Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 2076-2086
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112231

Hans汉斯

正则半群代数的理想链

苏志荣

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2021年11月10日；录用日期：2021年12月13日；发布日期：2021年12月20日

摘　要

胞腔代数的出现完满地解答了表示论中的一个最基本的问题——确定不可约表示的参数集。Graham和Lehrer利用胞腔基给出了胞腔代数的定义，König和Xi则是利用胞腔理想链给出了胞腔代数的等价定义。通过胞腔理想链的定义，可以更好地研究胞腔代数的结构和同调性质。由于正则半群是一类重要的半群，它构成了半群代数理论的主要研究领域之一。因此本文将从胞腔代数的胞腔理想链出发，去研究正则半群代数的双边理想链。本文的主要结果是若正则半群代数具有一条胞腔理想链时，则某些极大子群的群代数都具有一条双边理想链，相反，当某些极大子群的群代数都具有一条胞腔理想链时，正则半群代数将会具有一条与其相关的双边理想链。由于胞腔理想链也是双边理想链，因此研究代数的双边理想链对研究代数的胞腔性是很有帮助的。

关键词

胞腔代数，半群代数，胞腔理想，双边理想链，对合

The Chain of Ideals of Regular Semigroup Algebras

Zhirong Su

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Nov. 10th, 2021; accepted: Dec. 13th, 2021; published: Dec. 20th, 2021

Abstract

The emergence of cellular algebras has solved one of the most basic problems in representation theory that determines parameter set of irreducible representation. Graham and Lehrer gave the definition of cellular algebras by using cellular basis; König and Xi gave the equivalent definition of cellular algebras by using the chain of cellular ideals. The structure and homology properties of cellular algebras can be better studied through the definition of the chain of cellular ideals. Regu-

文章引用: 苏志荣. 正则半群代数的理想链[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2076-2086.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112231

lar semigroup is an important kind of semigroup, which constitutes one of the main research fields of the theory of semigroup algebras. In this paper we will study the chains of two-sided ideals of regular semigroup algebras from the chains of cellular ideals of cellular algebras. The main result of this paper is that if the semigroup algebra of a regular semigroup has the chain of cellular ideals, the group algebras of certain maximal subgroups all have the chains of two-sided ideals, and conversely, when the group algebras of certain maximal subgroups all have the chains of cellular ideals, the semigroup algebra of a regular semigroup will have the chain of two-sided ideals associated with them. Since the chains of cellular ideals are also the chains of two-sided ideals, it is helpful to study the chains of two-sided ideals of algebras to study the cellularity of algebras.

Keywords

Cellular Algebras, Semigroup Algebras, Cellular Ideals, The Chain of Two-Sided Ideals, Involution

1. 引言

胞腔代数的出现完满地解答了表示论中的一个最基本的问题——确定不可约表示的参数集。Kazhdan-Lusztig 在文献[1]中研究 Hecke 代数的表示理论时，引入了 Kazhdan-Lusztig 基，通过这组基，他们确定了不可约表示和一些相关问题。受到 A-型 Hecke 代数这组基的乘法性质的启发，Graham 和 Lehrer 在文献[2]中首次引入了胞腔代数的概念；Xi 和 König 在文献[3]中给出了胞腔代数的一种全新等价定义，即胞腔代数 A 将会有一个 R-模分解，并且将会根据这个 R-模分解来构造出一条胞腔理想链，同理，如果能够在代数 A 上构造出一条胞腔理想链，那么这个代数就是一个胞腔代数。通过胞腔理想链，可以更好地研究和理解胞腔代数的结构和同调性质。由于胞腔理想链也是双边理想链，因此研究双边理想链有助于研究代数的胞腔性。正则半群是一类重要的半群，它构成了半群代数理论的主要研究领域之一。因此本文将对正则半群代数的双边理想链进行研究，探索该双边理想链与某些极大子群的群代数的胞腔理想链之间的关系。

2. 预备知识

在这一节中，我们给出本文需要得一些关于半群和胞腔代数的基本概念和定义。本文的 R 将表示一个具有单位元的交换环，$\bar{\Delta}$ 将表示理想 Δ 的生成元，并且把代数 A 的 R-线性反自同构 $\delta\left(\delta^2=id\right)$ 叫做 R-对合。本节未提及的概念和定义请见参考文献[4] [5]。

我们首先回顾一下关于半群的一些定义和结论。

设 S 是一个半群，$E(S)$ 是 S 的全部幂等元所组成的集合，如果半群 S 没有单位元，则用 S^1 表示半群 S 并上一个单位元，否则，$S^1=S$。S 上的格林关系[6] $\mathcal{R},\mathcal{L},\mathcal{J},\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{D}$ 在半群理论中起着十分重要的作用，对于 $a,b\in S$，有：

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1=bS^1$$

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a=S^1b$$

$$a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1=S^1bS^1$$

$$\mathcal{H}=\mathcal{L}\bigcap\mathcal{R}$$

$$\mathcal{D}=\mathcal{L}\vee\mathcal{R}$$

当 S 是一个有限半群时，格林关系 $\mathcal{D}=\mathcal{J}$。设 $\mathcal{K}$ 是 S 的格林关系之一，取 K_a 为 S 的 $\mathcal{K}$-类并且包括 a，$S/\mathcal{K}$ 为 S 的全部的 $\mathcal{K}$ 类所组成的集合。我们定义：

$$aS^1\subseteq bS^1\Rightarrow R_a\le R_b$$

$$S^1a\subseteq S^1b\Rightarrow L_a\le L_b$$

$$S^1aS^1\subseteq S^1bS^1\Rightarrow J_a\le J_b$$

因此，可得集合 $S/\mathcal{R}$、$S/\mathcal{L}$ 和 $S/\mathcal{J}$ 上的偏序集。

设 S 是一个半群，如果对任意的 $a\in S$，存在 $e,f\in E(S)$，$a\mathcal{L}e$ 且 $a\mathcal{R}f$，则称 S 为正则半群。

设 S 是一个含有零元的半群，如果对任意 $a\in S\setminus\{0\}$，有 $SaS=S$，那么称半群 S 为完全 0-单半群。

设 G 是一个群，I 和 Λ 是非空的集合，$P=(p_{\lambda k})$ 是 $G^0 ⊟ G\bigcup\{0\}$ 上的一个正则 $\Lambda\times I$ 矩阵，其中 P 的每一行和每一列都至少包含 G 中的一个元素。设 $S=(G\times I\times\Lambda)\bigcup\{0\}$，定义 S 上的乘法，任意 $a,b\in G$，$k,l\in I$，$\lambda,\mu\in\Lambda$，有：

$$(a,k,\lambda)(b,l,\mu)=\begin{cases}(ap_{\lambda l}b,k,\mu) & p_{\lambda l}\ne 0;\\ 0 & p_{\lambda l}=0;\end{cases}$$

并且 $(a,k,\lambda)0=0(a,k,\lambda)=00=0$。如上定义的 S 是一个完全 0-单半群，我们将用 $\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda;P)$ 来表示。在 $\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda;P)$ 中，我们可以假设 $I\bigcap\Lambda=\{0\}$，$G=(G,0,0)$，$p_{0,0}=e$，其中 e 是 G 的单位元。此外对于 $\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda;P)$ 的任意非零极大子群 G'，我们有 $\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda;P)\simeq\mathcal{M}^0(G',I,\Lambda;P)$。本文的 $\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda;P)$ 总是满足上述假设。

设 S 是一个含有零元的半群且 $a\in S\setminus\{0\}$。令 $S_a=J_a\bigcup\{0\}$，$0\notin J_a$，则在 S_a 上定义运算 $\circ$，任意 $x,y\in J_a$：

$$x\circ y=\begin{cases}xy & xy\in J_a;\\ 0 & xy\notin J_a;\end{cases}$$

其中 xy 是 x 和 y 在 S 上的乘积。显然，$(S_a,\circ)$ 是一个具有零元 0 的半群。称 S_a 为 S 的由 a 决定的主因子。注意到，有限正则半群 S 的每一个主因子都是一个完全 0-单半群。

任意 $a\in S$，则 $I(a) ⊟ \{b\in S^1aS^1\mid S^1bS^1\subset S^1aS^1\}$ 是 S^1aS^1 的一个理想，显然，$S^1aS^1=J_a\dot{\bigcup}I(a)$。

如果 $(S,\cdot)$ 是一个具有零元 θ 的半群，$R[S]$ 是域 R 上的向量空间，并且对于任意 $r\in R$，$u,v\in R[S]$，有 $r(u\cdot v)=(ru)\cdot v=u\cdot(rv)$，则 $R[S]$ 是半群代数。定义 $R_0[S]=R[S]/R[\theta]$。我们称 R-代数 $R_0[S]$ 是 R 上的 S 的压缩半群代数。若 S 没有零元，则 $R_0[S]=R[S]$。设 $a\in R_0[S]$，即 $a=\sum_{s\in S\setminus\{\theta\}}r_s s$。定义 a 的支撑集合：

$$supp(a)=\{s\in S\setminus\{\theta\}\mid r_s\ne 0\}。$$

引理 2.1 [7]

设 S 是一个半群：

1) 若 $a,x\in S$，则 $xa\in J_a$ 或 $xa\in I(a)$。同理，$ax\in J_a$ 或 $ax\in I(a)$；

2) 取 $a,e=e^2\in S$。若 $a\mathcal{R}e$，则 $a=ea$。同理，若 $a\mathcal{L}e$，则 $a=ae$。

引理 2.2 [7]

任意 $(a,k,\lambda),(b,l,\mu)\in\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda;P)$，有如下三个等价论述：

1) $(a,k,\lambda)\mathcal{R}(b,l,\mu)\Leftrightarrow k=l$；

2) $(a,k,\lambda)\mathcal{L}(b,l,\mu)\Leftrightarrow \lambda=\mu$；

3) $(a,k,\lambda)\mathcal{H}(b,l,\mu)\Leftrightarrow k=l,\lambda=\mu$。

定义 2.3 [3]

设 A 是一个具有单位元的 R-代数，这里的 R 是一个 Noether 整环，设 $\delta:A\to A$ 是 A 上的 R-对合，J 是 A 的一个理想。若 J 是一个胞腔理想，则它满足：

1) $\delta(J)=J$，即对任意的 $a\in J$ 都有 $\delta(a)\in J$；

2) 存在 A 的一个左理想 Δ，它是有限秩的自由 R-模，以及一个 A-A-同构 $\alpha:J\to\Delta\otimes_k\delta(\Delta)$，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & \Delta\otimes_R\delta(\Delta) \arrow[d, "x\otimes y\mapsto\delta(y)\otimes\delta(x)"] \\ J \arrow[r, "\alpha"] & \Delta\otimes_R\delta(\Delta) \end{tikzcd}$$

定义 2.4 [3]

设 A 是一个 R-代数，且 δ 是 A 上的一个对合。则 A 称为胞腔代数，如果存在 A 的一个 R-模分解 $A=D_1'\oplus D_2'\oplus\cdots\oplus D_n'$ (有限直和)满足：

1) 对任意的 j，$\delta(D_j')=D_j'$；

2) 令 $D_j=\oplus_{l=1}^{j}D_l'$，则：

$$0=D_0\subset D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n=A$$

是 A 的一个理想链，使得对于每个 $j(j=1,2,\cdots,n)$，$D_j'=D_j/D_{j-1}$ 是商代数 A/D_{j-1} 的一个胞腔理想(其中 A/D_{j-1} 上的 R-对合是由 δ 诱导的)。这时，称这个理想链为 A 的一个胞腔理想链。

引理 2.5 [8]

设 $S=\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda;P)$ 是一个完全 0-单半群，e 是 G 的单位元，R 是一个整环，且 δ 是 $R(S)$ 的 $\mathcal{H}$ 型对合。若 $\delta(e,0,0)=(e,0,0)$，则存在 $R[G]$ 上的一个对合 $*$，以及一个双射 $\rho:I\to\Lambda$，$i\mapsto\overline{i}$。

定义 2.6

设 S 是一个半群，称半群代数 $R[S]$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型胞腔代数，如果 $R[S]$ 是一个胞腔代数，且满足下面的条件，对于任意 $a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}$，有：

1) $supp(a_S\otimes\delta(a_T))\subseteq J$；

2) 其中 Δ_k 是 $D_k'=D_k/D_{k-1}$ 的左理想，并且满足 $D_k'\simeq\Delta_k\otimes_R\delta(\Delta_k)$，$J$ 为 S 的某个 $\mathcal{J}$-类，J 可能依赖于给出的 k。此时，称 $R[S]$ 的胞腔理想链为 $\mathcal{J}$ 型胞腔理想链。

定义 2.7

设 S 是一个半群，则半群代数 $R[S]$ 是一个 $\mathcal{JH}$ 型胞腔代数，如果 $R[S]$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型胞腔代数，且满足条件，对于每一个 k 和 $a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}$，存在一个 S 的 $\mathcal{H}$-类 H，使得 $supp(a_S\otimes\delta(a_T)\subseteq H)$。此时，称 $R[S]$ 的胞腔理想链为 $\mathcal{JH}$ 型胞腔理想链。

定义 2.8

设 δ 是半群代数 $R[S]$ 上的一个 R-对合，则：

1) 对于每一个 $s\in S$，有 $supp(\delta(s))\subseteq J_s$，则 δ 是一个 $\mathcal{J}$ 型对合；

2) 对于每一个 $s\in S$，任意 $x\in H_s$，将存在一个 S 的 $\mathcal{H}$-类 H，使得 $supp(\delta(x))\subseteq H$，则 δ 是一个 $\mathcal{H}$

型对合。

3. 主要定理

定理 3.1

设 S 是一个半群且 δ 是 $R[S]$ 上的一个对合，若 $R[S]$ 关于对合 δ 是一个 $\mathcal{J}$ 型胞腔代数，则对合 δ 是一个 $\mathcal{J}$ 型对合。

证 因为 $R[S]$ 是一个 $\mathcal{J}$ 型胞腔代数，所以 $R[S]$ 具有一条 $\mathcal{J}$ 型胞腔理想链：

$$0 = D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n = R[S]\text{。}$$

设 $I = \{1,2,\cdots,n\}$。因为 $\mathcal{J}$ 型胞腔理想链的定义，对任意的 $s \in S$ 和 $a_S, a_T \in \overline{\Delta_k}$，都存在 S 的一个 $\mathcal{J}$-类 J，使得 $supp(a_S \otimes \delta(a_T)) \subseteq J$。取：

$$I_s = \left\{k \in I \mid \text{存在} a_S, a_T \in \overline{\Delta_k}, \text{使得} supp\left(a_S \otimes (\delta a_T)\right) \subseteq J_s\right\}\text{。}$$

下面要证明对合 δ 是一个 $\mathcal{J}$ 型对合，也就是对任意 $s \in S$，有 $supp(\delta(s)) \subseteq J_s$。由于 S 的不同的 $\mathcal{J}$-类是不相交的，则 $M_S = \left\{a_S \otimes \delta(a_T) \in D_k' \mid k \in I_s \text{ 且 } a_S, a_T \in \overline{\Delta_k}\right\}$ 是 $R[J_s]$ 的一组基。对于任意的 $a_S \otimes \delta(a_T) \in M_S$，有：

$$\delta\left(a_S \otimes \delta(a_T)\right) = a_T \otimes \delta(a_S) \in \Delta_k \otimes_R \delta(\Delta_k) = D_k' \subseteq M_S\text{。} \tag{1}$$

因为 $s \in J_s \subseteq R[J_s]$，所以 s 可以由 M_S 中的元素张成。再结合(1)，就可以得到 $\delta(s) \in R[J_s]$。故对合 δ 是一个 $\mathcal{J}$ 型对合。

定理 3.2

设 $S = \mathcal{M}^0(G, I, I; P)$ 是一个完全 0-单半群，e 是 G 的单位元，$*$ 是 $R[G]$ 上的对合，且 $e^* = e$，假设 $p_{i,l}^* = p_{l,i}$，那么映射 $\delta : R_0[S] \to R_0[S]$，$(a,i,j) \mapsto (a^*, j, i)$，其中 $a \in R[G]$，$i, j \in I$。则 δ 是一个 $\mathcal{H}$ 型对合。

证显然 δ 可线性扩展到 $R[S]$，任意 $(a,i,j) \in S$，有：

$$\delta^2(a,i,j) = \delta(a^*, j, i) = \left((a^*)^*, i, j\right) = (a,i,j)\text{。}$$

因此 $\delta^2 = id$。

再取 $(b,l,k) \in S$，则有：

$$\delta\left((a,i,j)(b,l,k)\right) = \delta\left(ap_{j,l}b, i, k\right) = \left(b^* p_{l,j} a^*, k, i\right) = \left(b^*, k, l\right)\left(a^*, j, i\right) = \delta(b,l,k)\delta(a,i,j)\text{。}$$

此处我们认为 G 等同于 S 的子群 $(G,0,0)$。因此 δ 是一个 R-对合。又因为对于每一个 $s \in S$，任意 $x \in H_s$，我们从引理 2.2 中可以知道，都将会存在一个 S 的 $\mathcal{H}$-类 H，使得 $supp(\delta(x)) \subseteq H$，最后根据定义 2.8 可知，$\delta$ 是一个 $\mathcal{H}$ 型对合。

定理 3.3

设 S 是一个半群，δ 是 $R[S]$ 上的一个 R-对合，如果 $R[S]$ 关于 δ 是一个 $\mathcal{J}$ 型胞腔代数，那么对于每一个 $a \in S$，R-代数 $R[J_a]$ 都会有一条双边理想链。

证由于 $R[S]$ 是 $\mathcal{J}$ 型胞腔代数，因此取 $R[S]$ 的 $\mathcal{J}$ 型胞腔理想链如下：

$$0 = D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n = R[S]\text{。}$$

设 $I = \{1,2,\cdots,n\}$，$R[S]$ 具有 R-模分解：

$$R[S]=D_1'\oplus D_2'\oplus\cdots\oplus D_n',\quad D_j=\oplus_{i=1}^{j}D_j',\quad j\in I,$$

并且 $D_j'=D_j/D_{j-1}$ 是 $\oplus_{i=j}^{n}D_i'=R[S]/D_{j-1}$ 的胞腔理想，因此存在 $\oplus_{i=j}^{n}D_i'=R[S]/D_{j-1}$ 上的同构映射 α，存在 $\oplus_{i=j}^{n}D_i'=R[S]/D_{j-1}$ 上的左理想 $\Delta_j\subset D_j'$，使得：

$$D_j'=D_j/D_{j-1}\simeq\Delta_j\otimes_R\delta(\Delta_j)。$$

设 $I_a=\left\{k\in I\mid 存在\, a_S,a_T\in\overline{\Delta_k},使得\sup p\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)\subseteq J_a\right\}$。根据定义 2.6 可知，任意 $x\in D_i'$，$i\in I_a$，都有 $supp(x)\subseteq J_a$。注意，I_a 中元素的先后顺序与 I 中元素的先后顺序保持一致，为了方便叙述，定义 $I_a=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。为了证明 $R[J_a]$ 具有一条双边理想链，我们只需要证明如下两个问题：

1) $R[J_a]=D_{a_1}'\oplus D_{a_2}'\oplus\cdots\oplus D_{a_m}'$

显然，集合：

$$\bigcup_{k\in I}\left\{a_S\otimes\delta(a_T)\mid a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}\right\}$$

构成了 $R[S]$ 的一组 R-基，因此对于任意 $x\in J_a$，我们有：

$$x=\sum_{k\in I}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}}r_{S,T}^k\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)=\sum_{k\in I_a}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}}r_{S,T}^k\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)+\sum_{k\in I\setminus I_a}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}}r_{S,T}^k\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right),$$

其中 $r_{S,T}^k\in R$。由于 $R[S]$ 是 $\mathcal{J}$ 型胞腔代数，因此有：

$$\sum_{k\in I\setminus I_a}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}}r_{S,T}^k\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)=0,$$

所以可得：

$$x=\sum_{k\in I_a}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}}r_{S,T}^k\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)\in R[J_a],$$

因此我们有 $R[J_a]\subseteq D_{a_1}'\oplus D_{a_2}'\oplus\cdots\oplus D_{a_m}'$。又由于任意 $y\in D_{a_1}'\oplus D_{a_2}'\oplus\cdots\oplus D_{a_m}'$，都有 $supp(y)\subseteq J_a$。因此 $D_{a_1}'\oplus D_{a_2}'\oplus\cdots\oplus D_{a_m}'\subseteq R[J_a]$，证得：

$$R[J_a]=D_{a_1}'\oplus D_{a_2}'\oplus\cdots\oplus D_{a_m}'。$$

2) 取 $D_{a_j}=\oplus_{k=a_1}^{a_j}D_k'$，并且 $0=D_0\subset D_{a_1}\subset D_{a_2}\subset\cdots\subset D_{a_n}=R[J_a]$ 是 $R[J_a]$ 的双边理想链。

先取任意 $x\in J_a$，$y\in D_{a_j}$，显然有 $x\in R[S]$。又因为当 $a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}$，$k\in I_a$ 时，我们有：

$$supp\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)\subseteq J_a \text{ 和 } supp\left[x\circ\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)\right]\subseteq J_a。$$

因此可得如下等式：

$$\begin{aligned}x\circ y&=x\circ\sum_{\substack{k=1\\k\in I}}^{a_j}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}}r_{S,T}^k\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)\\&=\sum_{\substack{k=1\\k\in I}}^{a_j}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}}r_{S,T}^k\left[x\circ\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)\right]\\&=\sum_{\substack{k=a_1\\k\in I_a}}^{a_j}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}}r_{S,T}^k\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)+\sum_{\substack{l=1\\l\in I\setminus I_a}}^{a_j}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_l}}r_{S,T}^l\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)。\end{aligned}$$

又由于式子 $\sum_{\substack{l=1\\l\in I\setminus I_a}}^{a_j}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_l}}r_{S,T}^l\left(a_S\otimes\delta(a_T)\right)=0$，因此：

$$x\circ y=\sum_{\substack{k=a_1\\k\in I_a}}^{a_j}\sum_{a_S,a_T\in\overline{\Delta_k}} r_{S,T}^k\left(a_S\otimes\delta\left(a_T\right)\right)\in D_{a_j}\text{。}$$

同理，我们也可以证明 $y\circ x\in D_{a_j}$。因此 $0=D_0\subset D_{a_1}\subset D_{a_2}\subset\cdots\subset D_{a_n}=R\left[J_a\right]$ 是 $R\left[J_a\right]$ 的双边理想链。

定理 3.4

设 R 是一个整环，S 是一个完全 0-单半群，δ 是 $R[S]$ 上的一个 $\mathcal{H}$ 型对合。$e\in S\setminus\{0\}$，$e^2=e$，若 $\delta(e)=e$，G_e 是 S 关于单位元 e 的极大子群，如果 $R[S]$ 关于 R-对合 δ 是一个 $\mathcal{JH}$ 型的胞腔代数，则 $R[G]$ 有一条双边理想链，相反，如果 $R[G]$ 关于 R-对合 $*=\delta|_{R[G]}$ 是一个胞腔代数，则 $R[S]$ 也有一条双边理想链。

证　由于 δ 是 $R[S]$ 上的一个 $\mathcal{H}$ 型对合，因此我们可以假设 $S=\mathcal{M}^0(G,I,I;P)$，并且 $p_{0,0}=e$。

假设 $R[S]$ 是一个 $\mathcal{JH}$ 型的胞腔代数，那么 $R[S]$ 会具有一条 $\mathcal{JH}$ 型胞腔理想链：

$$0=D_0\subset D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n=R[S]\text{。}$$

设 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，$R[S]$ 具有 R-模分解：

$$R[S]=D_1'\oplus D_2'\oplus\cdots\oplus D_n'\text{，}\quad D_j=\oplus_{i=1}^j D_i'\text{，}\quad j\in I\text{。}$$

并且 $D_j'=D_j/D_{j-1}$ 是 $\oplus_{i=j}^n D_i'=R[S]/D_{j-1}$ 的胞腔理想，因此存在 $\oplus_{i=j}^n D_i'=R[S]/D_{j-1}$ 上的同构映射 α 和 $\oplus_{i=j}^n D_i'=R[S]/D_{j-1}$ 上的左理想 $\Delta_j\subset D_j'=D_j/D_{j-1}$，使得 $D_j'\simeq\Delta_j\otimes_R\delta(\Delta_j)$。取：

$$I_G=\left\{\lambda\in I\mid \text{存在}\,a_S,a_T\in\overline{\Delta_\lambda},\text{使得}\,supp\left(a_S\otimes\delta\left(a_T\right)\right)\subseteq G\right\}\text{。}$$

设集合 ∇_λ 是由集合：

$$\left\{a_S\in\overline{\Delta_\lambda}\mid\text{存在}\,a_T\in\overline{\Delta_\lambda},\text{使得}\,supp\left(a_S\otimes\delta\left(a_T\right)\right)\subseteq G,\lambda\in I_G\right\}$$

中的元素 R-线性生成的，取 $B_\lambda'\simeq\nabla_\lambda\otimes_R\delta(\nabla_\lambda)\subset D_\lambda'$。注意，$I_G$ 中元素的先后顺序与 I 中元素的先后顺序保持一致，为了方便陈述，设 $I_G=\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$，为了证明 $R[G]$ 有双边理想链，我们只需要证明如下两个问题：

1) $R[G]=B_{g_1}'\oplus B_{g_2}'\oplus\cdots\oplus B_{g_m}'$

先证 $B_{g_1}'\oplus B_{g_2}'\oplus\cdots\oplus B_{g_m}'\subseteq R[G]$。

因为 $a_S\in\overline{\nabla_\lambda}$，故存在 $a_T\in\overline{\Delta_\lambda}$，使得 $a_S\otimes\delta(a_T)\in R[G]$。又因为 e 是 $R[G]$ 的一个左单位元，故有：

$$e\left(a_S\otimes\delta\left(a_T\right)\right)=a_S\otimes\delta\left(a_T\right)\in R[G]\text{。}$$

对于任意 $a_{T'}\in\overline{\Delta_\lambda}$，$\lambda\in I_G$，我们有：

$$e\left(a_S\otimes\delta\left(a_{T'}\right)\right)=\sum_{\substack{k=1\\k\in I}}^{\lambda}\sum_{a_p,a_q\in\overline{\Delta_k}} r_{S,T}^k\left(a_p\otimes\delta\left(a_q\right)\right)\text{。}$$

根据文献[2]的定义 1.1 的 C3，显然可以推出系数 $r_{S,T'}^\lambda\neq 0$。又因为集合：

$$\left\{a_p\otimes\delta\left(a_q\right)\mid\forall a_p,a_q\in\overline{\Delta_k},k\in I\right\}$$

中的每一个元素的支撑都包括在一个 $\mathcal{H}$-类之中，所以上述等式右边的非零系数所对应元素的支撑一定包含在 $R[R_e]$ 中。故 $a_S\otimes\delta(a_{T'})\in R[R_e]$。应用对合 δ，同理可得 $a_{T'}\otimes\delta(a_S)\in R[L_e]$。因此任意 $a_S,a_T\in\overline{\nabla_\lambda}$，$\lambda\in I_G$，有：

$$a_S \otimes \delta(a_T) \in R[R_e] \cap R[L_e] = R[G]。$$

可得 $B'_{g_1} \oplus B'_{g_2} \oplus \cdots \oplus B'_{g_m} \subseteq R[G]$。

再证 $R[G] \subseteq B'_{g_1} \oplus B'_{g_2} \oplus \cdots \oplus B'_{g_m}$。

取 $x \in R[G]$，我们可以写成 $x = x_1 + x_2$，$x_1 \in B'_{g_1} \oplus B'_{g_2} \oplus \cdots \oplus B'_{g_m}$，$x_2 \notin B'_{g_1} \oplus B'_{g_2} \oplus \cdots \oplus B'_{g_m}$。当 $a_S \otimes \delta(a_T) \notin B'_{g_1} \oplus B'_{g_2} \oplus \cdots \oplus B'_{g_m}$ 时，则有 $supp(a_S \otimes \delta(a_T)) \subseteq S \setminus G$，可得 $x_2 \in R[S \setminus G]$。又因为 $x_2 = x - x_1 \in R[G]$，故 $x_2 = 0$。那么 $x \in B'_{g_1} \oplus B'_{g_2} \oplus \cdots \oplus B'_{g_m}$，$R[G] \subseteq B'_{g_1} \oplus B'_{g_2} \oplus \cdots \oplus B'_{g_m}$。

因此问题(1)得证，$R[G] = B'_{g_1} \oplus B'_{g_2} \oplus \cdots \oplus B'_{g_m}$。

2) 设 $B_{g_j} = \oplus_{k=g_1}^{g_j} B'_k$，则 $0 = B_0 \subset B_{g_1} \subset B_{g_2} \subset \cdots \subset B_{g_m} = R[G]$ 是 $R[G]$ 的一条双边理想链。

设 $x \in R[G] \subset R[S]$，$y \in B_{g_j} \subset D_{g_j}$，由于 D_{g_j} 是 $R[S]$ 的双边理想，则有 D_{g_j} 是 $R[S]$ 的左理想，有：

$$\begin{aligned} xy &= \sum_{\substack{k=1 \\ k\in I}}^{g_j} \sum_{a_S, a_T \in \overline{\Delta_k}} r_{S,T}^k \left(a_S \otimes \delta(a_T)\right) \\ &= \sum_{\substack{k=g_1 \\ k\in I_a}}^{g_j} \sum_{a_S, a_T \in \overline{\nabla_k}} r_{S,T}^k \left(a_S \otimes \delta(a_T)\right) + \sum_{\substack{k=g_1 \\ k\in I_a}}^{g_j} \sum_{a_S, a_T \in \left\{\overline{\Delta_k} \setminus \overline{\nabla_k}\right\}} r_{S,T}^k \left(a_S \otimes \delta(a_T)\right)。 \\ &\quad + \sum_{\substack{k=1 \\ k\in \{I \setminus I_G\}}}^{g_j} \sum_{a_S, a_T \in \overline{\Delta_k}} r_{S,T}^k \left(a_S \otimes \delta(a_T)\right) \end{aligned}$$

当 $a_S, a_T \in \overline{\nabla_k}$，$k \in I_G$ 时，我们有 $supp(a_S \otimes \delta(a_T)) \subseteq G$ 和 $supp\left(g\left(a_S \otimes \delta(a_T)\right)\right) \subseteq G$。又由于

$$\sum_{\substack{k=g_1 \\ k\in I_a}}^{g_j} \sum_{a_S, a_T \in \left\{\overline{\Delta_k} \setminus \overline{\nabla_k}\right\}} r_{S,T}^k \left(a_S \otimes \delta(a_T)\right) \notin R[G] \tag{2}$$

和

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\in \{I \setminus I_G\}}}^{g_j} \sum_{a_S, a_T \in \overline{\Delta_k}} r_{S,T}^k \left(a_S \otimes \delta(a_T)\right) \notin R[G] \tag{3}$$

故式子(2)和(3)都为 0。因此有：

$$xy = \sum_{\substack{k=g_1 \\ k\in I_a}}^{g_j} \sum_{a_S, a_T \in \overline{\nabla_k}} r_{S,T}^k \left(a_S \otimes \delta(a_T)\right) \in B_{g_j}。$$

同理可证，$yx \in B_{g_j}$。因此 $0 = B_0 \subset B_{g_1} \subset B_{g_2} \subset \cdots \subset B_{g_m} = R[G]$ 是 $R[G]$ 的一条双边理想链。

相反，假设 G 的群代数 $R[G]$ 关于对合 $* := \delta|_{R[G]}$ 是一个胞腔代数，则 $R[G]$ 存在一条胞腔理想链：

$$0 = D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n = R[G]。$$

设 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$，$R[G]$ 具有 R-模分解：

$$R[G] = D'_1 \oplus D'_2 \oplus \cdots \oplus D'_n，\quad D_j = \oplus_{i=1}^{j} D'_i，\quad j \in I。$$

并且 $D'_j = D_j / D_{j-1}$ 是 $\oplus_{i=j}^{n} D'_i = R[G]/D_{j-1}$ 的胞腔理想，因此存在 $R[G]/D_{j-1}$ 上的同构映射 α 和 $R[G]/D_{j-1}$ 上的左理想 $\Delta_j \subset D'_j = D_j / D_{j-1}$，使得 $D'_j \simeq \Delta_j \otimes_R \delta(\Delta_j)$。

根据 δ 是一个 $\mathcal{H}$ 型对合，因此我们可以假设 $S = \mathcal{M}^0(G, I, I; P)$。根据定理 3.2，我们还可以假设 $\delta : (a, i, j) \mapsto (a^*, j, i)$。显然：

$$R[S] = (R[G], I, I; P) = (D'_1, I, I) \oplus (D'_2, I, I) \oplus \cdots \oplus (D'_n, I, I)，$$

取 $B_l=\oplus_{i=1}^{l}\left(D_i',I,I\right)$。故可得：

$$0=B_0\subset B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n=R[S]\text{。}$$

因为 $R[G]$ 是一个胞腔代数，取 $j\in I$，则任意 $a\in D_j/D_{j-1}$，$b\in R[G]/D_{j-1}$，有 $ab\in D_j/D_{j-1}$，$ba\in D_j/D_{j-1}$。又因为 $p_{i,l}\in G$，$i,l\in I$，故有 $bp_{i,l}\in R[G]/D_{j-1}$ 和 $p_{i,l}b\in R[G]/D_{j-1}$。

对于任意 $(a,h,q)\in\left(R[G],I,I\right)$，任意 $(b,m,k)\in B_l$，有 $(a,h,q)(b,m,k)=\left(ap_{q,m}b,h,k\right)$，又因为 $ap_{q,m}b\in D_j/D_{j-1}=D_j'$，所以 $(a,h,q)(b,m,k)\in B_l$。类似地，$(b,m,k)(a,h,q)=\left(bp_{k,h}a,m,q\right)$，$bp_{k,h}a\in D_j/D_{j-1}=D_j'$，因此 $(b,m,k)(a,h,q)\in B_l$。故 B_l 是 $R[S]$ 的双边理想。因此 $R[S]$ 有一条双边理想链：

$$0=B_0\subset B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n=R[S]\text{。}$$

定理 3.5

设 R 是一个整环，S 是一个正则半群(其主因子为 $\mathcal{M}^0\left(G_\alpha,I_\alpha,I_\alpha;P_\alpha\right)$，$\alpha$ 取遍 $Y=S/\mathcal{J}$，Y 有限)。假设 δ 是一个 $\mathcal{J}$ 型和 $\mathcal{H}$ 型对合。在 $R[S]$ 上，设 $E=\left\{e\in S\mid e\neq 0,e^2=e,\delta(e)=e\right\}$。取 $e\in E$，设 G_e 是具有单位元 e 的 S 的极大子群。假设 $E_\alpha=E\cap E\left(\mathcal{M}^0\left(G_\alpha,I_\alpha,I_\alpha;P_\alpha\right)\right)\neq\varnothing$，$\alpha\in Y$。如果 $R[S]$ 关于对合 δ 是一个 $\mathcal{JH}$ 型的胞腔代数，则每一个 $\alpha\in Y$，都有 $e\in E_\alpha$，使 $R[G_e]$ 有一条双边理想链，相反，若 $R[G_e]$ 关于对合 δ 的限制是一个胞腔代数，则 $R[S]$ 也有一条双边理想链。

证假设 $R[S]$ 是一个 $\mathcal{JH}$ 型的胞腔代数，通过文献[8]的命题 5.1 可知，任意 $a\in S$，$R[J_a]$ 也是胞腔代数。取 $\alpha\in Y$，那么存在 $J_a=\mathcal{M}^0\left(G_\alpha,I_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha\right)\setminus\{0\}$。因此 S_a 是一个完全 0-单半群，并且 $S_a=\mathcal{M}^0\left(G_\alpha,I_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha\right)$。又由于 $R_0[S_a]=R[J_a]$，则 $R[J_a]$ 是 S_a 在 R 上的半群代数。由于是在 $\mathcal{H}$ 型的条件之下，根据引理 2.5，有 $|I_\alpha|=|\Lambda_\alpha|$。又由于 $E_\alpha\neq\varnothing$，故存在幂等元 $e\in E_\alpha$，并且 G_e 是关于单位元 e 的 S_a 的极大子群，则 $S_a=\mathcal{M}^0\left(G_e,I_\alpha,I_\alpha;P_\alpha\right)$，此外，我们还把 e 定义为 $(e,0,0)$，易证 $\delta_a=\delta|_{R[J_a]}$ 和 $(e,0,0)$ 满足定理 3.4 的条件，因此 $R[G_e]$ 有一条双边理想链。

由于 S 是一个含有有限个 $\mathcal{J}$ 类的正则半群，因此它会存在一条满足相邻理想的商是主因子的理想链：

$$0=Q_0\subset Q_1\subset Q_2\subset\cdots\subset Q_n=S\text{。}$$

显然 $R[S]$ 也具有一条理想链：

$$0=R[Q_0]\subset R[Q_1]\subset R[Q_2]\subset\cdots\subset R[Q_n]=R[S]\text{。}$$

其中 $R[Q_i]/R[Q_{i-1}]=R_0\left[S_{\alpha_i}\right]=R\left[J_{\alpha_i}\right]$，有 $R[Q_i]=R[Q_{i-1}]\oplus R\left[J_{\alpha_i}\right]$，并且 $R\left[J_{\alpha_1}\right]=R_0[Q_1]$。

由于每一个主因子 $S_{\alpha_i}=\mathcal{M}^0\left(G_{e_{\alpha_i}},I_{\alpha_i},I_{\alpha_i};P_{\alpha_i}\right)$ 的 R-代数 $R\left[J_{\alpha_i}\right]$ 都是一个胞腔代数，设 $R\left[J_{\alpha_i}\right]$ 的胞腔理想链为：

$$0=D_0^{(i)}\subset D_1^{(i)}\subset D_2^{(i)}\subset\cdots\subset D_{k_i}^{(i)}=R\left[J_{\alpha_i}\right]\text{。}$$

其中 $R\left[J_{\alpha_i}\right]=D_1^{(i)\prime}\oplus D_2^{(i)\prime}\oplus\cdots\oplus D_{k_i}^{(i)\prime}$，$D_l^{(i)}=\oplus_{m=1}^{l}D_m^{(i)\prime}$。

根据理想链：

$$0=R[Q_0]\subset R[Q_1]\subset R[Q_2]\subset\cdots\subset R[Q_n]=R[S]\text{，}$$

再作出一条新的链：

$$\begin{aligned}&0=D_1^{(1)}\subset D_2^{(1)}\subset\cdots\subset D_{k_1}^{(1)}\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_1^{(2)}\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_2^{(2)}\subset\cdots\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\oplus D_1^{(3)}\\&\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\oplus D_2^{(3)}\subset\cdots\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\oplus D_{k_3}^{(3)}\subset\cdots\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\oplus D_{k_3}^{(3)}\oplus\cdots\oplus D_{k_n}^{(n)}=R[S]\end{aligned}\text{。}$$

现在需要证明该链是一条双边理想链。

对于任意 $s\in S$，任意 $a\in\oplus_{i=1}^{l}D_{k_i}^{(i)}\oplus D_m^{(l+1)}=a_1+a_2$，其中 $a_1\in\oplus_{i=1}^{l}D_{k_i}^{(i)}=R\left[Q_l\right]$，$a_2\in D_m^{(l+1)}$。由于 $R\left[Q_l\right]$ 是 $R\left[S\right]$ 的双边理想，因此 Sa_1 和 a_1S 都属于 $R\left[Q_l\right]$，取 $a_2=\left(a',x,y\right)\in D_m^{(l+1)}$，又由于 $s\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\in J_{\alpha_{(l+1)}}$ 或者 $s\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\in I\left(\alpha_{(l+1)}\right)$，因此我们有如下两种情况：

1) $s\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\in J_{\alpha_{(l+1)}}$。

只需要证明 sa_2 属于 $D_m^{(l+1)}$ 即可。由于 $s\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\in J_{\alpha_{(l+1)}}$，故 $s\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\in\left(G_{e_{\alpha_{(l+1)}}},I_{\alpha_{(l+1)}},0\right)$，因此可得：

$$\begin{aligned}sa_2&=s\left(a',x,y\right)\\&=s\left[\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\circ\left(a',0,y\right)\right]\\&=s\left[\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\left(a',0,y\right)\right]\\&=\left[s\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\right]\circ\left(a',0,y\right)\in R\left[J_{\alpha_{(l+1)}}\right]\end{aligned}。$$

又由于 $\left(a',0,y\right)\in D_m^{(l+1)}$，$s\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\in R\left[J_{\alpha_{(l+1)}}\right]$，并且 $D_m^{(l+1)}$ 是 $R\left[J_{\alpha_{(l+1)}}\right]$ 的双边理想，故 $sa_2\in D_m^{(l+1)}$。

2) $s\left(e_{\alpha_{(l+1)}},x,0\right)\in I\left(\alpha_{(l+1)}\right)$。

由于 $I\left(\alpha_{(l+1)}\right)$ 是 $S^1\alpha_{(l+1)}S^1$ 的理想，则 $sa\in R\left[I\left(\alpha_{(l+1)}\right)\right]$。又由于 $a\in\oplus_{i=1}^{l}D_{k_i}^{(i)}\oplus D_m^{(l+1)}$，因此也有 $a\in R\left[Q_{(l+1)}\right]$。并且 $R\left[Q_{(l+1)}\right]$ 是 $R\left[S\right]$ 的双边理想，可得：

$$sa\in R\left[Q_{(l+1)}\right]=R\left[Q_l\right]\oplus R\left[J_{\alpha_{(l+1)}}\right],$$

又根据 $sa\in R\left[I\left(\alpha_{(l+1)}\right)\right]$，可得 $sa\notin R\left[J_{\alpha_{(l+1)}}\right]$。则 $sa\in R\left[Q_l\right]=\oplus_{i=1}^{l}D_{k_i}^{(i)}$，显然 $sa\in\oplus_{i=1}^{l}D_{k_i}^{(i)}\oplus D_m^{(l+1)}$。因此 $R\left[S\right]$ 也有一条双边理想链：

$$\begin{aligned}&0=D_1^{(1)}\subset D_2^{(1)}\subset\cdots\subset D_{k_1}^{(1)}\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_1^{(2)}\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_2^{(2)}\subset\cdots\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\oplus D_1^{(3)}\\&\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\oplus D_2^{(3)}\subset\cdots\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\oplus D_{k_3}^{(3)}\subset\cdots\subset D_{k_1}^{(1)}\oplus D_{k_2}^{(2)}\oplus D_{k_3}^{(3)}\oplus\cdots\oplus D_{k_n}^{(n)}=R\left[S\right]\end{aligned}。$$

推论 3.6

设 R 是一个整环，S 是一个有限正则半群，$R\left[S\right]$ 上的 R-对合 δ 既是 $\mathcal{J}$ 型又是 $\mathcal{H}$ 型，E 是 S 的所有幂等元 e 所成的集合，其中 $\delta(e)=e$。对于每一个 $e\in E$，取 G_e 为关于单位元 e 的 S 的极大子群。如果对于任意 $\alpha\in Y$，$E\cap E\left(\mathcal{M}^0\left(G_\alpha,I_\alpha,I_\alpha;P_\alpha\right)\right)\neq\varnothing$，那么 $R\left[S\right]$ 关于对合 δ 是一个 $\mathcal{JH}$ 型胞腔代数，则对于每一个 $e\in E$，群代数 $R\left[G_e\right]$ 都具有一条双边理想链，相反，若群代数 $R\left[G_e\right]$ 关于对合 δ 的限制都是一个胞腔代数，则 $R\left[S\right]$ 将会具有一条与其相关的双边理想链。

参考文献

[1] Kazhdan, D. and Lusztig, G. (1979) Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras. *Inventiones Mathematicae*, **53**, 165-184. https://doi.org/10.1007/BF01390031

[2] Graham, J.J. and Lehrer, G.I. (1996) Cellular Algebras. *Inventiones Mathematicae*, **123**, 1-34. https://doi.org/10.1007/BF01232365

[3] König, S. and Xi, C.C. (1996) On the Structure of Cellular Algebras. Algebras and Modules, 365-386.

[4] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, Oxford.

[5] Okniński, J. (1991) Semigroup Algebras. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York.

[6] Green, J.A. (1951) On the structure of Semigroups. *Annals of Mathematics*, **54**, 163-172. https://doi.org/10.2307/1969317

[7] Howie, J.M. (1976) An Introduction to Semigroup Theory. Academic Press, London.

[8] Guo, X.J. and Xi, C.C. (2009) Cellularity of Twisted Semigroup Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **213,** 71-86. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2008.05.004