Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1918-1922
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111214

一类半线性椭圆方程的内部梯度估计

罗小蓉，韩　菲*，吴婷婷

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2021年10月17日；录用日期：2021年11月19日；发布日期：2021年11月26日

摘　要

本文通过选取一个合适的辅助函数，利用极值原理与截断函数的性质，得到了一类半线性椭圆方程的内部梯度估计。

关键词

半线性椭圆方程，极值原理，截断函数，内部梯度估计

The Interior Gradient Estimate of a Class of Semi-Linear Elliptic Equations

Xiaorong Luo, Fei Han*, Tingting Wu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Oct. 17th, 2021; accepted: Nov. 19th, 2021; published: Nov. 26th, 2021

Abstract

In this paper, by selecting an appropriate auxiliary function, using the extreme value principle and the properties of truncated function, the internal gradient estimation of a class of semi-linear elliptic equations is obtained.

Keywords

Semi-Linear Elliptic Equation, Extreme Value Principle, Truncation Function, The Interior Gradient Estimate

*通讯作者。

文章引用: 罗小蓉, 韩菲, 吴婷婷. 一类半线性椭圆方程的内部梯度估计[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1918-1922.
DOI: 10.12677/pm.2021.1111214

1. 引言

半线性椭圆方程是二阶椭圆方程[1]中较基础且重要的一类方程。关于半线性椭圆方程中的梯度估计已经有大量的研究。其中梯度估计分为内部梯度估计[2]和全局梯度估计[3]。与全局梯度估计相比，内部梯度估计研究相对较少。1983 年，Gilbarg D.等人利用伯恩斯坦方法[4]研究了半线性椭圆方程得到了方程的内部梯度估计；1987 年，Korevaar N.J.利用极大值原理推导了椭圆 Weingarten 方程的内部梯度估计[5]；2011 年，汪雯利用椭圆辅助函数与线性化算子研究了一类 Hessian 方程的解和先验估计[6]，得到了抛物型 K-Hessian 方程的梯度内估计；2019 年，王聪涵研究了平均曲率方程的内部梯度估计[7]，并利用内部梯度估计证明了奇异极小曲面方程达到了预期 Liouville 型效果。

本文在前人研究的基础上，进一步研究一类半线性椭圆方程

$$a_{ij}(x)D_{ij}u+b_i(x)D_iu=f(x,u,\nabla u)$$

的内部梯度估计。其中 Ω 是 R^n 中的连通有界区域，$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，$f\in C(\Omega\times R\times R^n)$。

若方程对任意 $x\in\Omega,\xi\in R^n$，满足 $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\lambda|\xi|^2$，则称方程是一致椭圆的[8]，其中 λ 是一个正常数。

下面将构造一个辅助函数使其满足极值原理[9]，进而推出一类半线性椭圆方程的内部梯度估计。

2. 预备知识

引理 1 [10] 设 $\Omega'\subset\subset\Omega$，$\Omega$ 是开集，则存在函数 $\gamma\in C_0^\infty(\Omega)$，满足

$$\begin{cases}0\leq\gamma(x)\leq1, & x\in\Omega\\ \gamma(x)=1, & x\in\Omega'\\ |D^\alpha\gamma|\leq\dfrac{C}{(dist(\Omega',\partial\Omega))^{|\alpha|}}, & x\in\Omega\end{cases}$$

其中，C 只依赖于 Ω 的体积，不依赖于 γ 和 $dist(\Omega',\partial\Omega)$。

引理 2 [4]设 $u\in C^3(\Omega)$ 是方程

$$a_{ij}(x)D_{ij}(x)+b_i(x)D_iu=f(x,u)$$

的解，对于 $a_{ij}(x),b_i(x)\in C^1(\bar{\Omega})$，$f\in C^1(\bar{\Omega}\times R)$。则对于任何紧子集 $\Omega'\subset\subset\Omega$，有

$$\sup_{\Omega'}|Du|\leq C$$

其中 C 是只依赖于 $\lambda,diam(\Omega),dist(\Omega',\partial\Omega),|a_{ij},b_i|_{C^1(\bar{\Omega})},M=|u|_{L^\infty(\Omega)}$ 和 $|f|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M,M])}$ 的正常数。

3. 主要结果

本文主要研究方程关于 ∇u 是非线性的情况。

定理 1 设 $u\in C^3(\Omega)$ 是方程

$$a_{ij}(x)D_{ij}u+b_i(x)D_iu=f(x,u,\nabla u) \tag{1}$$

的解，$a_{ij}(x), b_i(x) \in C^1(\bar{\Omega})$， $f \in C^1(\bar{\Omega} \times R \times R^n)$ 则对于任何紧子集 $\Omega' \subset\subset \Omega$，有

$$\sup_{\Omega'} |Du| \le C$$

其中 C 是只依赖于 $\lambda, diam(\Omega), dist(\Omega', \partial\Omega), |a_{ij}, b_i|_{C^1(\bar{\Omega})}, M = |u|_{L^\infty(\Omega)}$ 和 $|f|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M,M])}$ 的正常数。

证明：取截断函数 $\gamma \in C_0^\infty$ 且 $\gamma \ge 0$，考虑如下辅助函数 $\omega = \gamma|Du|^2 + |\alpha u|^2 + e^{\beta x_1}$，其中 α, β 待定令 $L = a_{ij}D_{ij} + b_i D_i$， $v = \gamma|Du|^2$，先计算 $L(v)$，则

$$L\omega = L\left(\gamma|Du|^2 + \alpha|u|^2 + e^{\beta x_1}\right) = L\left(\gamma|Du|^2\right) + L\left(\alpha|u|^2\right) + L\left(e^{\beta x_1}\right)$$

$$Lv = (L\gamma)|Du|^2 + \gamma L\left(|Du|^2\right) + 4a_{ij}D_k u D_i \gamma D_{kj} u$$

$$D_i\left(|Du|^2\right) = 2\sum_{k=1} D_k u D_{ki} u$$

$$D_{ij}\left(|Du|^2\right) = \left(2\sum_{k=1} D_k u D_{ki} u\right)_j = 2\sum_{k=1} D_{ki} u D_{kj} u + 2\sum_{k=1} D_k u D_{kij} u$$

和

$$\begin{aligned} L\left(|Du|^2\right) &= a_{ij}(x) D_{kj}\left(|Du|^2\right) + b_i D_i\left(|Du|^2\right) \\ &= 2\sum_{k,i,j=1} a_{ij}(x) D_{ki} u D_{kj} u + 2\sum_{k,i,j=1} a_{ij}(x) D_k u D_{kij} u + 2\sum_{k,i=1} b_i D_k u D_{ki} u \end{aligned} \tag{2}$$

其中式(2)出现三阶项 $2\sum_{k,i,j=1} D_k u D_{kij} u$，为消掉三阶项，做如下处理：

首先，对(1)两边关于 x_k 求导，则有

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1} D_k a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i,j=1} a_{ij}(x) D_{kij} u + \sum_{i=1} D_k b_i D_i u + \sum_{i=1} b_i D_{ki} u \\ &= D_k f(x,u,\nabla u) + D_u f(x,u,\nabla u) D_k u + \sum_{l=1} D_{u_l} f(x,u,\nabla u) D_{kl} u \end{aligned} \tag{3}$$

其次，将(3)乘以 $2D_k u$，再对 k 求和，同时结合(2)，则有

$$\begin{aligned} L\left(|Du|^2\right) &= 2\sum_{k,i,j=1} a_{ij}(x) D_{ki} u D_{kj} u - 2\sum_{k,i,j=1} D_k a_{ij}(x) D_k u D_{ij} u - 2\sum_{k,i=1} D_k b_i(x) D_k u D_i u \\ &+ 2\sum_{k=1} D_k u D_k f + 2\sum_{k=1} |Du|^2 D_u f + 2\sum_{k,l=1} D_k u D_{kl} u D_{u_l} f \end{aligned} \tag{4}$$

最后，处理二阶项

由 $D_k b_i(x) \le \sup_{\Omega} |Db_i| \le |b_i|_{C^1}$， $D_k a_{ij}(x) \le \sup_{\Omega} |Da_{ij}| \le |a_{ij}|_{C^1}$ 以及

$$D_{u_l} f, D_u f, D_k f \le \sup_{\Omega} |Df| \le |f|_{C^1}, \quad a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2$$

可得

$$\sum_{k,i,j=1} a_{ij}(x) D_{kl} u D_{kj} u \ge \lambda\left|D^2 u\right|^2, \quad -2\sum_{k,i=1} D_k b_i(x) D_k u D_i u \ge C|Du|^2$$

$$2\sum_{k,l=1} D_k u D_{kl} u D_{u_l} f \ge -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k,l=1}\left(|f|_{C^1}^2 D_k u\right)^2 - \varepsilon\sum_{k,l=1}\left(D_{lk} u\right)^2 \ge -\frac{n}{\varepsilon}|f|_{C^1}^2 |Du|^2 - \varepsilon\left|D^2 u\right|^2$$

同理估计式(4)的其余项后，整理可得

$$L\left(|Du|^2\right) \ge \frac{\lambda}{2}\left|D^2u\right|^2 - C|Du|^2 - C_1$$

因此

$$L(v) \ge \frac{\lambda}{2}\gamma\left|D^2u\right|^2 + 4a_{ij}D_kuD_\gamma uD_{kj}u - C|Du|^2 + (L\gamma)|Du|^2 - C_1$$

其中 C_1 是只依赖于 $\lambda, \left|a_{ij}, b_i\right|_{C^1(\Omega)}, |f|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M,M])}$ 的正常数。

又由截断函数的性质和柯西不等式，可得

$$\left|4a_{ij}D_kuD_\gamma uD_{kj}u\right| \le \varepsilon|D\gamma|^2\left|D^2u\right|^2 + C(\varepsilon)|Du|^2$$

$$|D\gamma|^2 \le C\gamma \quad \text{in } \Omega$$

综上可得

$$Lv \ge \frac{\lambda}{2}\gamma\left|D^2u\right|^2\left(1 - \varepsilon\frac{|D\gamma|^2}{\gamma}\right) - C|Du|^2 - C_2$$

取 ε 足够小，使得 $\left(1 - \varepsilon\frac{|D\gamma|^2}{\gamma}\right) \ge \frac{1}{2}$，则有

$$Lv \ge \frac{1}{4}\lambda\gamma\left|D^2u\right|^2 - C|Du|^2 - C_2$$

其中 C_2 是只依赖于 $\lambda, \left|a_{ij}, b_i\right|_{C^1(\Omega)}, dist(\Omega', \partial\Omega), |f|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M,M])}$ 的正常数。

其次，计算 $L\left(\alpha|u|^2\right)$

$L\left(u^2\right) = a_{ij}(x)D_{ij}u^2 + b_i(x)D_iu^2 = 2\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)D_iuD_ju + 2u\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)D_{ij}u + 2u\sum_{i=1} b_i(x)D_iu$，因为 $a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu = f(x,u,\nabla u)$，则

$$\begin{aligned} L\left(u^2\right) &= 2\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)D_iuD_ju + 2uf(x,u,\nabla u) \ge 2\lambda|Du|^2 + 2uf \\ &\ge 2\lambda|Du|^2 - 2|u||f|_{C^1} \ge 2\lambda|Du|^2 - 2M|f|_{C^1} \end{aligned}$$

因此

$$L\left(\gamma|Du|^2 + \alpha|u|^2\right) \ge \frac{1}{4}\lambda\gamma\left|D^2u\right|^2 + (2\lambda\alpha - C)|Du|^2 - C_3$$

取 α 足够大时，使得 $(2\lambda\alpha - C_3) \ge 1$，则有

$$L\left(\gamma|Du|^2 + \alpha|u|^2\right) \ge \frac{1}{4}\lambda\gamma\left|D^2u\right|^2 + |Du|^2 - C_3$$

其中 C_3 是只依赖于 $\lambda, \left|a_{ij}, b_i\right|_{C^1(\Omega)}, dist(\Omega', \partial\Omega), |f|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M,M])}, M = |u|_{L^\infty(\Omega)}$ 的正常数。

最后，计算 $L\left(e^{\beta x_1}\right)$

$$L\left(e^{\beta x_1}\right) = \sum_{i,j=1} a_{ij}(x)e^{\beta x_1} = \beta^2 a_{11}e^{\beta x_1}$$

则

$$L\omega = L\left(\gamma\left|Du\right|^2 + \alpha\left|u\right|^2 + \mathrm{e}^{\beta x_1}\right) \geq \frac{1}{4}\lambda\gamma\left|D^2u\right|^2 + \left|Du\right|^2 + \left(\beta^2 a_{11}\mathrm{e}^{\beta x_1} - C_4\right)$$

取 β 足够大时，$\left(\beta^2 a_{11}\mathrm{e}^{\beta x_1} - C_3\right) \geq 0$，所以 $L\omega \geq 0$。

因为 $L\omega \geq 0$，故满足弱极值原理，则 $\sup\limits_{\Omega} w \leq \sup\limits_{\partial\Omega} w$，有

$$\sup_{\Omega'}\left|Du\right|^2 = \sup_{\Omega'}\left|\gamma Du\right|^2 \leq \sup_{\Omega}\left|\gamma Du\right|^2 \leq \sup_{\Omega}\left(\gamma\left|Du\right|^2 + \alpha\left|u\right|^2 + \mathrm{e}^{\beta x_1}\right)$$
$$\leq \sup_{\partial\Omega}\left(\gamma\left|Du\right|^2\right) + \sup_{\partial\Omega}\left(\alpha\left|u\right|^2\right) + \sup_{\partial\Omega}\mathrm{e}^{\beta x_1}$$

由定理可得 $\sup\limits_{\partial\Omega}\left(\alpha\left|u\right|^2\right) \leq C(\Omega)$，$\sup\limits_{\partial\Omega}\mathrm{e}^{\beta x_1} \leq C\left(diam(\Omega)\right)$ 和截断函数的性质可知 $x \in \partial\Omega$，$\gamma = 0$，$x \in \Omega'$，$\gamma = 1$。

因此对于任何紧子集 $\Omega' \subset\subset \Omega$，有

$$\sup_{\Omega'}\left|Du\right| \leq C$$

综上所述，定理得证。

基金项目

国家自然科学基金项目(12061078)。

参考文献

[1] 吴小庆. 数学物理方程及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[2] 丁时进. 一类边界退缩的线性椭圆型方程解的内估计[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 1987(3): 20-25.

[3] 周树清, 向占宏. 一类拟线性椭圆方程的很弱解的全局估计[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2005(1): 1-6.

[4] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (1983) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[5] Korevaar, N.J. (1987) A Priori Interior Gradient Bounds for Solutions to Elliptic Weingarten Equations. *Annales de l'Institut Henri Poincare* (C) *Non Linear Analysis*, **4**, 405-421. https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30357-2

[6] 汪雯. 一类 Hessian 方程的解和先验估计[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国科学院研究生院, 2011.

[7] 王聪涵. 平均曲率型方程的内部梯度估计和 Liouville 型结果[D]: [硕士学位论文]. 新乡: 河南师范大学, 2019.

[8] 马燕,韩菲,罗小蓉.一类半线性椭圆方程的梯度估计[J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版), 2021, 20(1): 6-9.

[9] 保继光, 朱汝金. 偏微分方程[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.

[10] 魏光祖, 袁忠信, 王恩三, 等. 索伯列夫空间与偏微分方程[M]. 开封: 河南大学出版社, 1994.