Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1911-1917
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111213

Mycielskian图的全控制着色数

杨 雪[1*]，边 红[1†]，于海征[2]，魏丽娜[1]

[1]新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]新疆大学数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2021年10月16日；录用日期：2021年11月16日；发布日期：2021年11月24日

摘 要

令图 $G=(V,E)$ 是一个有限的简单的连通无向图。图 G 的全控制着色是 G 的一个正常点着色，使得图 G 中每个顶点的开领域至少包含一种颜色类，且每个颜色类至少被一个顶点所控制。图 G 的全控制着色数是其全控制着色中所使用最少的颜色数，记为 $\chi_{td}(G)$。本文首先利用任意图 G 的全控制着色数给出了图 G 的 **Mycielskian** 图的全控制着色数的上、下界；进而给出了一些特殊图类的 **Mycielskian** 图的全控制着色数的确切值。

关键词

全控制着色，全控制幻着色数，**Mycielskian** 图

The Total Domination Chromatic Numbers of Mycielskian Graphs

Xue Yang[1*], Hong Bian[1†], Haizheng Yu[2], Lina Wei[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
[2]College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Oct. 16th, 2021; accepted: Nov. 16th, 2021; published: Nov. 24th, 2021

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 杨雪, 边红, 于海征, 魏丽娜. Mycielskian图的全控制着色数[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1911-1917.
DOI: 10.12677/pm.2021.1111213

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple, connected, finite and undirected graph. A total domination coloring of a graph G is a proper coloring of G in which open neighbourhood of each vertex contains at least one color class and each color class is dominated by at least one vertex. The total domination chromatic number of G, denoted by $\chi_{td}(G)$, is the minimum number of colors required for a total domination coloring of G. In this paper, we present the upper and lower bounds of total domination chromatic numbers of Mycielskian graph of arbitrarily graph, and obtain exactly values of the total domination chromatic numbers of Mycielskian graphs of some special graphs.

Keywords

Total Domination Coloring, Total Domination Chromatic Number, Mycielskian Graphs

1. 介绍

本文中所考虑的图都是有限、简单连通图. 令 $G = (V, E)$ 是一个简单图. 图 G 的任一顶点 v 的开领域是与点 v 相邻的点的集合, 记为 $N_G(v)$. 类似地, 图 G 的任一顶点 v 的闭领域是点 v 和与点 v 相邻的点的集合, 记为 $N_G[v]$, 且 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. 明显看出 $N_G[v]$ 的任一子集都被点 v 所控制.

n 个点的路、圈分别记为 P_n, C_n, $n+1$ 个点的星图记为 S_n. 轮图是一个点数为 $n+1$, 边数为 $2n$ 的简单图, 记为 W_n, 它是通过将 C_n 的每个顶点与一个外部的顶点相连而得到的图. 扇图是轮图 W_n 删去其圈 C_n 上的一条边得到的图, 记为 F_n. 友谊图是一个点数为 $2n+1$, 边数为 $3n$ 的简单图, 记为 $\mathcal{F}_n$, 它是有一个公共顶点的 n 个三角形所组成的图. $\overline{G}$ 代表图 G 的补图.

图的着色也是图论中一个有趣的研究领域. 在图的着色中, 根据预先定义的一些条件给图的点、边或两者同时着色. 在图 G 的一个正常点着色中, 对顶点进行着色, 使相邻的顶点得到不同的颜色, 使得图 G 的相邻顶点得到互异颜色的着色所需的最小颜色数称为图 G 的点着色数, 记为 $\chi(G)$. 图 G 中所有具有相同颜色的顶点的集合称为图 G 的颜色类. 在本文中, 用 i 表示一个顶点的颜色, 用 V_i

表示颜色类, V_i 是具有颜色 i 的点的集合. 从图的控制性质对图进行着色有多种方法, 最先有的是图的控制者着色, 这个定义是由 Gera 等人 [1]在 2006 年首次提出的. 图 G 的控制者着色是一个正常点着色使得图 G 的每个顶点控制至少一个颜色类. 图 G 的控制者着色数是其所有控制者着色中使用最少的颜色数, 记为 $\chi_d(G)$. 其次, 2015 年, Kazemi 等人 [2]介绍并研究了图的全控制者着色. 图 G 的全控制者着色是一个正常点着色, 对于图 G 的任一顶点 v, 使得除了 v 点所着的颜色类之外, 点 v 还控制至少一个颜色类. 换言之, 全控制者着色是图的一个控制者着色使得图的任一顶点 v 控制的颜色类是点 v 的开领域 $N_G(v)$ 的子集. 图 G 的全控制者着色数,记为 $\chi_d^t(G)$, 表示图 G 的所有全控制者着色中使用最少的颜色数. 2019 年, Zhuo 和 Zhao [3]研究了图的控制着色. 图的控制着色是一个控制者着色, 且满足每个颜色类至少被一个点所控制. 类似地, 图的控制着色数是其控制着色中所使用最少的颜色数, 用 $\chi_{dd}(G)$ 表示. 2021 年, Chithra 等人 [4]首次介绍了图的全控制着色. 图 G 的全控制着色是图 G 的一个控制着色使得图 G 的任一顶点 v 控制的颜色类是点 v 的开领域 $N_G(v)$ 的子集. 图 G 的全控制着色数是所有全控制着色中所使用的最少的颜色数, 记为 $\chi_{td}(G)$. Chithra 等人 [4]研究了一些特殊图类的全控制着色数, 如: 路 P_n, 路的补图 $\overline{P_n}$, 圈 C_n 和圈的补图 $\overline{C_n}$ 等等.

Mycielskian [5]于 1995 年提出了一种有趣的图变换, 由图 G 经过一种变换得到的一个新图, 称之为图 G 的 Mycielskian 图, 记为 $\mu(G)$. 定义如下: 令 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为图 G 的顶点集, $V'(G) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是图 G 的顶点集对应的拷贝点集, 其中 x_i 是 v_i 的拷贝点$(1 \le i \le n)$, u 称为 $\mu(G)$ 的根点. Mycielskian 图的顶点是 $V(\mu(G)) = V(G) \cup V'(G) \cup \{u\}$, 边集为 $E(\mu(G)) = E(G) \cup \{v_i x_j | v_i v_j \in E(G), 1 \le i \le n\} \cup \{x_i u | x_i \in V'(G), 1 \le i \le n\}$. 若 f 是图 G 的一个全控制着色使用了 $V_1, V_2, \cdots, V_t$ 个颜色类, 使得任一个颜色类 V_i 中的每个顶点都着颜色 $i\,(1 \le i \le t)$, 简写成 $f = (V_1, V_2, \cdots, V_t)$. 在本文中, 图 G 的顶点集的拷贝点集 $V'(G)$ 简写成 X, 根点的集合 $\{u\}$ 简写成 U.

本文首先利用任意图 G 的全控制着色数给出了图 G 的 Mycielskian 图的全控制着色数的上、下界; 进而给出了一些特殊图类的 Mycielskian 图的全控制着色数的确切值.

2. 主要结果

给定一个图 G, 若已知图 G 的全控制着色数, 则可得到图 G 的 Mycielskian 图的全控制着色数的上、下界.

定理 2.1 给定任一图 G, $\delta(G) \ge 1$, 其全控制着色数为 $\chi_{td}(G)$, 则 $\chi_{td}(G) + 1 \le \chi_{td}(\mu(G)) \le \chi_{td}(G) + 2$.

证明 假设 $\chi_{td}(G) = t$. 令 $f = (V_1, V_2, \cdots, V_t)$ 是图 G 的一个全控制着色. 首先考虑 G 的 Mycielskian 图 $\mu(G)$ 的全控制着色数的上界. 明显地, $g = (V_1, V_2, \cdots, V_t, X, U)$ 是图 $\mu(G)$ 的一个全控制着色, 则 $\chi_{td}(\mu(G)) \le \chi_{td}(G) + 2$. 再讨论图 $\mu(G)$ 的全控制着色数的下界. 在图 $\mu(G)$ 中顶点 u 的开领域是 $N_{\mu(G)}(u) = X$, 根据全控制着色的定义必然有一个顶点 $x_i \in X$ 着新颜色使得点 u 控制这个颜色类. 因此 $\chi_{td}(\mu(G)) \ge \chi_{td}(G) + 1$, 得证. □

下文给定一些特殊图类的 Mycielskian 图的全控制着色数的确切值. 首先由 Chithra 等人在文献 [4]中路的全控制着色数可得路的 Mycielskian 图的全控制着色数.

引理 2.2 [4] 当 $n \ge 3$时, $\chi_{td}(P_n) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

定理 2.3 当 $n \ge 3$ 时，

$$\chi_{td}(\mu(P_n)) = \begin{cases} 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1, & \text{当 } n \equiv 1\,(mod\ 3) \text{ 时}, \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2, & \text{其它}. \end{cases}$$

证明 设 $\{v_i|1 \le i \le n\}$ 是路 P_n 的点集，$\{v_iv_{i+1}|1 \le i \le n-1\}$ 是路 P_n 的边集. 由定理 2.1 和引理 2.2 可得 $\chi_{td}(\mu(P_n)) \ge 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. 分以下两种情形讨论路的 Mycielskian 图的全控制着色数的上界:

情形 1 $n \equiv 1 \pmod 3$

当 $n = 4$ 时，$\chi_{td}(\mu(P_4)) \ge 2\lceil \frac{4}{3} \rceil + 1 = 5$. 图 $\mu(P_4)$ 的全控制着色使用了 5 个颜色(如图 1所示)，故 $\chi_{td}(\mu(P_4)) = 5$. 由引理 2.2 可得 $\chi_{td}(\mu(P_4)) = \chi_{td}(P_4) + 1$.

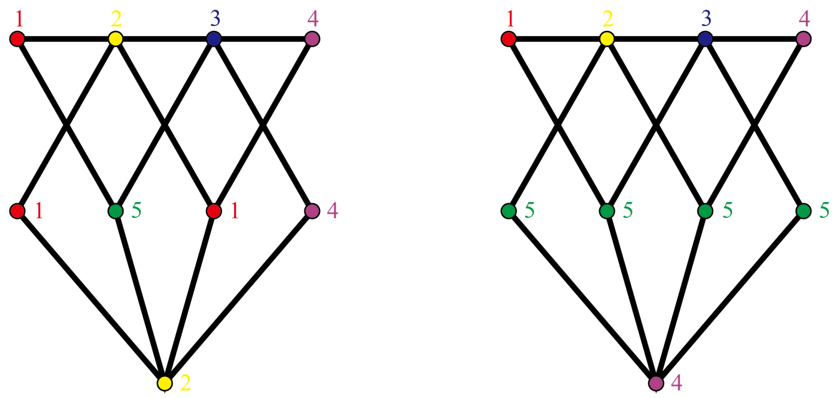

Figure 1. The total domination coloring of $\mu(P_4)$
图 1. $\mu(P_4)$ 的全控制着色

当 $n \ge 7$ 时，令 $n = 3t+1$. 由引理 2.2 知 $\chi_{td}(P_n) = 2\lceil \frac{3t+1}{3} \rceil = 2t+2$, 设 $f_1 = (V_1, V_2, \cdots, V_{2t-1}, V_{2t}, V_{2t+1}, V_{2t+2})$ 是图 P_n 的一个全控制着色满足点 $v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}$, v_n 分别着颜色为 $2t-1, 2t, 2t+1, 2t+2$, 则 $g_1 = (V_1, V_2, \cdots, V_{2t-1}, V_{2t}, V_{2t+1}, V_{2t+2} \cup U, X)$是图 $\mu(P_n)$ 的一个全控制着色且使用了 $2t+3$ 个颜色，因此 $\chi_{td}(\mu(P_n)) \le 2t+3$, 故 $\chi_{td}(\mu(P_n)) \le \chi_{td}(P_n) + 1$.

情形 2 $n \equiv 0, 2 \pmod 3$

由定理 2.1 可知 $\chi_{td}(\mu(P_n)) \le 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2$. 要证 $\chi_{td}(\mu(P_n)) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2$, 只需证 $\chi_{td}(\mu(P_n)) \ne 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$.

假设 $\chi_{td}(\mu(P_n)) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. 易知存在一个点 $x_i \in X$ 着新颜色 $2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$, 那么图 $\mu(P_n)$ 的根点 u 必着某一个颜色 $l\,(1 \le l \le 2\lceil \frac{n}{3} \rceil)$. 在这种情形下，存在一点没有控制任何一个颜色类，矛盾. 故 $\chi_{td}(\mu(P_n)) \ge 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2$, 得证. □

下面的引理是 Chithra 等人在文献 [4] 中给的圈的全控制着色数.

引理 2.4 [4] 当 $n \ge 5$ 且 $n \ne 7$ 时，$\chi_{td}(C_n) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

当 $n = 3$ 时，$\chi_{td}(C_3) = 3$, 其 Mycielskian 图 $\mu(C_3)$ 的一个全控制着色见图 2(a), 可得 $\chi_{td}(\mu(C_3)) = 4$. 当 $n = 4$ 时，$\chi_{td}(C_4) = 2$, Mycielskian 图 $\mu(C_4)$ 的一个全控制着色见图 2(b), 则 $\chi_{td}(\mu(C_4)) \le 4$.

DOI: 10.12677/pm.2021.1111213

显然 $\chi_{td}(\mu(C_4)) \neq 3$, 事实上, 当 $\chi_{td}(\mu(C_4)) \neq 3$ 时必有一个点没有控制任一颜色类, 故 $\chi_{td}(\mu(C_4)) \geq 4$, 从而 $\chi_{td}(\mu(C_4)) \leq 4$. 当 $n \geq 5$ 时, 下面的定理给出了图 $\mu(C_n)$ 的全控制着色数.

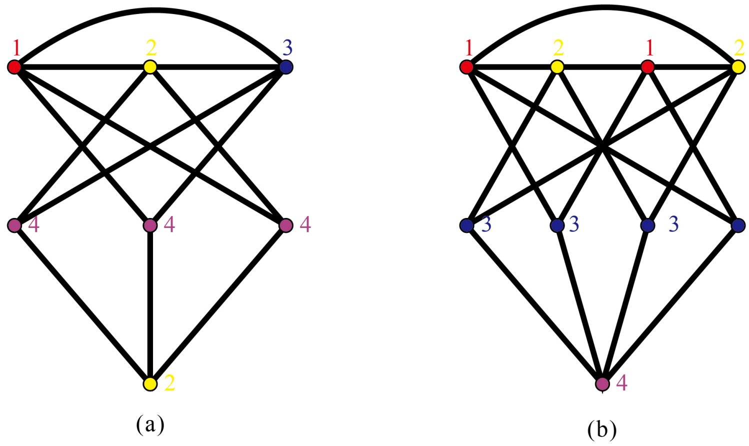

Figure 2. (a) The total domination coloring of $\mu(C_3)$; (b) The total domination coloring of $\mu(C_4)$

图 2. (a) $\mu(C_3)$的全控制着色;(b) $\mu(C_4)$的全控制着色

定理 2.5 当 $n \geq 5$ 时,

$$\chi_{td}(\mu(C_n)) = \begin{cases} 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2, & \text{当 } n \equiv 0\,(mod\ 3)\text{ 时}, \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1, & \text{其它}. \end{cases}$$

证明 设 $\{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ 是 C_n 的点集, $\{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\}$ 是 C_n 的边集. 由定理 2.1 和引理 2.4 知 $\chi_{td}(\mu(P_n)) \geq 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. 现考虑圈的 Mycielskian 图的全控制着色数的上界, 分为以下情形:

情形 1 当 $n \equiv 1 \pmod 3$ 时, 令 $n = 3t+1$. 图 C_n 的全控制着色 f_1 如下:

$$f_1(v_i) = \begin{cases} 2l-1, & \text{当 } i = 3l-2 \text{ 或 } i = 3l \text{ 时}, \\ 2l, & \text{当 } i = 3l-2 \text{ 时}. \end{cases}$$

其中 $1 \leq l \leq t-1$, 再令 $f_1(v_{n-3}) = 2t-1$, $f(v_{n-2}) = 2t$, $f(v_{n-1}) = 2t+1$, 和 $f(v_n) = 2t+2$. 易知 $f_1 = (V_1, V_2, \cdots, V_{2t-1}, V_{2t}, V_{2t+1}, V_{2t+2})$ 是图 C_n 的一个全控制着色, 则 $g_1 = (V_1, V_2 \cup U, \cdots, V_{2t-1}, V_{2t}, V_{2t+1}, V_{2t+2}, X)$ 是图 $\mu(C_n)$ 的一个全控制着色使用了 $2t$+3 个颜色, 因此 $\chi_{td}(\mu(C_n)) \leq 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. 故当 $n \equiv 1 \pmod 3$ 时, $\chi_{td}(\mu(C_n)) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$.

情形 2 当 $n \equiv 2 \pmod 3$ 时, 设 $n = 3t+2$. 图 C_n 的全控制着色 f_2 如下:

$$f_2(v_i) = \begin{cases} 2l-1, & \text{当 } i = 3l-2 \text{ 或 } i = 3l \text{ 时}, \\ 2l, & \text{当 } i = 3l-2 \text{ 时}. \end{cases}$$

其中 $1 \leq l \leq t$, 再令 $f_1(v_{n-1}) = 2t+1$, $f(v_n) = 2t+2$. 显然 $f_2 = (V_1, V_2, \cdots, V_{2t}, V_{2t+1}, V_{2t+2})$ 是

图 C_n 的一个全控制着色, 那么 $g_2 = (V_1, V_2 \cup U, \cdots, V_{2t+1}, V_{2t+2}, X)$ 也是图 $\mu(C_n)$ 的一个全控制着色且使用了 $2t+3$ 个颜色. 类似地, 当 $n \equiv 2 \pmod 3$ 时, $\chi_{td}(\mu(C_n)) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$.

情形 3 由定理 2.1 可知 $\chi_{td}(\mu(C_n)) \le 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2$. 要证 $\chi_{td}(\mu(C_n)) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2$, 只需证 $\chi_{td}(\mu(C_n)) \ne 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. 用定理 2.3 的证明方法类似可得 $\chi_{td}(\mu(C_n)) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ 是不可能的, 故 $\chi_{td}(\mu(C_n)) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 2$, 得证. □

接下来考虑星图 S_n 的 Mycielskian 图的全控制着色数. 星图的点集和边集分别记为 $V(S_n) = \{v\} \cup \{v_i | 1 \le i \le n\}$, $E(S_n) = \{vv_i | 1 \le i \le n\}$. 显然星图的全控制着色数是 2, 下面的定理给出了图 $\mu(S_n)$ 的全控制着色数的确切值.

定理 2.6 当 $n \ge 2$ 时, $\chi_{td}(\mu(S_n)) = 4$.

证明 就星图而言, 不失一般性, 设点 v 着颜色 1, 点 v_i 着颜色 2, 则 $f = (V_1, V_2)$ 是星图的一个全控制着色. 由定理 2.1 可知 $3 \le \chi_{td}(\mu(S_n)) \le 4$. 为了证 $\chi_{td}(\mu(S_n)) = 4$, 只需证 $\chi_{td}(\mu(S_n)) \ne 3$. 假设 $\chi_{td}(\mu(S_n)) = 3$, 分以下情形讨论其全控制着色:

情形 1 在图 $\mu(S_n)$ 中, S_n 的所有拷贝点着新颜色 3, 根点 u 着颜色 1或2. 当根点 u 着颜色 1 时, 点 v_i $(1 \le i \le n)$ 没有控制颜色类; 当根点 u 着颜色 2 时, 点 v 没有控制颜色类, 矛盾.

情形 2 点 v_i 的拷贝点 x_i 着新颜色 2, 点 v 的拷贝点 x 着颜色 3, 而点 u 只能着颜色 1, 但点 x 没有控制任一颜色类, 矛盾.

情形 3 点 v_i 的拷贝点 x_i 着新颜色 3, 点 v 的拷贝点 x 着颜色 1, 而点 u 只能着颜色 2, 但点 x_i $(1 \le i \le n)$ 没有控制任一颜色类, 矛盾.

因此$\chi_{td}(\mu(S_n)) = 3$是不可能的, 得证. □

下面考虑图 $\mu(W_n)$ 的全控制着色数, Chithra [4]给出了轮图的全控制着色数的确切值, 在此基础上, 定理 2.8 给出了图 $\mu(W_n)$ 的全控制着色数的确切值.

引理2.7 [4] 当 $n \ge 3$ 时,

$$\chi_{td}(W_n) = \begin{cases} 3, & \text{当 } n \text{ 是偶数时}, \\ 4, & \text{当 } n \text{ 是奇数时}. \end{cases}$$

定理 2.8 当 $n \ge 3$ 时,

$$\chi_{td}(\mu(W_n)) = \begin{cases} 4, & \text{当 } n \text{ 是偶数时}, \\ 5, & \text{当 } n \text{ 是奇数时}. \end{cases}$$

证明 轮图的点集和边集分别记为 $V(W_n) = \{v\} \cup \{v_i | 1 \le i \le n\}$, $E(W_n) = \{vv_i | 1 \le i \le n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \le i \le n\} \cup \{v_n v_1\}$. 显然轮图的正常点着色也是一个全控制着色. 不失一般性, 当 n 是偶数时, 点 v 着颜色 1, 点 v_i (i 是奇数)着颜色 2, 点 v_i (i 是偶数)着颜色 3, 可知 $f_1 = (V_1, V_2, V_3)$ 是轮图 W_n 的一个全控制着色且使用了最少的颜色数, 则 $g_1 = (V_1, V_2 \cup U, V_3, X)$ 是图 $\mu(W_n)$ 的一个全控制着色使用了 4 个颜色, 故 $\chi_{td}(\mu(W_n)) \le 4$. 由定理 2.1 知, 当 n 是偶数时, $\chi_{td}(\mu(W_n)) = 4$. 类似地, 当 n 是奇数时, $f_2 = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ 是轮图 W_n 的一个全控制着色且使用了最少的颜色数. 当 n 是奇数时, $g_2 = (V_1, V_2 \cup U, V_3, V_4, X)$ 是图 $\mu(W_n)$ 的一个全控制着色使用了 5 个颜色, 故 $\chi_{td}(\mu(W_n)) \le 5$.

同样得当n是奇数时, $\chi_{td}(\mu(W_n)) = 5$. □

然后讨论扇图F_n的Mycielskian图$\mu(F_n)$的全控制着色数.

定理 2.9 当$n \geq 3$时, $\chi_{td}(\mu(F_n)) = 4$.

证明 图F_n的点集记为$\{v\} \cup \{v_i|1 \leq i \leq n\}$, 边集记为$\{vv_i|1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}|1 \leq i \leq n-1\}$. 不失一般性, 设点$v$着颜色1, 点$v_i$ (i是奇数)着颜色2, 点v_i (i是偶数)着颜色3, 则$f = (V_1, V_2, V_3)$是扇图F_n的一个全控制着色且使用了最少的颜色数. 又因为$\chi(F_n) = 3$, 故$\chi_{td}(F_n) = 3$. 现考虑扇图的Mycielskian图. $g = (V_1, V_2, V_3 \cup U, X)$是图$\mu(F_n)$的一个全控制着色使用了4个颜色, 因此$\chi_{td}(\mu(F_n)) \leq 4$. 由定理2.1知$\chi_{td}(\mu(F_n)) = 4 = \chi_{td}(F_n) + 1$. □

最后考虑友谊图的Mycielskian图的全控制着色数.

定理 2.10 当$n \geq 2$时, $\chi_{td}(\mu(\mathcal{F}_n)) = 4$.

证明 图$\mathcal{F}_n$的点集记为$\{v\} \cup \{v_i|1 \leq i \leq 2n\}$, 边集记为$\{vv_i|1 \leq i \leq 2n\} \cup \{v_iv_{i+1}|1 \leq i \leq 2n$且$i$是奇数$\}$. 图$\mathcal{F}_n$的一个全控制着色如下: 点$v$着颜色1, 点$v_i$ (i是奇数)着颜色2, 点v_i (i是偶数)着颜色3, 则$f = (V_1, V_2, V_3)$是友谊图$\mathcal{F}_n$的一个全控制着色且使用了最少的颜色数. 又因为$\chi(\mathcal{F}_n) = 3$, 故$\chi_{td}(\mathcal{F}_n) = 3$. 验证得$g = (V_1, V_2, V_3 \cup U, X)$是图$\mu(\mathcal{F}_n)$的一个全控制着色使用了4个颜色, 因此$\chi_{td}(\mu(F_n)) \leq 4$. 由定理2.1知$\chi_{td}(\mu(\mathcal{F}_n)) = 4 = \chi_{td}(\mathcal{F}_n) + 1$. □

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2020年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助。

参考文献

[1] Gera, R., Rasmussen, C.W. and Horton, S. (2006) Dominator Colorings and Safe Clique Partitions. *Congressus Numerantium*, **181**, 19-32.

[2] Kazemi, A.P. (2015) Total Dominator Chromatic Number of a Graph. *Transactions on Combinatorics*, **4**, 57-68.

[3] Zhou, Y. and Zhao, D. (2019) On Domination Coloring in Graphs. ArXiv:1909.03715

[4] Chithra, K.P. and Mayamma, J. (2021) Total Domination Coloring of Graphs. *Journal of Mathematics and Computer Science*, **11**, 442-458.

[5] Mycielski, J. (1995) Sur le coloriage des graphs. *Colloquium Mathematicum*, **3**, 161-162. https://doi.org/10.4064/cm-3-2-161-162