Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 237-247
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112032

Hans汉斯

一类含一阶导数的三阶边值问题正解的存在性

赵　娇

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: zhaojiao4983@163.com

收稿日期：2021年1月8日；录用日期：2021年2月11日；发布日期：2021年2月19日

摘　要

考虑一类含一阶导数的三阶常微分方程(ordinary differential equation，简称ODE)边值问题 $\begin{cases}-u^{(3)}(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t)), & t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=0, & u'(1)=\alpha u'(\eta)\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$ 是一个参数，$0<\eta<1$ 且 $1<\alpha<\frac{1}{\eta}$ 为常数。$f(t,u,p):[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为连续函数，且 $f(t,0,0)=0$。主要结果的证明基于全局分歧理论。

关键词

三阶ODE，主特征值，分歧，正解

Existence of Positive Solutions for a Class of Third-Order Boundary Value Problems with First Derivative

Jiao Zhao

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: zhaojiao4983@163.com

Received: Jan. 8th, 2021; accepted: Feb. 11th, 2021; published: Feb. 19th, 2021

Abstract

This paper considers existence of positive solutions for a class of third-order ordinary differential equations boundary value problems with first derivative $\begin{cases}-u^{(3)}(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t)), & t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=0, & u'(1)=\alpha u'(\eta)\end{cases}$

文章引用: 赵娇. 一类含一阶导数的三阶边值问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 237-247.
DOI: 10.12677/pm.2021.112032

where λ is a positive parameter, $0<\eta<1$ and $1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$ are given constants. $f(t,u,p):[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ is a continuous function, and $f(t,0,0)=0$. The proof of the main results is based upon global bifurcation techniques.

Keywords

Three-Order ODE, Principle Eigenvalue, Bifurcation, Positive Solution

1. 引言

三阶三点边值问题在应用数学和物理学的诸多领域都有应用，如具有恒定或变化截面的弯曲梁的挠度、三层梁、重力驱动的流动和加热棒平衡状态的研究等。近年来，关于这类问题的研究出现了一些结果[1]-[8]，特别地，文献[2]运用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理研究了问题

$$\begin{cases} -u^{(3)}(t)=a(t)f(u(t)), & t\in[0,1], \\ u(0)=u'(0)=0, & u'(1)=\alpha u'(\eta) \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性，其中$0<\eta<1$，$1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$为给定常数，得到了如下结果：

定理 A 若 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$，$a\in C([0,1],[0,\infty))$且在$\left[\dfrac{\eta}{\alpha},\eta\right]$上不恒为零，假设下列条件之一成立：

i) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$，$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=0$；

ii) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$，$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=0$；

则问题(1.1)至少存在一个正解。

文献[3]运用不动点指数理论研究了

$$\begin{cases} -u^{(3)}(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t),u''(t)), & t\in[0,1], \\ u(0)=u'(0)=0, & u'(1)=\alpha u'(\eta) \end{cases} \tag{1.2}$$

正解的存在性问题，所得结果如下：

假定：

(B1) λ 为正参数；

(B2) $f:[0,1]\times\mathbb{R}^3\to[0,\infty)$ 是 L^1-Caratheodory 函数;

(B3) 存在 f_0，f^∞，使得

$$f_0=\lim_{|x|,|y|,|z|\to 0}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y,z)}{|x|+|y|+|z|},\quad f^\infty=\lim_{|x|,|y|,|z|\to 0}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y,z)}{|x|+|y|+|z|}.$$

定理 B 假定(B1)~(B3)成立，若 $\overline{\Lambda}f^{\infty} < \underline{\Lambda}f_0$，则对所有的

$$\lambda \in \left(\frac{1}{\underline{\Lambda}f_0}, \frac{1}{\overline{\Lambda}f^{\infty}}\right),$$

问题(1.2)至少有一个正解。

我们注意到，文献[2]在非线性项分别满足超线性和次线性情形时，运用锥上的不动点理论得到正解的存在性，所得主要结果相对比较简单。文献[3]通过运用不动点指数理论研究了更一般的非线性三阶边值问题(1.2)，得到了正解的存在性，对文献[2]做了一定的推广，但因所用工具的局限性，文献[3]中参数 λ 的取值范围不是最优的，所得主要结果也不是最优的，一个自然的问题是：能否用其他方法考虑三阶边值问题正解的存在性，从而给出参数 λ 的最优取值范围？

基于上述考虑，本文运用 Rabinowitz 全局分歧定理及 Krein-Rutman 定理考察三阶边值问题

$$\begin{cases} -u^{(3)}(t) = \lambda f(t,u(t),u'(t)), \ t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \alpha u'(\eta) \end{cases} \tag{1.3}$$

正解的存在性。

本文总假定：

(H1) λ 为正参数，$0 < \eta < 1$，$1 < \alpha < \dfrac{1}{\eta}$ 为给定常数；

(H2) $f:[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty) \to [0,\infty)$ 为连续函数，且 $f(t,0,0)=0$；

(H3) 存在 $a(t), b(t) \in C([0,1],(0,\infty))$，使得

$f(t,u,p) = a(t) + \circ(|(u,p)|), |(u,p)| \to (0,0)$ 对于 $t \in [0,1]$ 一致成立

且

$f(t,u,p) = b(t) + \circ(|(u,p)|), |(u,p)| \to \infty$ 对于 $t \in [0,1]$ 一致成立，

这里 $|(u,p)| := \sqrt{u^2+p^2}$ 。

为研究问题(1.3)，需考虑线性特征值问题

$$\begin{cases} -u^{(3)}(t) = \lambda A(t)u, \quad t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \alpha u'(\eta) \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $A(t) \in C([0,1],(0,\infty))$，$\lambda \in \mathbb{R}$ 为参数。记 $\lambda_1(A)$ 是问题(1.4)的主特征值，φ_1 为 $\lambda_1(A)$ 对应的特征函数。

主要结果如下：

定理 1.1 假定(H1)-(H3)成立，假设下列条件之一成立：

i) $\lambda_1(a) < \lambda < \lambda_1(b)$；

ii) $\lambda_1(b) < \lambda < \lambda_1(a)$；

则问题(1.3)至少存在一个正解。

2. 预备知识

引理 2.1 [9] (Rabinowitz 全局分歧定理)设 E 是 Banach 空间，考虑方程

$$x = \mu Lx + N(\mu, x), \ \mu \in \mathbb{R}, \ x \in E \tag{2.1}$$

假定：

(A1) 算子 $L: E \to E$ 为线性紧算子；

(A2) 非线性算子 $N:\mathbb{R}\times E\to E$ 全连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\|N(\mu,x)\|}{\|x\|}=0$；

(A3) μ_0 为 L 在 E 中的本征值，且其代数重数 $\chi(\mu_0)$ 为奇数，其中

$$\chi(\mu_0)=\dim\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty}\ker\left((I-\mu_0 L)^m\right)\right\}$$

记 $\mathcal{C}(\mu_0)$ 为(2.1)式的非平凡解的闭包中包含点 $\mathcal{C}(\mu_0)$ 的连通分支，则有以下两种情形之一出现：

i) $\mathcal{C}(\mu_0)$ 无界；

ii) $\mathcal{C}(\mu_0)$ 还连接 $(\tilde{\mu},0)$，$\tilde{\mu}$ 是不同于 μ_0 的本征值。

引理 2.2 [9] (Krein-Rutman 定理)设 E 是一个 Banach 空间，记 $L(E)$ 为有界线性算子 $T:E\to E$ 的全体在范数 $\|T\|=\sup\{\|Tx\| \mid \|x\|=1\}$ 下构成的 Banach 空间，$r(T)=\sup\{|\lambda| \mid \lambda\in\rho(T)\}$ 是 T 的谱半径。$K\subset X$ 是一个锥，满足 $\overline{K\setminus K}=E$，设 $T\in L(E)$ 是一个紧的正算子，且 $r(T)>0$，则 $r(T)$ 是 T 的具有正特征函数的特征值。

引理 2.3 [2] 假设 $h(t)\in C([0,1],\mathbb{R})$，若 $0<\eta<1$，$1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$，则线性边值问题

$$\begin{cases}-u^{(3)}(t)=h(t), & t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=0, & u'(1)=\alpha u'(\eta)\end{cases}\tag{2.2}$$

存在唯一解 $u(t)$，且

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s.\tag{2.3}$$

其中

$$G(t,s)=\frac{1}{2(1-\alpha\eta)}\begin{cases}(2ts-s^2)(1-\alpha\eta)+t^2 s(\alpha-1), & s\le\min\{\eta,t\},\\ t^2(1-\alpha\eta)+t^2 s(\alpha-1), & t\le s\le\eta,\\ (2ts-s^2)(1-\alpha\eta)+t^2(\alpha\eta-s), & \eta\le s\le t,\\ t^2(1-s), & \max\{\eta,t\}\le s.\end{cases}$$

引理 2.4 [2] 令 $0<\eta<1$ 且 $1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$，则有

$$0\le G(t,s)\le g_0(s)=\frac{1+\alpha}{1-\alpha\eta}s(1-s),\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1].\tag{2.4}$$

引理 2.5 [2] 令 $0<\eta<1$ 且 $1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$，则有

$$G(t,s)\ge\kappa_0 g_0(s),\quad \forall(t,s)\in\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right]\times[0,1],\tag{2.5}$$

其中 $0<\kappa_0=\dfrac{\eta^2}{2\alpha^2(1+\alpha)}\min\{\alpha-1,1\}<1$。

引理 2.6 [2] Green 函数 $G(t,s)$ 的一阶导数为

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)=\frac{1}{1-\alpha\eta}\begin{cases}s(1-\alpha\eta)+ts(\alpha-1), & s\le\min\{\eta,t\},\\ t(1-\alpha\eta)+ts(\alpha-1), & t\le s\le\eta,\\ s(1-\alpha\eta)+t(\alpha\eta-s), & \eta\le s\le t,\\ t(1-s), & \max\{\eta,t\}\le s.\end{cases}$$

设 $0<\eta<1$ 且 $1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$，则有

i) $0\le\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s)\le g_1(s)=\dfrac{1-s}{1-\alpha\eta},\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$；

ii) $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ge\kappa_1 g_1(s),\forall(t,s)\in\left[\dfrac{\eta}{\alpha},\eta\right]\times[0,1],0<\kappa_1=\eta<1$。

设 $Y=C[0,1]$， $E=C^1([0,1],\mathbb{R})$ 分别在范数 $\|u\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$ 和 $\|u\|=\max\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty\}$ 下构成 Banach 空间。我们定义锥

$$K=\left\{u\in E:u(t)\ge0,t\in[0,1],u'(t)\ge0,t\in[0,1],\min_{t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right]}u(t)\ge\kappa_0\|u\|_\infty,\min_{t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right]}u'(t)\ge\kappa_1\|u'\|_\infty\right\}.$$

定义积分算子 $T:E\to E$，

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s,t\in[0,1].$$

引理 2.7 假设(H1)-(H2)成立，则 $T:K\to K$ 是全连续算子。

证明 先证对任意 $u\in K$，有 $Tu\in K$。

显然，$Tu(t)\ge0,t\in[0,1]$，根据引理 2.4 可得

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\le\lambda\int_0^1g_0(s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s.$$

则有

$$\|Tu\|_\infty\le\lambda\int_0^1g_0(s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s.$$

所以，对 $t\in\left[\dfrac{\eta}{\alpha},\eta\right]$，由引理 2.4 及引理 2.5，我们有

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\ge\lambda\int_0^1\kappa_0g_0(s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\ge\kappa_0\|Tu\|_\infty,$$

可推得

$$\min_{t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right]}Tu(t)\ge\kappa_0\|Tu\|_\infty.$$

其次，由于 $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ge0,(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，可直接证得

$$(Tu)'(t)\le\lambda\int_0^1\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s.$$

根据引理 2.6，可得

$$(Tu)'(t)\le\lambda\int_0^1g_1(s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s,\tag{2.6}$$

对(2.6)式取上确界，$t\in[0,1]$，

$$\left\|(Tu)'\right\|_\infty\le\lambda\int_0^1g_1(s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s.$$

所以，对 $t\in\left[\dfrac{\eta}{\alpha},\eta\right]$，由引理 2.6 得

$$(Tu)'(t) \ge \lambda\int_0^1 \kappa_1 g_1(s) f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s \ge \kappa_1 \left\|(Tu)'\right\|_\infty,$$

则

$$\min_{t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right]} Tu(t) \ge \kappa_1 \left\|(Tu)'\right\|_\infty.$$

故

$$\min_{t\in\left[\frac{\eta}{\alpha},\eta\right]} Tu(t) \ge \max\left\{\kappa_0\left\|Tu\right\|_\infty, \kappa_1\left\|(Tu)'\right\|_\infty\right\}.$$

所以 $Tu \in K$。

再证 T 是一个紧算子。设

$$B = \left\{u\in E; \|u\| \le r, \forall r > 0\right\}。$$

下证 $T(B)$ 在 $C^1[0,1]$ 上一致有界，由于 $u\in B$，因此存在一个与 r 有关的函数 $\phi_r(s)$，使得对任意的 $s\in[0,1]$，有 $f(s,u(s),u'(s)) \le \phi_r(s)$，所以有

$$\begin{aligned}\|Tu\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_0^1 G(t,s) f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right| \\ &\le \lambda\int_0^1 g_0(s) f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s \\ &\le \lambda\int_0^1 g_0(s)\phi_r(s)\mathrm{d}s := M_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|(Tu)'\right\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right| \\ &\le \lambda\int_0^1 g_1(s) f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s \\ &\le \lambda\int_0^1 g_1(s)\phi_r(s)\mathrm{d}s := M_1\end{aligned}$$

则有

$$\|Tu\| \le \max\{M_0, M_1\}, \forall u\in B.$$

再证 $T(B)$ 在 $C^1[0,1]$ 上等度连续，对任意 $t_1,t_2\in[0,1]$，不妨设 $t_1<t_2$，则

$$\begin{aligned}\left|Tu(t_1)-Tu(t_2)\right| &\le \lambda\int_0^1\left|G(t_1,s)-G(t_2,s)\right| f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s \\ &\le \lambda\int_0^1\left|G(t_1,s)-G(t_2,s)\right|\phi_r(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因为 $G(\cdot,s)$ 连续，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|t_2-t_1|<\delta$ 时，有 $\left|Tu(t_1)-Tu(t_2)\right|<\varepsilon$。同样的，

$$\begin{aligned}\left|(Tu)'(t_1)-(Tu)'(t_2)\right| &\le \lambda\int_0^1\left|\frac{\partial G}{\partial t}(t_1,s)-\frac{\partial G}{\partial t}(t_2,s)\right| f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s \\ &\le \lambda\int_0^1\left|\frac{\partial G}{\partial t}(t_1,s)-\frac{\partial G}{\partial t}(t_2,s)\right|\phi_r(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

因为 $\frac{\partial G}{\partial t}(\cdot,s)$ 连续，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|t_2-t_1|<\delta$ 时，有 $\left|(Tu)'(t_1)-(Tu)'(t_2)\right|<\varepsilon$。

所以，$T(B)$ 在 $C[0,1]$ 上等度连续上，$T:K\to K$ 是全连续算子，结论得证。

引理 2.8 假设(H2)-(H3)成立，则线性特征值问题(1.4)具有第一个特征值 $\lambda_1(l,m)$ 是简单的，并且对应的特征函数 φ_1 同样为正。

证明 显然，锥 K 是正规锥且有非空内部，$\overline{K\setminus K}=E$，$K$ 是一个完全锥。由引理 2.7 可知，T 是一个紧的正算子。进一步，根据引理 2.2 可知 T 的谱半径 $r(T)>0$ 是简单特征值，且存在 $\varphi_1>0$，使得 $T\varphi_1=r(T)\varphi_1$。

3. 主要结果的证明

定义算子 $L:D(L)\to X$，

$$Lu:=-u''',u\in D(L), \tag{3.1}$$

其中 $D(L)=\{u\in C^3[0,1]:u(0)=u'(0)=0,u'(1)=\alpha u'(\eta)\}$，易知 $L^{-1}:Y\to E$ 是紧的。假设存在 $\zeta,\xi\in C([0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty),[0,\infty))$，使得

$$f(t,u,p)=a(t)u+\zeta(t,u,p), \tag{3.2}$$

$$f(t,u,p)=b(t)u+\xi(t,u,p). \tag{3.3}$$

由条件(H3)可得

$$\lim_{|(u,p)|\to 0}\frac{\zeta(t,u,p)}{|(u,p)|}=0 \text{ 对 } t\in[0,1] \text{ 一致成立，} \tag{3.4}$$

$$\lim_{|(u,p)|\to \infty}\frac{\xi(t,u,p)}{|(u,p)|}=0 \text{ 对 } t\in[0,1] \text{ 一致成立，} \tag{3.5}$$

令

$$\tilde{\xi}(r)=\max\{\xi(t,u,p)\mid 0\le|(u,p)|\le r,t\in[0,1]\}, \tag{3.6}$$

则 $\tilde{\xi}$ 非减且

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\tilde{\xi}(r)}{r}=0. \tag{3.7}$$

考虑从平凡解 $u\equiv 0$ 处产生的分歧问题

$$Lu=\theta\lambda a(t)u(t)+\theta\lambda\zeta(t,u,u'). \tag{3.8}$$

易见，方程(3.8)等价于积分方程

$$\begin{aligned}u(t)&=\theta\left[\int_0^1 G(t,s)\lambda a(s)u(s)\mathrm{d}s\right]\\&:=\left(\theta L^{-1}\lambda a(\cdot)u(\cdot)+\theta L^{-1}\left[\lambda\zeta((\cdot),u(\cdot),u'(\cdot))\mathrm{d}s\right]\right)(t).\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&\left\|L^{-1}\left[\lambda\zeta((\cdot),u(\cdot),u'(\cdot))\mathrm{d}s\right]\right\|\\&=\max_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1 G(t,s)\zeta(t,u,u')\mathrm{d}s,\int_0^1 G'(t,s)\zeta(t,u,u')\mathrm{d}s\right\}\\&\le N\left\|\zeta((\cdot),u(\cdot),u'(\cdot))\right\|_\infty.\end{aligned}$$

所以

$$\left\|L^{-1}\left[\zeta\left(t,u'(\cdot),u'(\cdot)\right)\right]\right\|=o\left(\|u\|\right),\ u\to 0.$$

根据引理 2.1 可知，存在问题(1.3)的正解集的连接$\left(\frac{\lambda_1(a)}{\lambda},0\right)$和$\infty$的连通分支$\mathcal{C}^+$，进而，$\mathcal{C}^+$的闭包是$\left(\frac{\lambda_1(a)}{\lambda},0\right)\cup\mathcal{C}^+$。根据引理 1，本文只需考虑主特征值处产生的连通分支。

定理 1.1 的证明

显然，当$\lambda=1$时，问题(3.8)的任意一个解$(1,u)$都是问题(1.3)的解u。以下只需证明$\mathcal{C}^+$穿过超平面$\{1\}\times E\in\mathbb{R}\times E$，为此需要证明$\mathcal{C}^+$连接$\left(\frac{\lambda_1(a)}{\lambda},0\right)$到$\left(\frac{\lambda_1(b)}{\lambda},\infty\right)$。设$(\mu_n,y_n)\in\mathcal{C}^+$满足

$$\mu_n+\|y_n\|\to\infty$$

这里对任意的$n\in\mathbb{N}$，$\mu_n>0$。这是因为$(0,0)$是$\lambda=0$时问题(3.8)的唯一解且$\mathcal{C}^+\cap(\{0\}\times E)=\varnothing$。

情形 1：$\frac{\lambda_1(a)}{\lambda}<1<\frac{\lambda_1(b)}{\lambda}$；我们需证

$$\left(\frac{\lambda_1(a)}{\lambda},\frac{\lambda_1(b)}{\lambda}\right)\subseteq\left\{\lambda\in\mathbb{R}\,|\,\exists(\lambda,u)\in\mathcal{C}^+\right\}.$$

证明分下面两步：

第一步：需证若存在一个常数$M>0$，使得

$$\mu_n\subset(0,M],\tag{3.10}$$

则连通分支$\mathcal{C}^+$连接$\left(\frac{\lambda_1(a)}{\lambda},0\right)$和$\left(\frac{\lambda_1(b)}{\lambda},\infty\right)$。

这种情形下有

$$\|y_n\|\to\infty.\tag{3.11}$$

在方程

$$Ly_n-\mu_n\lambda a(t)y_n=\mu_n\lambda a(t)\xi\left(t,y_n(t),y_{n'}(t)\right)\tag{3.12}$$

令$\overline{y}_n=\frac{y_n}{\|y_n\|}$，显然$\overline{y}_n$在$E$中有界，故$\overline{y}_n$在$E$中有收敛子列，即存在$\overline{y}\in E$，使得$\overline{y}_n\to\overline{y}$且$\|\overline{y}\|=1$。进一步，由条件(H3)和(3.5)式可知$\tilde{\xi}$非减，可得

$$\frac{\left|\xi\left(y_n(t)\right)\right|}{\|y_n\|}\le\frac{\tilde{\xi}\left(\left|y_n(t)\right|\right)}{\|y_n\|}\le\frac{\tilde{\xi}\left(\|y_n\|_\infty\right)}{\|y_n\|}\le\frac{\tilde{\xi}\left(\|y_n\|\right)}{\|y_n\|}$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\xi\left(y_n(t)\right)\right|}{\|y_n\|}=0.\tag{3.13}$$

对于(3.12)式，当$n\to\infty$时，有

$$\overline{y}(t)=\int_0^1G(t,s)\overline{\mu}\lambda a(s)\overline{y}(s)\mathrm{d}s.$$

这里 $\overline{\mu} := \lim_{n\to\infty} \mu_n$。

因此可得

$$L\overline{y} = \overline{\mu}\lambda a(t)\overline{y}(t). \tag{3.14}$$

下证

$$\overline{y} \in \mathcal{C}^{+}. \tag{3.15}$$

由于 $E \setminus \mathcal{C}^{+}$ 是开集，故存在邻域 $U(\overline{Y}, \rho_0)$ 使得

$$U(\overline{Y}, \rho_0) \subset E \setminus \mathcal{C}^{+}.$$

这与 $\overline{y}_n \to \overline{y}$，$\overline{y} \in E$ 和 $\overline{y}_n \in \mathcal{C}^{+}$ 矛盾。因此 $\overline{y} \in \mathcal{C}^{+}$。根据引理 2.8 和特征值理论，可得

$$\overline{\mu} = \frac{\lambda_1(a)}{\lambda}, \tag{3.16}$$

因此，$\mathcal{C}^{+}$ 连接 $\left(\frac{\lambda_1(a)}{\lambda}, 0\right)$ 和 $\left(\frac{\lambda_1(b)}{\lambda}, \infty\right)$。

第二步：我们需证存在常数 M，使得对任意的 n，有 $\mu_n \in (0, M]$

对 $(\mu_n, y_n) \in \mathcal{C}^{+}$，一方面，根据引理 2.4 可得

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \lambda\mu_n \int_0^1 G(t,s) f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right) \mathrm{d}s \\ &\le \lambda\mu_n \int_0^1 G(t,s) \frac{f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)} \mathrm{d}s \|y_n\| \\ &\le \lambda\mu_n \int_0^1 \frac{1+\alpha}{1-\alpha\eta} s(1-s) \frac{f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)} \mathrm{d}s \|y_n\| \end{aligned}$$

所以

$$\mu_n \ge \left(\lambda \int_0^1 \frac{1+\alpha}{1-\alpha\eta} s(1-s) \frac{f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)} \mathrm{d}s\right)^{-1}. \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} y_{n'}(t) &= \lambda\mu_n \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right) ds \\ &\le \lambda\mu_n \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \frac{f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)} \mathrm{d}s \|y_n\| \\ &\le \lambda\mu_n \int_0^1 \frac{1-s}{1-\alpha\eta} \frac{f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)} \mathrm{d}s \|y_n\|, \end{aligned}$$

所以

$$\mu_n \ge \left(\lambda \int_0^1 \frac{1-s}{1-\alpha\eta} \frac{f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)} \mathrm{d}s\right)^{-1}. \tag{3.18}$$

另一方面，结合引理 2.5，有

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \lambda\mu_n \int_0^1 G(t,s) f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right) \mathrm{d}s \\ &\ge \lambda\mu_n \int_0^1 \kappa_0 \frac{1+\alpha}{1-\alpha\eta} s(1-s) \frac{f\left(s, y_n(s), y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)} \mathrm{d}s \|y_n\|, \end{aligned}$$

进一步可得

$$\mu_n \le \left(\lambda\int_0^1 \kappa_0 \frac{1+\alpha}{1-\alpha\eta} s(1-s)\frac{f\left(s,y_n(s),y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)}\mathrm{d}s\right)^{-1} := M_2, \tag{3.19}$$

其中 $0<\kappa_0=\dfrac{\eta^2}{2\alpha^2(1+\alpha)}\min\{\alpha-1,1\}<1$。

$$\begin{aligned} y_{n'}(t) &= \lambda\mu_n\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f\left(s,y_n(s),y_{n'}(s)\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \lambda\mu_n\int_0^1 \frac{(1-s)\eta}{1-\alpha\eta}\frac{f\left(s,y_n(s),y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)}\mathrm{d}s\|y_n\|, \end{aligned}$$

进一步可得

$$\mu_n \le \left(\lambda\int_0^1 \frac{(1-s)\eta}{1-\alpha\eta}\frac{f\left(s,y_n(s),y_{n'}(s)\right)}{y_n(s)}\mathrm{d}s\right)^{-1} := M_3, \tag{3.20}$$

记

$$M=\max\{M_2,M_3\}.$$

所以存在常数 $M>0$，使得 $|\mu_n|\le M$，结论得证。

情形 2： $\dfrac{\lambda_1(b)}{\lambda}<1<\dfrac{\lambda_1(a)}{\lambda}$；这种情形下，

若存在 $(\mu_n,y_n)\in\mathcal{C}^+$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mu_n+\|y_n\|\right)=\infty$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n=\infty.$$

则有

$$\left(\frac{\lambda_1(b)}{\lambda},\frac{\lambda_1(a)}{\lambda}\right)\subseteq\left\{\lambda\in(0,\infty)\,|\,(\lambda,u)\in\mathcal{C}^+\right\},$$

进一步，有 $\left(\{1\}\times E\right)\cap\mathcal{C}^+\ne\varnothing$。

假设存在常数 $M>0$，使得对任意的 $n\in N$，有

$$\mu_n\in(0,M].$$

与情形 1 第一步证明方法类似，可得

$$(\mu_n,y_n)\to\left(\frac{\lambda_1(a)}{\lambda},0\right),\quad n\to\infty.$$

因此 $\mathcal{C}^+$ 连接 $\left(\dfrac{\lambda_1(b)}{\lambda},\infty\right)$ 和 $\left(\dfrac{\lambda_1(a)}{\lambda},0\right)$，结论得证。

参考文献

[1] Ma, R.Y. (1998) Multiplicity Results for a Third Order Boundary Value Problem at Resonance. *Nonlinear Analysis*, **32**, 493-499. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(97)00494-X

[2] Guo, L.J., Sun, J.P. and Zhao, Y.H. (2008) Existence of Positive Solutions for Nonlinear Third-Order Three-Point Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*, **68**, 3151-3158. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.03.008

[3] Cabada, A., Luciaopez-Somoza, L. and Minhos, F. (2017) Existence, Non-Existence and Multiplicity Results for a Third Order Eigenvalue Three-Point Boundary Value Problem. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **10**, 5445-5463. https://doi.org/10.22436/jnsa.010.10.28

[4] Yao, Q.L. (2009) Positive Solutions of Singular Third-Order Three-Point Boundary Value Problems. *Journal of Beihua University*, **354**, 207-212. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.12.057

[5] Ma, R.Y. and Thompson, B. (2004) Nodal Solutions for Nonlinear Eigenvalue Problems. *Nonlinear Analysis*, **59**, 707-718. https://doi.org/10.1016/j.na.2004.07.030

[6] Luo, H. and Ma, Q.Z. (2005) Positive Solutions to a Generalized Second-Order Three-Point Boundary-Value Problem on Time Scales. *Electronic Journal of Differential Equations*, **17**, 702-708.

[7] Sun, Y.P. (2009) Positive Solutions for Third-Order Three-Point Nonhomogeneous Boundary Value Problems. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 45-51. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.02.002

[8] Gao, C.H. and Geng, T.M. (2016) Positive Solutions of a Discrete Nonlinear Third-Order Three-Point Eigenvalue Problem with Sign-Changing Green's Function. *Advances in Difference Equations*, **1**, 110. https://doi.org/10.1186/s13662-016-0837-z

[9] 徐登洲, 马如云. 线性微分方程的非线性扰动[M]. 北京: 科学出版社, 2008.