Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 2023-2030
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112226

早期停止定理在随机游动中的应用

赵 盼

北京联合大学，数理与交叉科学研究院，北京

收稿日期：2021年11月7日；录用日期：2021年12月8日；发布日期：2021年12月15日

摘 要

Diaconis 和 Fill 利用早期停止定理，给出 $\mathbb{Z}_+$ 上的随机游动收敛到平稳分布的速度估计时出现了错误，本文不仅纠正了这个错误，而且利用 Markov 不等式和早期停止定理，也给出了 $\mathbb{Z}_+$ 上的随机游动收敛到平稳分布的速度估计。

关键词

随机游动，早期停止定理，强平稳对偶，随机控制，随机单调

The Application of the Early Stopping Theorem in Random Walk

Pan Zhao

Institute of Fundamental and Interdisciplinary Sciences, Beijing Union University, Beijing

Received: Nov. 7^{th}, 2021; accepted: Dec. 8^{th}, 2021; published: Dec. 15^{th}, 2021

Abstract

By using the early stopping theorem, Diaconis and Fill made a mistake when dealing with the convergence to stationarity for a random walk. In the paper, we not only

文章引用: 赵盼. 早期停止定理在随机游动中的应用[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2023-2030.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112226

correct the mistake, but also give the speed estimation of convergence to stationarity for the random walk, by using the Markov inequation and the early stopping theorem.

Keywords

Random Walk, The Early Stopping Theorem, Strong Stationary Duality, Stochastically Dominate, Stochastically Monotone

1. 引言和主要结果

Diaconis 和 Fill [1] 提出的强平稳对偶(SSD)是研究马氏链收敛速度的一个有力工具. 我们可以通过更容易研究的对偶链来估计原马氏链收敛到平稳分布的收敛速度. SSD 具有很多重要的应用, 具体可参考文献 [2–5]. 对于状态空间为离散集的情形, Diaconis 和 Fill [1] 给出一个构造 SSD 链的方法. 特别地, 针对有限的全序状态空间, Diaconis 和 Fill 在 [1] 中给出一个容易求 SSD 链的情形. 在此情形中, 在时间逆马氏链是随机单调的假设下, 他们在同一个状态空间下构造了 SSD 链. Diaconis 和 Fill [6] 将这种特殊情形推广到了可数的, 全序状态空间 $\mathbb{Z}_+$上离散时间马氏链, 构造了其 SSD 链. 他们利用早期停止定理, 通过研究对偶链的击中时分布来估计原马氏链收敛到平稳分布的收敛速度. 其中, 他们在第 3 节给出的 $\mathbb{Z}_+$ 上的随机游动这个例子中, 出现了错误, 本文不仅纠正了这个错误, 而且利用 Markov 不等式和早期停止定理, 也给出了随机游动收敛到平稳分布的速度估计.

令 $\mathbf{X} = (X_n)_{n\geq 0}$ 为以 $E = \{0, 1, \ldots\}$ 为状态空间的离散时间马氏链, 转移矩阵为 P, 由 [7] 知, P 是随机单调的当且仅当对任意的 $y \in E$, $\sum_{z\geq y} P(x, z)$ 关于 x 是单调递增的. 显然, P 是随机单调的, 等价于对任意的 $y \in E$, $\sum_{z\leq y} P(x, z)$ 关于 x 单调递减.

本文令 $E = \{0, 1, \ldots\}, E^* = E \cup \{\infty\}$. 令 $\mathbf{X} = (X_n)_{n\geq 0}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上的离散时间马氏链, 初始分布为 π_0, 转移矩阵为 P. 我们简单记为 $\mathbf{X} \sim (\pi_0, P)$. 我们首先来叙述 Diaconis 和 Fill [6] 中有关 SSD 链存在性及应用性的主要结果.

定理1. [6] 如果令 $\mathbf{X} \sim (\pi_0, P)$ 为一个不可约, 非周期, 遍历的离散时间马氏链, 平稳分布为 π, 状态空间为 E. 定义 P 的时间逆为 $\overleftarrow{P}(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x)$, 令 $H(x) = \sum_{y\in E: y\leq x} \pi(y)$, $x \in E^*$; $g(x) = \frac{\pi_0(x)}{\pi(x)}$, $x \in E$. 那么, 关于关联矩阵: $\Lambda(x^*, x) = I_{(x\leq x^*)} \frac{\pi(x)}{H(x^*)}, x^* \in E^*, x \in E$, 存在以 E^* 为

状态空间的 SSD 链 $\mathbf{X}^* \sim (\pi_0^*, P^*)$ 的充分必要条件是以下两个条件同时成立

(a) $\frac{\pi_0(x)}{\pi(x)}$ 关于 x 单调递减;

(b) $\overleftarrow{P}$ 是随机单调的.

此时, SSD 链 $\mathbf{X}^* \sim (\pi_0^*, P^*)$ 由以下唯一决定:

$$\pi_0^*(x^*) = H(x^*)\Big[\frac{\pi_0(x^*)}{\pi(x^*)} - \frac{\pi_0(x^*+1)}{\pi(x^*+1)}\Big], \quad x^* \in E,$$

$$\pi_0^*(\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi_0(x)}{\pi(x)};$$

$$P^*(x^*, y^*) = \frac{H(y^*)}{H(x^*)}\Big[\mathbb{P}_{y^*}(\overleftarrow{X}_1 \le x^*) - \mathbb{P}_{y^*+1}(\overleftarrow{X}_1 \le x^*)\Big], \quad x^* \in E^*, y^* \in E,$$

$$P^*(x^*, \infty) = \frac{1}{H(x^*)} \lim_{y\to\infty} \mathbb{P}_y(\overleftarrow{X}_1 \le x^*), \quad x^* \in E^*.$$

定义全变差为 $\| \pi_n - \pi \| := \max_{A\subset E} | \pi_n(A) - \pi(A) |$, 其中 π_n 是 X_n 的分布.早期停止定理可以通过分析 SSD 链的击中时分布来估计原马氏链收敛到平稳分布的收敛速度. Diaconis 和 Fill [6] 将它具体应用到定理 1 中的马氏链, 得到如下推论.

推论1. [6] 对于定理 1 中的链 $(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$, 令 T^* 为 $\mathbf{X}^*$ 首次击中 $\{x^*, x^*+1, \ldots\} \cup \{\infty\}$ 的击中时, 那么

$$\| \pi_n - \pi \| \le (1 - H(x^*)) + H(x^*)\mathbb{P}\{T^* > n\}.$$

由于对偶链的击中时分布不容易计算, Diaconis 和 Fill [6] 给出如下随机可比引理, 用它来估计对偶链的击中时分布.

引理1. [6] 若 P_1 和 P_2 为定义在 E^* 上的转移函数, 则如下两个条件等价:

(a) 对任意的 $0 \le x_1 \le x_2 \le \infty, y \in E^*$, 有 $\sum_{0\le z\le y} P_1(x_1, z) \ge \sum_{0\le z\le y} P_2(x_2, z)$;

(b) 已知概率测度 $\pi_0^{(1)}$ 和 $\pi_0^{(2)}$ 满足: 对任意的 $y \in E^*$, 有 $\sum_{0\le z\le y} \pi_0^{(1)}(z) \ge \sum_{0\le z\le y} \pi_0^{(2)}(z)$, 那么存在定义在相同概率空间上的马氏链 $\mathbf{X}^{(i)} = (X_n^{(i)})_{n\ge0} \sim (\pi_0^{(i)}, P_i), i = 1, 2$, 使得对任意的 $n \ge 0$, 有 $X_n^{(1)} \le X_n^{(2)}$.

当条件 (a) 或 (b) 成立时, 称 P_2 随机控制 P_1, 记为 $P_1 \le P_2$.

引理2. [6] 令 P_1 和 P_2 为定义在 E^* 上的转移函数, 如果

(a) P_1 或 P_2 是随机单调的;

(b) 对任意的 $x, y \in E^*$, 有 $\sum_{0\le z\le y} P_1(x, z) \ge \sum_{0\le z\le y} P_2(x, z)$.

那么, $P_1 \le P_2$.

假设两个马氏链 $\mathbf{X}^{(i)} \sim (\pi_0^{(i)}, P_i)$, $i=1,2$, 满足对任意的 $y \in E^*$, 有 $\sum_{0\le z\le y}\pi_0^{(1)}(z) \ge \sum_{0\le z\le y}\pi_0^{(2)}(z)$, 并且 $P_1 \le P_2$, 那么由随机可比引理 1 得, $\mathbb{P}(T_2>n) \le \mathbb{P}(T_1>n), n\ge 0$. 其中, T_i 为 $\mathbf{X}^{(i)}$ 首次击中 $\{x, x+1, \dots\}\cup\{\infty\}$ 的击中时, 因此, 如果想利用随机可比引理来估计对偶链首次击中时分布, 关键是寻找一个易于分析的马氏链, 使得对偶链随机控制它. 而 [6] 中所举的有关随机游动的例子, 在寻找这个被对偶链随机控制的马氏链时出现了错误.

[6] 中所举随机游动模型如下.

令 $\mathbf{X}\sim P$ 为离散时间的简单随机游动, 状态空间为 $E=\{0,1,2,\cdots\}$. 令 $0<p<1, q:=1-p$, 并且, 对任意的 $0<x<\infty$, 有

$$\begin{aligned} P(x,x-1)=q, \qquad P(x,x)=0, \qquad P(x,x+1)=p;\\ P(0,0)=q, \qquad P(0,1)=p. \end{aligned} \tag{1}$$

由于 $P(x,x+1)+P(x+1,x)\le 1$, 故该链是随机单调的. 易知该链非周期. 假设 $0<p<\frac{1}{2}$, 则该链正常返, 平稳分布为: $\pi(x)=(1-p/q)(p/q)^x$, $x\in E$. $H(x^*)=\sum_{y\le x^*}\pi(y)=1-(p/q)^{x^*+1}$.

由 [6] 知, 假设链 $\mathbf{X}$ 从 0 出发, 则由定理 1 知, 对偶链也是从 0 出发的生灭链, 并且转移矩阵 P^* 如下: 对任意的 $0<x^*<\infty$, 有

$$\begin{aligned} P^*(x^*,x^*-1)=\frac{H(x^*-1)}{H(x^*)}p, \qquad P^*(x^*,x^*)^*=0, \qquad P^*(x^*,x^*+1)=\frac{H(x^*+1)}{H(x^*)}q;\\ P^*(0,0)=0, \qquad P^*(0,1)=1. \end{aligned}$$

定义转移矩阵 P_0 为: 对任意的 $0<x<\infty$, 有

$$\begin{aligned} P_0(x,x-1)=p, \quad P_0(x,x)=0, \qquad P_0(x,x+1)=q;\\ P_0(0,0)=0, \qquad P_0(0,1)=1. \end{aligned}$$

[6] 中指出: 对偶链随机控制以 P_0 为转移矩阵的随机游动, 但是我们发现这是错误的. 因为 $P_0(0,0)\le P^*(1,0)$, 并不满足随机可比引理 1 中的(a).

接下来, 我们首先寻找被对偶链随机控制的随机游动, 然后用 [6] 中的方法来估计所寻找的随机游动首次击中时分布, 进而估计原随机游动首次击中时分布, 从而在全变差意义下给出原随机游动收敛速度的估计. 另外, 我们也可利用 Markov 不等式来估计所寻找的随机游动首次击中时分布, 从而利用早期停止定理给出原随机游动收敛速度的估计, 得到如下结果.

令 $0<\epsilon<1, p/q:=1-\epsilon$, $\lceil x\rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数. 我们的主要定理如下.

定理2. 假设随机游动 $\mathbf{X}$ 的转移矩阵 P 为 (1), 并且 $0<p\le\frac{1}{3}$, $\epsilon>0$. 如果 $n=\lceil\frac{c}{\epsilon^2}\rceil$, 其中 $c>1$, 那么

$$\|\pi_n-\pi\|\le\frac{1}{\sqrt{c}}\Big(1+\frac{1}{2}\ln c+\sqrt{6}\epsilon\Big).$$

定理3. 假设随机游动 $\mathbf{X}$ 的转移矩阵 P 为 (1), 并且 $0 < p < \frac{1}{2}$, $\epsilon > 0$. 如果 $n = \lceil \frac{c}{\epsilon^2} \rceil$, 其中 $c > 1$, 那么

$$\| \pi_n - \pi \| \leq \frac{1}{c}\Big(\sqrt{c} + \frac{1}{4}(\ln c)^2 - \frac{1}{2}\epsilon \ln c\Big).$$

2. 定理 2 的证明

定义转移矩阵 P_1 为: 对任意的 $0 < x < \infty$, 有

$$P_1(x, x-1) = \frac{1}{3}, \qquad P_1(x,x) = 0, \qquad P_1(x, x+1) = \frac{2}{3};$$
$$P_1(0,0) = \frac{1}{3}, \qquad P_1(0,1) = \frac{2}{3}.$$

因为对任意的 $x \geq 0$, 有 $P_1(x, x+1) + P_1(x+1, x) \leq 1$, 所以 P_1 是随机单调的. 因为 $0 < p \leq \frac{1}{3}$, 所以对任意的 $x, y \in E$, 有 $\sum_{0\leq z\leq y} P_1(x,z) \geq \sum_{0\leq z\leq y} P^*(x,z)$. 由随机可比引理 2 知, P^* 随机控制 P_1, 即 $P_1 \leq P^*$.

我们下面寻找一个更容易分析的简单对称随机游动的绝对值过程, 使得它被 P_1 控制, 然后就可以由 [6] 中的方法, 即利用 [8] 中的 Berry-Esseen 定理, 来估计它的首次击中时分布. 假设独立同分布随机变量序列 $\{Y_i : i \geq 1\}$ 满足

$$\mathbb{P}\{Y_i = -1\} = \mathbb{P}\{Y_i = 1\} = \frac{1}{3};$$
$$\mathbb{P}\{Y_i = 0\} = \frac{1}{3}.$$

定义 $V_0 := 0, V_n := \sum_{i=1}^n Y_i$, 那么 $(V_n)_{n\geq 0}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的简单对称随机游动, 它的转移矩阵 P_v 如下: 对任意的 $x, y \in \mathbb{Z}$, 有

$$P_v(x, x-1) = P_v(x, x+1) = \frac{1}{3};$$
$$P_v(x,x) = \frac{1}{3}.$$

显然, V_n 的期望和方差分别为 $\mathbb{E}(V_n) = 0$, $D(V_n) = \frac{2n}{3}$.

注意到 $(\mid V_n \mid)_{n\geq 0}$ 是以 E 为状态空间的离散时间马氏链, 它的转移矩阵 $P_{|v|}$ 如下: 对任意的 $0 < x < \infty$, 有

$$P_{|v|}(x, x-1) = P_{|v|}(x, x+1) = \frac{1}{3}, \qquad P_{|v|}(x,x) = \frac{1}{3}, \quad 0 < x < \infty;$$
$$P_{|v|}(0,1) = \frac{2}{3}, \qquad P_{|v|}(0,0) = \frac{1}{3}.$$

因为 P_1 是随机单调的, 并且对任意的 $x, y \in E$, 有 $\sum_{0\leq z\leq y} P_{|v|}(x,z) \geq \sum_{0\leq z\leq y} P_1(x,z)$. 由随机可比引理 2 知, P_1 随机控制 $P_{|v|}$, 即 $P_{|v|} \leq P_1$. 又 $P_1 \leq P^*$, 所以 $P_{|v|} \leq P^*$. 令 $T^*, T_{|v|}$ 分别为对偶链和 $(\mid V_n \mid)_{n\geq 0}$ 首次击中 $\{x^*, x^*+1, \ldots\}$ 的击中时, 则对任意的 $n \geq 0$, 有 $\mathbb{P}(T^* > n) \leq \mathbb{P}(T_{|v|} > n)$.

接下来我们延续 [6] 中的证明思路, 利用早期停止定理, 给出原随机游动收敛到平稳分布的速度

估计. 选取 $x^* = \lceil b/\epsilon \rceil - 1$, 得到 $1 - H(x^*) \le e^{-b}$.

令 Z 为标准正态随机变量, $C \le 0.7655$ 为 [8] 中的全局常数. 由于 $D(V_n) = \frac{2n}{3}, \epsilon_0 := \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|Y_i|^3}{(\sqrt{D(V_n)})^3} = \sqrt{\frac{3}{2n}}$, 选取 $n = \lceil c/\epsilon^2 \rceil$, $x^* = \lceil b/\epsilon \rceil - 1$, 则由 [8] 中的 Berry-Esseen 定理, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T^* > n) &\le \mathbb{P}(T_{|v|} > n) \le \mathbb{P}\{| V_n |< x^*\} \\ &\le \mathbb{P}\{ \mid Z \mid < x^* \sqrt{\frac{3}{2n}}\} + 2C\epsilon_0 \\ &\le \mathbb{P}\{ \mid Z \mid < \frac{b}{\sqrt{\frac{2c}{3}}}\} + \epsilon \sqrt{\frac{6}{c}} \le \frac{b + \sqrt{6}\epsilon}{\sqrt{c}}.\end{aligned}$$

因此,

$$\| \pi_n - \pi \| \le e^{-b} + \frac{b + \sqrt{6}\epsilon}{\sqrt{c}}.$$

如果 $c > 1$, 通过选取 $b = \frac{1}{2} \ln c$, 我们得到

$$\| \pi_n - \pi \| \le \frac{1}{\sqrt{c}} \Big(1 + \frac{1}{2} \ln c + \sqrt{6}\epsilon \Big).$$

$\square$

3. 定理 3 的证明

定义转移矩阵 P_2 为: 对任意的 $0 < x < \infty$, 有

$$\begin{aligned} P_2(x, x-1) = p, \qquad P_2(x, x) = 0, \qquad P_2(x, x+1) = q; \\ P_2(0, 0) = p, \qquad P_1(0, 1) = q. \end{aligned}$$

由定理 2 的证明知, $P_2 \le P^*$. 令 $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{X}_n)_{n \ge 0}$ 为从 0 出发的简单对称随机游动, 其转移矩阵 $\widetilde{P}$ 为: 对任意的 $0 < x < \infty$, 有

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(x, x-1) = \frac{1}{2}, \qquad \widetilde{P}(x, x) = 0, \quad \widetilde{P}(x, x+1) \quad = \frac{1}{2}; \\ \widetilde{P}(0, 0) = \frac{1}{2}, \qquad \widetilde{P}(0, 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因为 $0 < p < \frac{1}{2}$, 所以对任意的 $x, y \in E$, 有 $\sum_{0 \le z \le y} \widetilde{P}(x, z) \ge \sum_{0 \le z \le y} P_2(x, z)$. 由随机可比引理 2 知, $\widetilde{P} \le P_2$. 又 $P_2 \le P^*$, 所以 $\widetilde{P} \le P^*$. 令 $T^*, \widetilde{T}$ 分别为对偶链和 $\widetilde{\mathbf{X}}$ 首次击中 $\{x^*, x^* + 1, \ldots\}$ 的击中时, 则对任意的 $n \ge 0$, 有 $\mathbb{P}(T^* > n) \le \mathbb{P}(\widetilde{T} > n)$. 由 Markov 不等式知, $\mathbb{P}(\widetilde{T} > n) \le \frac{\mathbb{E}\widetilde{T}}{n}$. 下面我们通过计算 $\mathbb{E}\widetilde{T}$, 来估计 $\mathbb{P}(T^* > n)$.

显然, $\widetilde{P}$ 是不可约, 非周期的. 由 [7], 定义 $\widetilde{P}(i, j) := \widetilde{p}_{ij}$, $\widetilde{p}_n^{(k)} := \sum_{j=0}^{k} \widetilde{p}_{nj}$ 和

$$\widetilde{F}_i^{(i)} := 1, \quad \widetilde{F}_n^{(i)} := \frac{1}{\widetilde{p}_{n,n+1}} \sum_{k=i}^{n-1} \widetilde{p}_n^{(k)} \widetilde{F}_k^{(i)}, \quad n > i \ge 0.$$

DOI: 10.12677/pm.2021.1112226

由[[7],定理 2] 知, $\widetilde{P}$ 是常返的当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{F}_n^{(0)}=\infty$. 容易求得, 对任意的 $n\geq 0$, 有 $\widetilde{F}_n^{(0)}=1, \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{F}_n^{(0)}=\infty$. 因此, $\widetilde{P}$ 是常返的. 因为 $\widetilde{P}$ 不可约, 非周期, 常返, 由[[7],定理 5] 知,

$$\mathbb{E}_0\widetilde{\sigma}_{x^*}=\sum_{k=0}^{x^*-1}\widetilde{v}_k.$$

其中, $\widetilde{v}_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}}{\widetilde{p}_{j,j+1}}$, $\widetilde{\sigma}_{x^*}=\inf\{n\geq 1:\widetilde{X}_n=x^*\}$.

注意到 $\widetilde{T}=\widetilde{\sigma}_{x^*}$, 因此 $\mathbb{E}\widetilde{T}=\mathbb{E}\widetilde{\sigma}_{x^*}$. 因为 $\widetilde{F}_i^{(i)}=1$, 所以,

$$\widetilde{F}_{i+1}^{(i)}=\frac{1}{\widetilde{p}_{i+1,i+2}}\sum_{k=i}^{i}\widetilde{p}_{i+1}^{(k)}\widetilde{F}_k^{(i)}=\frac{1}{\widetilde{p}_{i+1,i+2}}\widetilde{p}_{i+1,i}\widetilde{F}_i^{(i)}=1.$$

同理,可求得: $\widetilde{F}_{i+2}^{(i)}=1$. 因此, 归纳可得, $\widetilde{F}_n^{(i)}=1,\ 1\leq i\leq n$. 故

$$\mathbb{E}_0\widetilde{\sigma}_{x^*}=\sum_{k=0}^{x^*-1}\widetilde{v}_k=\sum_{k=0}^{x^*-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}}{\widetilde{p}_{j,j+1}}=\sum_{k=0}^{x^*-1}2(k+1)=(x^*)^2+x^*.$$

因此, $\mathbb{E}_0\widetilde{T}=\mathbb{E}_0\widetilde{\sigma}_{x^*}=(x^*)^2+x^*$. 选取 $x^*=\lceil b/\epsilon\rceil-1$, 得到 $1-H(x^*)\leq e^{-b}$. 选取 $n=\lceil c/\epsilon^2\rceil$, 有

$$\begin{aligned}\parallel\pi_n-\pi\parallel &\leq 1-H(x^*)+H(x^*)\mathbb{P}_0(T^*>n)\\ &\leq e^{-b}+\frac{\mathbb{E}_0\widetilde{T}}{n}\\ &\leq e^{-b}+\frac{(x^*)^2+x^*}{n}\\ &= e^{-b}+\frac{(\lceil\frac{b}{\epsilon}\rceil)^2-\lceil\frac{b}{\epsilon}\rceil}{\lceil\frac{c}{\epsilon^2}\rceil}\leq e^{-b}+\frac{b^2+b\epsilon}{c}.\end{aligned}$$

如果 $c>1$, 通过选取 $b=\frac{1}{2}\ln c$, 我们得到

$$\parallel\pi_n-\pi\parallel\leq\frac{1}{c}\Big(\sqrt{c}+\frac{1}{4}(\ln c)^2-\frac{1}{2}\epsilon\ln c\Big).$$

□

基金项目

北京市自然科学基金资助项目(1194022), 北京联合大学人才强校优选计划(BPHR2020EZ01)和ZB10202001.

参考文献

[1] Diaconis, P. and Fill, J.A. (1990) Strong Stationary Times via a New Form of Duality. *The Annals of Probability*, **18**, 1483-1522. https://doi.org/10.1214/aop/1176990628

[2] Diaconis, P. and Miclo, L. (2009) On Times to Quasi-Stationarity for Birth and Death Processes. *Journal of Theoretical Probability*, **22**, 558-586. https://doi.org/10.1007/s10959-009-0234-6

[3] Diaconis, P. and Saloff-Coste, L. (2006) Separation Cut-Offs for Birth and Death Chains. *The Annals of Applied Probability*, **16**, 2098-2122. https://doi.org/10.1214/105051606000000501

[4] Fill, J.A. (2009) The Passage Time Distribution for a Birth-and-Death Chain: Strong Stationary Duality Gives a First Stochastic Proof. *Journal of Theoretical Probability*, **22**, 543-557. https://doi.org/10.1007/s10959-009-0235-5

[5] Fill, J.A. and Kahn, J. (2013) Comparison Inequalities and Fastest-Mixing Markov Chains. *The Annals of Applied Probability*, **23**, 1778-1816. https://doi.org/10.1214/12-AAP886

[6] Diaconis, P. and Fill, J.A. (1990) Examples for the Theory of Strong Stationary Duality with Countable State Spaces. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **4**, 157-180. https://doi.org/10.1017/S0269964800001522

[7] 白晶晶, 李培森, 张余辉, 赵盼. 离散时间单生过程的判别准则[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2015, 51(3): 227-235.

[8] Shiganov, I.S. (1986) Refinement of the Upper Bound of the Constant in the Central Limit Theorem. *Journal of Soviet Mathematics*, **35**, 2545-2550. https://doi.org/10.1007/BF01121471