic Algebraic Extension Field

Shuangshuang Zhu

Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Oct. 10th, 2021; accepted: Nov. 15th, 2021; published: Nov. 22nd, 2021

文章引用: 朱爽爽. 二次代数扩域上理想计数函数在短区间上的均值估计[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1827-1840. DOI: 10.12677/pm.2021.1111206

Abstract

Let $\mathbb{K}$ be a quadratic algebraic extension of $\mathbb{Q}$, $a_{\mathbb{K}}(n)$ is an ideal counting function on $\mathbb{K}$. In this paper, we use the Selberg-Delange method to give the mean estimation of $a_{\mathbb{K}}(n)^l$ in a short interval as follows: $\sum_{x<n\le x+y} a_{\mathbb{K}}(n)^l = y(\log x)^{2^{l-1}-1}\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(l)}{(\log x)^k}+O(R_N(x,y))\right\}$, It is consistent for $x^{1-\left(\frac{2^l}{3}+2\right)^{-1}} \le y \le x$. $R_N(x,y)=\frac{y}{x}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{k|\lambda_{k-1}(l)|}{(\log x)^k}+\frac{(c_1N+1)^{N+1}}{x^{\frac{c}{4}}}+M\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1}$, where c, c_1, c_2 are constants related to ℓ.

Keywords

Ideal Counting Function, Selberg DeLange Method, Quadratic Domain, Short Interval, Mean Estimation

1. 引言

设 $\mathbb{K}$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 的 d 次 Galois 扩张，其上定义 Dedkind zeta 函数如下

$$\zeta_{\mathbb{K}}(s)=\sum_{\mathcal{A}}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathcal{A})^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{\mathbb{K}}(n)}{n^s},\ (\Re s>1),$$

其中 $a_{\mathbb{K}}(n)$ 是理想计数函数，即代数整数环 $\mathcal{R}$ 中范数为 n 的非零整理想个数；$\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ 为非零整理想 $\mathcal{A}$ 的范数。

基于算术函数取值分布往往不均匀的特点，数论学家们通常研究算术函数的均值分布问题。对于理想计数函数 $a_{\mathbb{K}}(n)$，1927 年，Landau [1]证明了对有理数域 $\mathbb{Q}$ 的 d 次代数扩张 $\mathbb{K}$，$d\ge 2$，有

$$\sum_{n\le x} a_{\mathbb{K}}(n)=cx+O\left(x^{1-\frac{2}{d+1}+\varepsilon}\right),$$

其中 c 是 $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ 在简单极点 $s=1$ 处的留数，$\varepsilon>0$ 是任意小的常数。

1993 年，Nowak [2]改进了 Landau 的结果，证明了对于扩张次数 $d\ge 3$ 的代数数域 $\mathbb{K}$，有

$$\sum_{n\le x} a_{\mathbb{K}}(n)=cx+\begin{cases} O\left(x^{1-\frac{2}{d}+\frac{8}{d(5d+2)}}\cdot(\log x)^{\frac{10}{5d+2}}\right), 3\le d\le 6,\\ O\left(x^{1-\frac{2}{d}+\frac{3}{2d^2}}\cdot(\log x)^{\frac{2}{d}}\right), d\ge 7.\end{cases}$$

2010 年，Lv 和 Wang [3]给出算术函数 $a_{\mathbb{K}}(n)^l$ 在 d 次代数扩域 $\mathbb{K}$ 上的长区间均值估计

$$\sum_{n\le x} a_{\mathbb{K}}(n)^l = xP_l(\log x) + O\left(x^{1-\frac{3}{d^l+6}+\varepsilon}\right), \quad l\ge 2,$$

其中 $P_l(\log x)$ 是关于 $\log x$ 的 $d^{l-1}-1$ 次多项式。

当 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的二次代数扩张时，2015 年，Zhai [4]利用解析的方法，给出

$$\sum_{n\le x} a_{\mathbb{K}}(n)^2 = B_0 x\log x + B_1 x + O\left(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^3\right),$$

其中 $B_0 = \frac{6}{\pi^2}L^2\left(1,\chi_{d(K)}\right)\prod_{p|d(K)}\frac{p}{p+1}$， $d(K)$ 是代数扩域 $\mathbb{K}$ 的判别式， $\chi_{d(K)}$ 是模 $d(K)$ 的非主实特征。

本文中，我们利用 Selberg-Delange 方法，将二次代数扩域上 $a_{\mathbb{K}}(n)^l$ 在长区间上的均值估计结果推广到了短区间，得到以下定理：

设 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的二次代数扩张， $a_{\mathbb{K}}(n)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的理想计数函数，则

$$\sum_{x<n\le x+y} a_{\mathbb{K}}(n)^l = y(\log x)^{2^{l-1}-1}\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(l)}{(\log x)^k} + O\left(R_N(x,y)\right)\right\}$$

对于 $x^{1-\left(\frac{2^l}{3}+\frac{5}{12}\right)^{-1}} \le y \le x$ 一致成立， $\lambda_k(l)$ 见(2.2)，

$$R_N(x,y) = \frac{y}{x}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{k\left|\lambda_{k-1}(l)\right|}{(\log x)^k} + \frac{(c_1N+1)^{N+1}}{x^{\frac{c}{4}}} + M\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1},$$

其中 c,c_1,c_2 均为与 ℓ 有关的常数。

2. 准备工作

为叙述方便，首先我们固定一些记号：

$\varsigma(s)$ 是 Riemann zeta 函数，其中 $s=\sigma+it$ 。

$L(s,\chi)$ 是 Dirichlet L-函数。

$\Gamma(s)$ 是 Gamma 函数。

ε 是任意小的正常数。

$\alpha>0,\delta\ge 0,A\ge 0,B>0,C>0,M>0$ 是常数。

为证明上述定理，我们引入一类特殊的 Dirichlet 级数：

设算术函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$，其 Dirichlet 级数

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} 。$$

如果 $F(s)$ 满足以下性质，则称 $F(s)$ 具有性质 $\mathcal{P}(B,C,\alpha,\delta,A,M)$ 。

(a) 对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\left|f(n)\right| \ll_{\varepsilon} Mn^{\varepsilon}, \quad (n\ge 1)。$$

其中 $M\ge 1$ 为常数。

(b) 存在 $\alpha>0$，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(n)\right|n^{-\sigma}\le M(\sigma-1)^{-\alpha}，\quad (\sigma>1)。$$

(c) Dirichlet 级数 $F(s)$ 有表达式：

$$F(s)=\zeta(s)^{z}L(s,\chi)^{\omega}G(s)$$

对 $|z|\le B,|\omega|\le C$ 一致成立，$G(s)$ 在 $\Re s\ge\sigma_0$ 上是全纯的且在该区域内满足上界估计

$$\left|G(s)\right|\le M\left(|t+1|\right)^{\max\{\delta(1-\sigma),0\}}\log^{A}\left(|t|+3\right)$$

定义 $a_{\mathbb{K}}(n)$ 对应的 Dirichlet 级数

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{\mathbb{K}}(n)^{l}}{n^{s}},$$

下面将证明 $F(s)$ 满足以上三条性质：

1963 年，Chandrasekharan 和 Narasimhan [5]证明了 $a_{\mathbb{K}}(n)$ 是乘性函数，且

$$a_{\mathbb{K}}(n)\ll d(n)^{d-1},$$

其中 $d(n)$ 是经典除数函数，指数 $d=[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$。又因为 $d(n)\ll n^{\varepsilon}$，因此

$$a_{\mathbb{K}}(n)\ll n^{\varepsilon}。$$

故 $a_{\mathbb{K}}(n)^{l}\ll n^{l\varepsilon}\ll n^{\varepsilon}$。(a)得证。

引理 2.1 设 $l\ge 2$ 为整数，$\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的 d 次伽罗瓦扩张且

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{\mathbb{K}}(n)^{l}}{n^{s}},$$

则

$$F(s)=\varsigma_{\mathbb{K}}(s)^{d^{l-1}}U_{l}(s),$$

$U_l(s)$ 是与 l 有关的 Dirichlet 级数且在 $\Re s\ge\frac{1}{2}$ 时绝对收敛。

证明：参见[6]中 Lemma1。

在二次代数扩域上，有 $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)=\varsigma(s)L(s,\chi)$，故二次代数扩域上有

$$F(s)=\varsigma_{\mathbb{K}}(s)^{2^{l-1}}U_{l}(s)=\varsigma(s)^{2^{l-1}}L(s,\chi)^{2^{l-1}}U_{l}(s)。$$

(c)得证。

根据引理 2.1，有 $F(s)=\varsigma(s)^{2^{l-1}}L(s,\chi)^{2^{l-1}}U_{l}(s)$，易知 $F(s)$ 在 $\Re s>1$ 时收敛。

故存在 $\alpha=1$，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{\mathbb{K}}(n)^{l}\right|n^{-\sigma}\le M(\sigma-1)^{-1}。$$

(b)得证。综上理想计数函数 $a_{\mathbb{K}}(n)^{l}$ 对应的 Dirichlet 级数满足 $\mathcal{P}(B,C,\alpha,\delta,A,M)$ 型。

下面进一步研究理想计数函数 $a_{\mathbb{K}}(n)^{l}$ 对应的 Dirichlet 级数 $F(s)$ 的解析性质。

因 $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 以 $s=1$ 为极点，构造函数

$$Z(s;l) := \left\{(s-1)\varsigma_{\mathbb{K}}(s)\right\}^{2^{l-1}},$$

易知 $Z(s;l)$ 在区域 $|s-1|<1-\hat{\beta}$ 内为全纯函数，记 $Z(s;l)$ 在 $s=1$ 点的泰勒展开式如下：

$$Z(s;l)=\sum_{j\geq 0}\frac{\gamma_j(l)}{j!}(s-1)^j,$$

其中 $\gamma_j(l)$ 是与 l 有关的整函数且满足对于任意 $A>0$，任意 $\varepsilon>0$，

$$\frac{\gamma_j(l)}{j!} \ll_{A,\varepsilon} \left(\frac{1}{1-\hat{\beta}}+\varepsilon\right)^j,\left(j\geq 0,|z|\leq A\right)。$$

在 $G(s;l)$ 的全纯区域，设 $G^k(s;l) := \frac{\partial^k}{\partial s^k}G(s;l)$，

$$\lambda_k(l) := \frac{1}{\Gamma\left(2^{l-1}-k\right)}\sum_{h+j=k}\frac{1}{h!\,j!}G^h(1;l)\gamma_j(l)$$

易知 $G(s;l)Z(s;l)$ 在 $|s-1|<\frac{1}{2}\left(1-\hat{\beta}\right)$ 内是全纯的，且有

$$\left|G(s;l)Z(s;l)\right| \ll M \tag{2.1}$$

将 $G(s;l)Z(s;l)$ 在 $s=1$ 点做泰勒展开：

$$G(s;l)Z(s;l)=F(s)(s-1)^{-2^{l-1}}=\sum_{k\geq 0}\mu_{k,l}(s-1)^k$$

其中

$$\mu_{k,l} := \frac{1}{k!}\sum_{h+j=k}\binom{k}{j}G^h(1;l)\gamma_j(l)=\Gamma\left(2^{l-1}-k\right)\lambda_k(l),\quad (k\in\mathbb{N}) \tag{2.2}$$

3. 预备引理

引理 3.1 (Perron 公式)

设级数 $F(s)=\sum_{n\geq 1}|a_n|\cdot n^{-s}$ 在 $\sigma>1$ 上绝对收敛，$|a(n)|\leq A(n)$，$A(n)>0$ 且单调不减，满足关系式

$$\sum_{n\geq 1}|a(n)|\cdot n^{-\sigma}=O\left((\sigma-1)^{-\alpha}\right),$$

对于 $1\leq b\leq b_0$，$T\geq 2$，$x=N+\frac{1}{2}$，存在 $\alpha>0$，对于 $\sigma\to 1^+$，有以下公式

$$\sum_{n\leq x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-it}^{b+it}F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right)+O\left(\frac{xA(2x)\ln x}{T}\right)。$$

证明：参见 Selberg [7]中 p. 334~336。

引理 3.2

设 $\mathbb{K}$ 是数域 $\mathbb{Q}$ 的 d 次代数扩张，有 $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 在带形区域内的上界估计如下：

$$\varsigma_{\mathbb{K}}(\sigma+it) \ll \left(1+|t|\right)^{\frac{d}{3}(1-\sigma)+\varepsilon},\quad \frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1+\varepsilon。$$

证明：参见 Heath-Brown [8]。

引理 3.3

记代数扩域 $\mathbb{K}$ 的判别式为 $d_{\mathbb{K}}$，若 $d_{\mathbb{K}}$ 足够大， $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 有非零区域：

$$\sigma \ge 1-\sigma_0(t)，\quad \sigma_0(t)=\frac{1}{12.55\log d_{\mathbb{K}}+9.69(\log|t|)r+3.03r+58.63}，\quad |t|\ge 1，$$

并且 $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 在区域

$$\sigma \ge 1-\frac{1}{12.74\log d(K)}，\quad |t|\le 1$$

内最多有一个零点，如果该零点存在则一定为简单实零点，定义其为 β_0。

引理 3.4

通常情况下，我们用 $N(\sigma,T)$ 和 $N_\chi(\sigma,T)$ 来表示 $\zeta(s)$ 和 $L(s,\chi)$ 在区域 $\Re s\ge\sigma$，$|\Im s|\le T$ 上的零点个数，存在常数 ψ 和 η，满足

$$N(\sigma,T)\ll T^{\psi(1-\sigma)}(\log T)^{\eta}，\quad N_\chi(\sigma,T)\ll T^{\psi(1-\sigma)}(\log T)^{\eta}，$$

Huxley [9]证明了 $\psi=\frac{5}{12},\eta=9$。

引理 3.5 (Hankel 围道)

对每个正参数 r，移除 $s=-r$ 的圆环加上起点为 $1-r$ 辐角分别为 π 和 $-\pi$ 的双重射线构成 Hankel 围道，记为 H。对于任意复数 z，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{H(X)} s^{-z}\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s=\frac{1}{\Gamma(z)}+O\left(47^{|z|}\Gamma(1+|z|)\mathrm{e}^{-\frac{X}{2}}\right)。$$

证明：参见[10]中 184 页定理 2。

4. 定理的证明

根据引理 3.1，令 $a_n=a_{\mathbb{K}}(n)^l$， $A(n)\equiv 1$， $b=1+\frac{2}{\log x}$， $\alpha=1$，可得

$$\sum_{x<n\le x+y} a_{\mathbb{K}}(n)^l=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F(s)\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right)。$$

取 $100\le T\le x$ 且满足当 $0<\sigma<1$ 时， $\varsigma_{\mathbb{K}}(\sigma+iT)\ne 0$。

根据留数定理，可将积分线段 $[b-iT,b+iT]$ 转化为连接两端点的任意路径。这里选择关于实轴对称的路径，记为围道 ℓ。它由以下五部分组成：

第一部分由两条水平线段 $\left[\frac{1}{2}+\varepsilon+iT,b+iT\right]$， $\left[\frac{1}{2}+\varepsilon-iT,b-iT\right]$ 构成。记为 ℓ_1 和 ℓ_6。

在二次代数扩域上 $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 可能存在实零点，如果实零点存在不妨记为 β_0，此时我们选取以下围道将实零点绕出，记为围道第二部分：该围道路径的上半部分由包围点 $s=\beta_0$ 且半径为 $r=\frac{1}{\log x}$ 的圆弧与连接 $\left(\beta_0-\frac{1}{\log x},t\right)$ 到 $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,t\right)(t\to 0)$ 的线段组成，记为 ℓ_3，关于实轴对称的下半部分记为 ℓ_4。

第三部分由 Hankel 围道构成，围道上半部分路径由包围 $s=1$ 且半径为 $r=\frac{1}{\log x}$ 的圆弧与连接

$(1-r,\pm it)$ 到 $\left(\tilde{\beta},\pm it\right)$ $(t\to 0)$ 的线段组成。记第三部分围道为 Γ，其中

$$\tilde{\beta}=\begin{cases}\beta_0+r_1,\varsigma_{\mathbb{K}}(s)\text{有实零点,}\\ \dfrac{1}{2}+\varepsilon,\varsigma_{\mathbb{K}}(s)\text{没有实零点.}\end{cases}\tag{4.1}$$

第四部分将 $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 的非显然零点圈出。记非显然零点 $\rho=\beta+i\gamma$，$\beta>\dfrac{1}{2}+\varepsilon$，$0<|\gamma|<T$，我们选取贴近直线段 $s=\sigma+i\gamma$ 的矩形将非显然零点全部圈出，同时要保证围道 ℓ 的封闭性，记这部分围道为 ℓ_ρ。

第五部分由两条被切断的竖直线段构成，这两条竖直线段分别为 $\left[\dfrac{1}{2}+\varepsilon,\dfrac{1}{2}+\varepsilon+iT\right]$，$\left[\dfrac{1}{2}+\varepsilon,\dfrac{1}{2}+\varepsilon-iT\right]$，其中切断部分是为了保证围道的封闭性，记该部分围道上半部分为 ℓ_2，下半部分为 ℓ_5，则

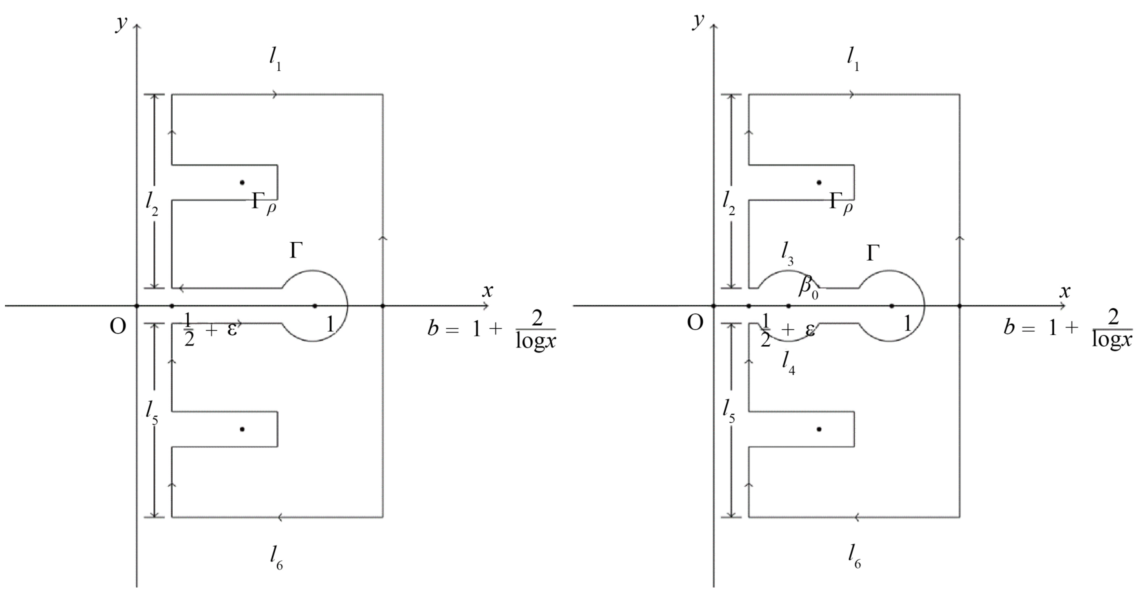
$$\sum_{x<n\le x+y}a_{\mathbb{K}}(n)^l=I+I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_\rho+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right)\tag{4.2}$$

此处

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(s)\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\mathrm{d}s\tag{4.3}$$

$$I_\rho=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} F(s)\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\mathrm{d}s$$

$$I_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j} F(s)\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\mathrm{d}s$$



A. I 的估计：

取 $0<c<\dfrac{1}{10}\left(1-\hat{\beta}\right)$ 为常数。根据(2.1)，$G(s;l)Z(s;l)$ 在区域 $|s-1|\le c$ 内是全纯函数，

$\mu_{k,l}$ 定义如(2.2)，由 Cauchy 公式，

$$\mu_{k,l}=\frac{\left(G(1,l)Z(1,l)\right)^{(k)}}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|s-1|=c}\frac{G(s,l)Z(s,l)}{(s-1)^{k+1}}\mathrm{d}s\text{，}$$

利用绝对值不等式，

$$\mu_{k,l}\ll\frac{1}{2\pi i}\oint_{|s-1|=c}\left|\frac{G(s,l)Z(s,l)}{(s-1)^{k+1}}\right||\mathrm{d}s|\ll\frac{M}{2\pi c^{k+1}}\oint_{|s-1|=c}|\mathrm{d}s|=Mc^{-k}\text{。}$$

因此

$$G(s,l)Z(s,l)=\sum_{0\le k\le N}\mu_{k,l}M_k(x,y)+O\left(M\left(|s-1|/c\right)^{N+1}\right)\text{。}$$

代入(4.3)，有

$$I=\sum_{0\le k\le N}\mu_{k,l}M_k(x,y)+O\left(Mc^{-N}E_N(x,y)\right)\tag{4.4}$$

其中

$$M_k(x,y):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(s-1)^{k-2^{l-1}}\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\mathrm{d}s\text{，}$$

$$E_N(x,y):=\int_{\Gamma}\left|(s-1)^{N+1-2^{l-1}}\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\right||\mathrm{d}s|\text{。}$$

下面估计 $M_k(x,y)$：
根据公式

$$\frac{(x+y)^s-x^s}{s}=\int_x^{x+y}t^{s-1}\mathrm{d}t\text{，}$$

$$M_k(x,y)=\int_x^{x+y}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(s-1)^{k-2^{l-1}}t^{s-1}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\text{。}$$

做变量替换 $\omega=(s-1)\log t$，则 $t^{s-1}=\mathrm{e}^{(s-1)\log t}=\mathrm{e}^{\omega}$，根据引理 3.5，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(s-1)^{k-2^{l-1}}t^{s-1}\mathrm{d}s&=\frac{1}{2\pi i}\int_{H\left(\frac{c}{2}\log t\right)}\mathrm{e}^{\omega}\omega^{k-2^{l-1}}(\log t)^{2^{l-1}-k}\frac{1}{\log t}\mathrm{d}\omega\\&=(\log t)^{2^{l-1}-k-1}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(2^{l-1}-k\right)}+O\left(47^{\left|2^{l-1}-k\right|}\Gamma\left(1+\left|2^{l-1}-k\right|\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\log t}\right)\right\}\\&=(\log t)^{2^{l-1}-1-k}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(2^{l-1}-k\right)}+O\left((c_1k+1)^k t^{-\frac{c}{4}}\right)\right\}\end{aligned}$$

其中 c_1 是与 l 有关的常数。故

$$M_k(x,y)=\int_x^{x+y}(\log t)^{2^{l-1}-1-k}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(2^{l-1}-k\right)}+O\left((c_1k+1)^k t^{-\frac{c}{4}}\right)\right\}\mathrm{d}t\tag{4.5}$$

作变量替换 $t'=t-x$，则

$$\begin{aligned}\int_x^{x+y}(\log t)^{2^{l-1}-k-1}\mathrm{d}t &= \int_0^y \log^{2^{l-1}-k-1}(x+t')\mathrm{d}t' \\ &= \int_0^y \log^{2^{l-1}-k-1}(x+t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^y \log^{2^{l-1}-k-1}\left(\frac{x+t}{x}\cdot x\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.6}$$

进一步利用 $\log(1+x)$ 的泰勒展开，

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x+t}{x}\cdot x\right)^{2^{l-1}-k-1} &= \left(\log\left(1+\frac{t}{x}\right)x\right)^{2^{l-1}-1-k} = \left(\log\left(1+\frac{t}{x}\right)+\log x\right)^{2^{l-1}-1-k} \\ &= \left(\frac{t}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{x}\right)^2+O\left(\frac{t^2}{x^2}\right)+\log x\right)^{2^{l-1}-1-k}\end{aligned} \tag{4.7}$$

对(4.7)作幂级数展开并代入(4.6)做积分，得

$$\begin{aligned}\int_x^{x+y}(\log t)^{2^{l-1}-k-1}\mathrm{d}t &= \log x^{2^{l-1}-k-1}y+\frac{\log x^{2^{l-1}-k-2}}{x}\int_0^y t\mathrm{d}t+\frac{\log x^{2^{l-1}-k-3}}{x^2}\int_0^y t^2\mathrm{d}t+\cdots \\ &= y(\log x)^{2^{l-1}-1-k}\left\{1+O\left(\frac{(k+1)y}{x\log x}\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.8}$$

结合(4.5)，(4.8)，得

$$M_k(x,y)=y(\log x)^{2^{l-1}-1-k}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(2^{l-1}-k\right)}+O\left(\frac{(k+1)y}{\Gamma\left(2^{l-1}-k\right)x\log x}+\frac{(c_1k+1)^k}{x^{\frac{c}{4}}}\right)\right\} \tag{4.9}$$

下面将估计 $E_N(x,y)$：

$$E_N(x,y)\ll\int_{\tilde{\beta}}^{1-\frac{1}{\log x}}(1-\sigma)^{N+1-2^{l-1}}x^{\sigma-1}y\mathrm{d}\sigma+\int_{\Gamma_0}\left|(s-1)^{N+1-2^{l-1}}\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\right||\mathrm{d}s|,$$

其中 $\tilde{\beta}$ 的定义见(4.1)，Γ_0 表示 Hankel 围道的圆周部分，在 Γ_0 上有 $r=\dfrac{1}{\log x}$，$s-1=\mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{1}{\log x}$，$\theta\in(-\pi,\pi)$，$\sigma-1=\dfrac{1}{\log x}\cos\theta$，

$$x^{\sigma-1}=x^{\frac{\cos\theta}{\log x}}=\mathrm{e}^{\frac{\cos\theta}{\log x}\log x}=\mathrm{e}^{\cos\theta}。$$

且有

$$|\mathrm{d}s|=\left|\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\frac{1}{\log x}+1\right)\right|=\left|i\mathrm{e}^{i\theta}\frac{1}{\log x}\mathrm{d}\theta\right|=\frac{1}{\log x}\mathrm{d}\theta,$$

$$\left|\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\right|=\left|\int_x^{x+y}t^{s-1}\mathrm{d}t\right|\ll\int_x^{x+y}\left|t^{s-1}\right|\mathrm{d}t\ll yx^{\sigma-1},$$

因此

$$\int_{\Gamma_0}\left|(s-1)^{N+1-2^{l-1}}\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\right||\mathrm{d}s| \ll yx^{\sigma-1}\int_{\Gamma_0}\left|(s-1)^{N+1-2^{l-1}}\right||\mathrm{d}s|$$

$$\ll yx^{\frac{1}{\log x}\cos\theta}\int_0^{2\pi}\left|\left(\frac{1}{\log x}\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{N+1-2^{l-1}}\right|\frac{1}{\log x}\mathrm{d}\theta \tag{4.10}$$

$$\ll \frac{y}{(\log x)^{N+2-2^{l-1}}}$$

令 $1-\sigma=t$，

$$\int_{\tilde{\beta}}^{1-\frac{1}{\log x}}(1-\sigma)^{N+1-2^{l-1}}x^{\sigma-1}y\mathrm{d}\sigma=-\int_{1-\tilde{\beta}}^{\frac{1}{\log x}}t^{N+1-2^{l-1}}x^{-t}y\mathrm{d}t \tag{4.11}$$

令 $t=\frac{u}{\log x}$，$1-\tilde{\beta}<1-\frac{1}{2}$，得

$$\ll \frac{y}{(\log x)^{N+2-2^{l-1}}}\int_1^{\infty}u^{N+1-2^{l-1}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$\ll \frac{y}{(\log x)^{N+2-2^{l-1}}}\int_0^{\infty}u^{N+1-2^{l-1}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{y}{(\log x)^{N+2-2^{l-1}}}\Gamma\left(N+2-2^{l-1}\right)$$

由 Stirling 公式，

$$\ll \frac{y}{(\log x)^{N+2-2^{l-1}}}(c_1N+1)^{N+1} \tag{4.12}$$

结合(4.10)，(4.12) 可得：

$$E_N(x,y)\ll y(\log x)^{2^{l-1}-1}\left(\frac{c_1N+1}{\log x}\right)^{N+1} \tag{4.13}$$

对于 $x\geq y\geq 2$ 一致成立。

将(4.9)，(4.13)代入到(4.4)，结合(2.2)得

$$I=y(\log x)^{2^{l-1}-1}\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(l)}{(\log x)^k}+O\left(E_N^*(x,y)\right)\right\} \tag{4.14}$$

$E_N^*(x,y)$ 的表达式如下：

$$E_N^*(x,y)=\frac{y}{x}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{k|\lambda_{k-1}(l)|}{(\log x)^k}+\frac{(c_1N+1)^{N+1}}{x^{\frac{c}{4}}}+M\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1}$$

其中 c,c_1,c_2 均为与 l 有关的常数。

B. I_1 与 I_6 的估计：

在 I_1 与 I_6 上有 $s=\sigma\pm iT$，其中 $\sigma\in\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,1+\frac{2}{\log x}\right)$。

根据引理 3.2，在二次代数扩域上，当$\frac{1}{2}\le\sigma\le 1+\varepsilon$时有

$$\varsigma_{\mathbb{K}}(\sigma+it)\ll(1+|t|)^{\frac{2}{3}(1-\sigma)+\varepsilon},$$

故

$$F(s)=\varsigma_{\mathbb{K}}(s)^{2^{l-1}}U_l(s)\ll MT^{\frac{2^l}{3}(1-\sigma)+\varepsilon}。$$

因此

$$|I_1|+|I_6|\ll\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1+\frac{2}{\log x}}T^{\frac{2^l}{3}(1-\sigma)+\varepsilon}\frac{x^{\sigma}}{T}\mathrm{d}\sigma。$$

考虑$T^{\frac{2^l}{3}}\le x$，得

$$|I_1|+|I_6|\ll\frac{x^{1+\varepsilon}}{T} \tag{4.15}$$

C. I_2 和 I_5 的估计

对于 $s=\frac{1}{2}+\varepsilon+it$， $\varsigma_{\mathbb{K}}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+it\right)\ne 0$， $0\le|t|\le T$， 有

$$F(s)\ll(1+|t|)^{\frac{2^{l-1}}{3}+\varepsilon}。$$

因此

$$\begin{aligned}|I_2|+|I_5|&\ll\int_0^T(1+|t|)^{\frac{2^{l-1}}{3}+\varepsilon}\frac{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{|t|}\mathrm{d}t\\&\ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\int_0^T(1+|t|)^{-1+\frac{2^{l-1}}{3}+\varepsilon}\mathrm{d}t\\&\ll x^{\frac{1}{2}}T^{\frac{2^{l-1}}{3}+\varepsilon}\end{aligned} \tag{4.16}$$

D. I_3 和 I_4 的估计：

设 β_0 是 $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 的一阶零点，有

$$\varsigma_{\mathbb{K}}(s)=(s-\beta_0)V(s)，\ V(\beta_0)\ne 0。$$

取$|s-\beta_0|\le 2r_1$， $r_1=\frac{1}{\log x}$， 对$V(s)^{2^{l-1}}U(s)$在$s=\beta_0$处做泰勒展开，有

$$V(s)^{2^{l-1}}U(s)=C(\beta_0)+O(|s-\beta_0|),$$

$C(\beta_0)$是与β_0有关的常数。因此

$$I_3+I_4=\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_3\cup\ell_4}F(s)\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\mathrm{d}s=M(x,y)+O(E(x,y)),$$

其中

$$M(x,y):=\frac{C(\beta_0)}{2\pi i}\int_{\ell_3\cup\ell_4}(s-\beta_0)^{2^{l-1}}\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\mathrm{d}s,$$

$$E(x,y):=\int_{\ell_3\cup\ell_4}\left|\left(s-\beta_0\right)^{2^{l-1}+1}\frac{(x+y)^s-x^s}{s}\right||\mathrm{d}s|\text{。}$$

记在上半圆部分积分值为 M_1，直线段部分积分值为 M_2，则

$$M(x,y)=2\left(M_1(x,y)+M_2(x,y)\right),$$

在上半圆部分，沿圆周

$$s-\beta_0=\frac{1}{\log x}\mathrm{e}^{i\theta},\quad \theta\in(0,\pi),\quad s=\sigma+it=\frac{1}{\log x}(\cos\theta+i\sin\theta)+\beta_0,$$

$$|\mathrm{d}s|=\left|\frac{1}{\log x}\mathrm{d}(\cos\theta+i\sin\theta)\right|=\left|\frac{1}{\log x}(-\sin\theta+i\cos\theta)\right|\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\log x}\mathrm{d}\theta\text{。}$$

此时

$$\left|s-\beta_0\right|^{2^{l-1}}=\left(\frac{1}{\log x}\right)^{2^{l-1}},$$

$$\begin{aligned}M_1(x,y)&\ll\int_0^\pi\left(\frac{1}{\log x}\right)^{2^{l-1}+1}yx^{\sigma-1}\mathrm{d}\theta\\&=\left(\frac{1}{\log x}\right)^{2^{l-1}+1}y\int_0^\pi x^{\frac{\cos\theta}{\log x}+\beta_0-1}\mathrm{d}\theta\text{。}\\&\ll\left(\frac{1}{\log x}\right)^{2^{l-1}+1}\frac{y}{x^{1-\beta_0}}\end{aligned}$$

$$M_2(x,y)\ll\frac{C(\beta_0)}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{\beta_0-\frac{1}{\log x}}\left(\sigma-\beta_0\right)^{2^{l-1}}yx^{\sigma-1}\mathrm{d}\sigma\ll\left(\frac{1}{\log x}\right)^{2^{l-1}+1}\frac{y}{x^{1-\beta_0}}\text{。}$$

综上：

$$M(x,y)\ll\left(\frac{1}{\log x}\right)^{2^{l-1}+1}\frac{y}{x^{1-\beta_0}},$$

$$E(x,y)\ll\left(\frac{1}{\log x}\right)^{2^{l-1}+2}\frac{y}{x^{1-\beta_0}}\text{。}$$

因此

$$|I_3|+|I_4|\ll\frac{y}{x^{1-\beta_0}}\frac{1}{(\log x)^{2^{l-1}+1}}\tag{4.17}$$

E. I_ρ 处的估计：

记 $F(s)$ 的非显然零点 $\rho=\beta+i\gamma$，根据 B，对于 $\frac{1}{2}+\varepsilon\le\sigma\le\beta<1-\sigma_0(\gamma)$，当 $s=\sigma+i\gamma$ 时，

$$F(s)\ll M|\gamma|^{\frac{2^l}{3}(1-\sigma)+\varepsilon},$$

$$\left|I(\rho)\right| \ll \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{\beta} M\left|\gamma\right|^{\frac{2^l}{3}(1-\sigma)+\varepsilon} yx^{\sigma-1}\mathrm{d}\sigma \text{。}$$

根据引理 3.3，$\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 的非零区域为 $\sigma \ge 1-\sigma_0(t)$，

在二次代数扩域上，$\varsigma_{\mathbb{K}}(s)=\zeta(s)L(s,\chi)$，

故 $\varsigma_{\mathbb{K}}(s)$ 在 $\Re s \ge \sigma$，$\left|\Im s\right| \le T$ 上的全部非显然零点个数

$$N_{\mathbb{K}}(\sigma,T) \le N(\sigma,T)+N_{\chi}(\sigma,T) \ll T^{\frac{5}{12}(1-\sigma)}(\log T)^9,$$

$$\sum_{\substack{\beta>\frac{1}{2}+\varepsilon \\ |\gamma|<T}} \left|I_\rho\right| \ll My\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1-\sigma_0(T)} \left(\frac{T^{\frac{2^l}{3}}}{x}\right)^{1-\sigma} N_{\mathbb{K}}(\sigma,T)\mathrm{d}\sigma \text{。}$$

由引理 3.4，考虑 $T \le x^{-\left(\frac{2^l}{3}+\frac{5}{12}\right)}$，

$$\sum_{\substack{\beta>\frac{1}{2}+\varepsilon \\ |\gamma|<T}} \left|I_\rho\right| \ll Myx^{\varepsilon}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1-\sigma_0(T)} \left(\frac{T^{\frac{2^l}{3}+\frac{5}{12}}}{x}\right)^{1-\sigma} \mathrm{d}\sigma \ll yx^{\varepsilon}\left(\frac{T^{\frac{2^l}{3}+\frac{5}{12}}}{x}\right)^{\sigma_0(T)} \tag{4.18}$$

将(4.14)，(4.15)，(4.16)，(4.17)，(4.18)代入(4.2)，得

$$\sum_{x<n\le x+y} a_{\mathbb{K}}(n)^l = y(\log x)^{2^{l-1}-1}\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(l)}{(\log x)^k}+O\left(E_N^*(x,y)\right)\right\}+R_T(x,y),$$

其中

$$R_T(x,y) := \frac{x^{1+\varepsilon}}{T}+x^{\frac{1}{2}}T^{\frac{2^{l-1}}{3}+\varepsilon}+\frac{y}{x^{1-\beta_0}}\frac{1}{(\log x)^{2^{l-1}+1}}+yx^{\varepsilon}\left(\frac{T^{\frac{2^l}{3}+\frac{5}{12}}}{x}\right)^{\sigma_0(T)} \text{。}$$

取 $T = x^{-\left(\frac{2^l}{3}+\frac{5}{12}\right)}$，定理得证。

致 谢

本篇论文感谢杨志善老师的指导以及论文相关编辑的帮助。

参考文献

[1] Landau, E. (1927) Einfvhrung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Teubner.

[2] Nowak, W.G. (1993) On the Distribution of Integer Ideals in Algebraic Number Fields. *Mathematische Nachrichten*, **161**, 59-74. https://doi.org/10.1002/mana.19931610107

[3] Lv, G.S. and Wang, Y.H. (2010) Note on the Number of Integral Ideals in Galois Extensions. *Science China Mathematics*, **53**, 2417-2424. https://doi.org/10.1007/s11425-010-4091-7

[4] Zhai, W.G. (2015) Asymptotics for Class of Arithmetic Functions. *Acta Arithmetica*, **170**, 135-160. https://doi.org/10.4064/aa170-2-3

[5] Chandrasekharan, K. and Narasimhan, R. (1963) The Approximate Function Equation for a Class of Zeta-Functions. *Mathematische Annalen*, **152**, 30-64. https://doi.org/10.1007/BF01343729

[6] Chandraseknaran, K. and Good, A. (1983) On the Number of Integral Ideals in Galois Extensions. *Monatshefte für Mathematik*, **95**, 99-109. https://doi.org/10.1007/BF01323653

[7] Selberg, A. (1954) Note on the Paper by L. G. Sathe. *The Journal of the Indian Mathematical Society*, **18**, 83-87.

[8] Heath-Brown, D.R. (1988) The Growth Rate of the Dedekind Zeta Function on the Critical Line. *Acta Arithmetica*, **49**, 323-339. https://doi.org/10.4064/aa-49-4-323-339

[9] Huxley, M.N. (1972) The Difference between Consecutive Primes. *Inventiones Mathematicae*, **267**, 164-170. https://doi.org/10.1007/BF01418933

[10] Tenebaum, G. (1995) Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory. Cambridge University Press, Cambridge.