Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 248-254
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112033

Hans汉斯

多面体空间上的保正交算子

丁　蕾，吕昀放

哈尔滨理工大学，黑龙江 哈尔滨
Email: 1280134223@qq.com, 1767443004@qq.com

收稿日期：2021年1月12日；录用日期：2021年2月15日；发布日期：2021年2月23日

摘　要

本文主要研究多面体空间上保正交算子的性质。我们证明了二维多面体空间的单位球面上的保正交算子是一个满等距，且可以把二维多面体空间的单位球面映成二维多面体空间的单位球面，进而可以延拓到全空间等距。

关键词

多面体空间，保正交算子，等距

The Preserving Orthogonal Operators on Polyhedral Space

Lei Ding, Yunfang Lv

Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang
Email: 1280134223@qq.com, 1767443004@qq.com

Received: Jan. 12th, 2021; accepted: Feb. 15th, 2021; published: Feb. 23rd, 2021

Abstract

In this paper, we research the properties of preserving orthogonal operators on polyhedral space. We proved that the orthogonality-preserving operator on the unit sphere of a two-dimensional polyhedron space is a surjective isometry, and the unit sphere of a two-dimensional polyhedron space can be mapped into a unit sphere of a two-dimensional polyhedron space, and then the surjective isometry can be extended to a linear isometry on the whole space.

Keywords

Polyhedral Space, Orthogonality-Preserving Operator, Isometry

文章引用: 丁蕾, 吕昀放. 多面体空间上的保正交算子[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 248-254.
DOI: 10.12677/pm.2021.112033

1. 引言

欧氏空间中的正交性的概念在各个领域都广泛的应用，一些学者将其概念推广到一般空间中，引出了广义正交性的概念。设 X 为一个赋范线性空间，B_X 为 X 的单位球，S_X 为 X 的单位球面，$x,y\in X$，如果不等式 $\|x+\alpha y\|\ge\|y\|$ 对任意的 $\alpha\in R$ 都成立，我们称 x Birkhoff 正交于 y，记作 $x\perp_B y$。在一般赋范线性空间中，Birkhoff 正交具有齐次性，但不具有对称性和可加性。

设 X,Y 为赋范线性空间，$T:X\to Y$ 为保 Birkhoff 正交映射，若 $x,y\in X$ 满足 $x\perp_B y$，则有

$$T(x)\perp_B T(y)$$

两个内积空间之间的保正交映射一定是一个等距映射的标量倍[1]。

2. 多面体空间上的保正交算子

定义 1 [2]设 X 是一个赋范线性空间，$x,y\in X$。若不等式

$$\|x+\alpha y\|\ge\|x\|$$

对任意的实数 α 都成立，则我们称 x Birkhoff 正交于 y，记作 $x\perp_B y$。

如果 $x\perp_B y$，可以理解为 x 到 y 所在直线上任意一点的距离都不小于 $\|x\|$，也可以理解为 $x+\alpha y$ 所在直线在 x 点支撑球面 $\{z:z\in span\{x,y\},\|z\|=\|x\|\}$。

定理 1 设 x 和 y 是赋范线性空间 X 中两个线性无关的向量，$L=span\{x,y\}$，则 $x\perp_B y$ 当且仅当直线 $x+\langle -y,y\rangle$ 在 x 点出支撑球面 $\|x\|B_L$。

定理 2 [3]设 X 为一个赋范线性空间，$x,y\in X$，则 $x\perp_B y$ 当且仅当存在线性泛函 f，满足 $|f(x)|=\|f\|\|x\|$，并且 $f(y)=0$。

定理 3 设 X 是一个二维赋范线性空间，$x,y\in S(X)$，若 X 上存在一个非零元

z，使得 $x\perp_B z$，$y\perp_B z$，则我们有 $[x,y]\subset S(X)$ 或者 $[x,-y]\subset S(X)$。

证明：由于 X 是一个二维赋范线性空间，故存在 $f\in S(X^*)$。使得

$$f(z)=0$$

因此，对于任意的 $x_0\in S(X)$，$\alpha\in R$，有

$$f(x_0)=f(x_0+\alpha z)\le\inf_{\alpha\in R}\|x_0+\alpha z\|\le\|x_0\|=1$$

故有

$$\sup_{x_0\in S(X)} f(x_0+\alpha z)=\sup_{x_0\in S(X)}\left(\inf_{\alpha\in R}\|x_0+\alpha z\|\right)=1$$

由于 $x\perp_B z$，故有

$$\sup_{x_0\in S(X)}\left(\inf_{\alpha\in R}\|x_0+\alpha z\|\right)=\inf_{\alpha\in R}\|x+\alpha z\|=1$$

那么

$$f(x)=1$$

又因为 $y \perp_B z$，根据 Birkhoff 正交定义，对任意的 $\alpha \in R$ 有

$$\|y+\alpha z\| \ge \|y\|,$$

$$\|-y-\alpha z\| \ge \|-y\|,$$

取 $\beta=-\alpha$，有

$$\|-y+\beta z\| \ge \|-y\|,$$

则

$$-y \perp_B z,$$

故同理可得 $f(y)=1$ 或 $f(-y)=1$。

由映射 f 的线性性可得

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=1$$

或

$$f(\lambda x+(1-\lambda)(-y))=1$$

其中 $\lambda \in [0,1]$。由于

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \ge f(\lambda x+(1-\lambda)y)=1$$

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \le \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|=1$$

$$\|\lambda x+(1-\lambda)(-y)\| \ge f(\lambda x+(1-\lambda)(-y))=1$$

$$\|\lambda x+(1-\lambda)(-y)\| \le \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|-y\|=1$$

所以

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=1$$

$$\|\lambda x+(1-\lambda)(-y)\|=1$$

根据 λ 的任意性有 $[x,y]\subset S(X)$ 或 $[x,-y]\subset S(X)$。

定理 4 [4]对赋范线性空间中的任意两个向量 x 和 y，总存在一个实数 α 使得 $x \perp_B \alpha x+y$。

已知多边形空间 X 的单位球上的不光滑点至多可数个，现设 $ext(A)$ 为 B_X 的端子集，$NonS(S_X)$ 是 S_X 上不光滑点集，显然 $NonS(S_X)\subset ext(A)$。根据多边形定义，对任意的 $x\in ext(A)$，存在 S_X 的支撑超平面 H_{f_1},H_{f_2}，使得

$$x\in H_{f_1}\cap H_{f_2}$$

因此

$$NonS(S_X)=ext(A)$$

于是有

$$S_X\subset B_X=conv(ext(A))=conv(NonS(S_X))$$

不妨设

$$NonS(S_X)=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$$

其中 $x_1,x_2\in H_{f_1},x_2,x_3\in H_{f_2}$，于是有 $S_X=\bigcup_{x_i\in NonS(S_X)}[x_i,x_{i+1}]$。

定理 5 [5]设 X 和 Y 是赋范空间，$T_0: S_X \to S_Y$ 是一个等距映射，那么自然拓展 T 是线性等距映射当且仅当对任意是 $x, y \in S_X$ 且 $\|x+y\| \geq 1$，有 $T(x+y) = T(x) + T(y)$。

定理 6 设 X 为二维多边形空间，Y 为赋范线性空间，若 $T: X \to Y$ 为一个保 Birkhoff 正交的满线性映射，则存在 F 为 X 到 Y 上的一个满等距且 Y 为二维多边形空间。

证明：根据上文内容可知，存在 $A = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\} \subset NonS(S_X)$，满足对任意的 $x_i \in A$，有 $x_i, x_{i+1} \in H_{y_i}$，H_{y_i} 为 S_X 的支撑超平面，使得 $S_X = \bigcup_{x_i \in NonS(S_X)} [x_i, x_{i+1}]$。

对于任意不同的点 p 和 q，我们分别用 $[p,q], \langle p,q \rangle$ 和 $[p,q\rangle$ 表示 p 和 q 之间的线段，穿过 p 和 q 的直线和从 p 开始穿过 q 的射线，令 $y_1 \in S_X$，我们用 $H_{y_1}^+$ 和 $H_{y_1}^+$ 表示以直线 $\langle -y_1, y_1 \rangle$ 为边界的 X 两个半开平面，用 $l(y_1), r(y_1)$ 表示 $S_X \cap H_{y_1}^+$ 上平行于直线 $\langle -y_1, y_1 \rangle$ 的最大线段 $[r(y_1), l(y_1)]$ 的两个端点，且有 $r(y_1) - l(y_1)$ 是 y_1 的正整数倍，当 S_X 上没有平行于直线 $\langle -y_1, y_1 \rangle$ 的非平凡线段，那么 $r(y_1) = l(y_1) \in S_X \cap H_{y_1}^+$。

不妨设 y_1 满足 $r(y_1) \neq l(y_1)$，令 $r(y_1) = x_1, l(y_1) = x_2$ 则有

$$x_1 \perp_B y_1, x_2 \perp_B y_1$$

$$y_1 = k_1(x_2 - x_1), k_1 \in R$$

由于 T 为保 Birkhoff 正交映射，故

$$T(x_1) \perp_B T(y_1)$$

$$T(x_2) \perp_B T(y_1)$$

设映射 $T_1: Y \to Y$ 满足

$$T_1 T(x_1) = \frac{T(x_1)}{\|T(x_1)\|}$$

$$T_1 T(x_2) = \frac{T(x_2)}{\|T(x_2)\|}$$

$$T_1(0) = 0$$

且

$$T_1(\lambda T(x_1) + (1-\lambda) T(x_2)) = \lambda T(x_1) + (1-\lambda) T(x_2), \lambda \in R$$

故

$$T_1 T(x_1), T_1 T(x_2) \in S_Y$$

易知 $T_1 T$ 是一个线性算子。由于

$$\begin{aligned}
\|T_1 T(x_1) + \alpha T(y_1)\| &= \left\| \frac{1}{\|T(x_1)\|} T(x_1) + \alpha T(y_1) \right\| \\
&= \frac{1}{\|T(x_1)\|} \|T(x_1) + \|T(x_1)\| \alpha T(y_1)\| \\
&\geq \frac{1}{\|T(x_1)\|} \|T(x_1)\| \\
&= \|T_1 T(x_1)\|
\end{aligned}$$

故

$$T_1T(x_1)\perp_B T(y_1)$$

同理可得

$$T_1T(x_2)\perp_B T(y_1)$$

由**定理 3** 有

$$[T_1T(x_1),T_1T(x_2)]\subset S_Y$$

或

$$[T_1T(x_1),-T_1T(x_2)]\subset S_Y$$

由于不满足

$$T_1T(\lambda x_1+(1-\lambda)(-x_2))\perp_B T(y_1)$$

故

$$[T_1T(x_1),-T_1T(x_2)]\not\subset S_Y$$

现需证 $T_1T(x_1)\neq T_1T(x_2)$，即 T 为单射，若 T 不是单射，则存在 $x\neq y$ 使得

$$T(x)=T(y)$$

令

$$z=x-y$$

根据**定理 4**，对任意的 $v\notin\langle -z,z\rangle$，存在 $\alpha\in R$，满足

$$z\perp_B \alpha z+v$$

于是有

$$T(z)\perp_B T(\alpha z+y)$$

由于

$$T(z)=T(x-y)=T(x)-T(y)=0$$

故

$$T(z)\perp_B T(y)$$

由于 v 的任意性，故存在 $v\in X$，使得

$$z\not\perp_B v$$

这与 $T(z)\perp_B T(y)$ 矛盾，故 T 为单射。于是有

$$T(y)=\alpha_1(T_1T(x_1)-T_1T(x_2)),\alpha_1\in R$$

那么就有

$$\alpha_1(T_1T(x_1)-T_1T(x_2))=T(k_1(x_1-x_2))$$

$$\Rightarrow T_1T(x_2-x_1)=\frac{k_1}{\alpha_1}T(x_2-x_1)$$

$$\Rightarrow T_1T(x_2)-T_1T(x_1)=\frac{T(x_2)}{\|T(x_2)\|}-\frac{T(x_1)}{\|T(x_1)\|}=\frac{k_1}{\alpha_1}T(x_2)-\frac{k_1}{\alpha_1}T(x_1)$$

故

$$\frac{1}{\|T(x_1)\|}=\frac{1}{\|T(x_2)\|}=\frac{k_1}{\alpha_1}$$

故

$$T_1T(x)=\frac{k_1}{\alpha_1}T(x),x\in[x_1,x_2]$$

故有

$$\|T_1T(x)\|=\|x\|=1$$

现取 $x_i,x_{i+1},y_i\in S_X$ ，令 $T_i:Y\to Y$ 为如下定义算子

$$T_iT(x_i)=\frac{T(x_i)}{\|T(x_i)\|}$$

$$T_iT(x_{i+1})=\frac{T(x_{i+1})}{\|T(x_{i+1})\|}$$

$$T_i(0)=0$$

且

$$T_i(\lambda T(x_i)+(1-\lambda)T(x_{i+1}))=\lambda T(x_i)+(1-\lambda)T(x_{i+1}),\lambda\in R$$

使得

$$T_iT(x_i')=\frac{k_i}{\alpha_i}T(x_i')$$

其中 $k_i,\alpha_i\in R,x_i'\in[x_i,x_{i+1}]$，且有

$$\frac{1}{\|T(x_i)\|}=\frac{1}{\|T(x_{i+1})\|}=\frac{k_i}{\alpha_i}$$

令 $T_{i+1}:Y\to Y$ 为

$$T_{i+1}T(x_{i+1})=\frac{T(x_{i+1})}{\|T(x_{i+1})\|}$$

$$T_{i+1}T(x_{i+2})=\frac{T(x_{i+2})}{\|T(x_{i+2})\|}$$

$$T_{i+1}(0)=0$$

且

$$T_{i+1}(\lambda T(x_{i+1})+(1-\lambda)T(x_{i+2}))=\lambda T(x_{i+1})+(1-\lambda)T(x_{i+2}),\lambda\in R$$

使得

$$T_{i+1}T(x_{i+1}')=\frac{k_{i+1}}{\alpha_{i+1}}T(x_{i+1}')$$

其中 $k_{i+1},\alpha_{i+1}\in R,x_{i+1}'\in[x_{i+1},x_{i+2}]$，且有

$$\frac{1}{\|T(x_{i+1})\|}=\frac{1}{\|T(x_{i+2})\|}=\frac{k_{i+1}}{\alpha_{i+1}}=\frac{k_i}{\alpha_i}$$

故取 $x_i' = x_{i+1}, x_{i+1}' = x_{i+1}$ 时，有

$$T_i T\left(x_{i+1}\right) = T_{i+1} T\left(x_{i+1}\right)$$

因此 $T_i = T_{i+1}$，由 i 的任意性可知，对任意的 $x \in S_X$ 有

$$\left\|T_1 T\left(x\right)\right\| = \left\|x\right\|$$

令 $F = T_1 T$，则 F 是单位球面间的满等距且 Y 为二维多边形空间。

球面间的满等距成立，根据定理 5，可以延拓到全空间等距。

3. 结论

本文我们广泛讨论了多面体空间中保正交算子的相关性质，证明了二维多面体空间的单位球面上的保正交算子是一个满等距，该算子可以把二维多面体空间的单位球面映成二维多面体空间的单位球面，且可以延拓到全空间等距。

参考文献

[1] Blanco, A. and Turnšek, A. (2006) On Maps That Preserve Orthogonality in Normed Spaces. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*: *Section A Mathematics*, **136**, 709-716. https://doi.org/10.1017/S0308210500004674

[2] Birkhoff, G. (1935) Orthogonality in Linear Metric Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **1**, 169-172. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-35-00115-6

[3] 吴森林. 正交性相关问题的研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2006.

[4] James, R.C. (1947) Orthogonality and Linear Functionals in Normed Linear Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **61**, 265-292. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1947-0021241-4

[5] Wang, R.D. and Huang, X.J. (2017) Isometries and Additive Mapping on the Unit Spheres of Normed Spaces. *Acta Mathematica Sinica*, **33**, 1431-1442. https://doi.org/10.1007/s10114-017-6589-1