Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(3), 319-322
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113042

Hans汉斯

测地曲率几何意义的证明

闫德宝

菏泽学院数学与统计学院，山东 菏泽
Email: bbs0415@yeah.net

收稿日期：2021年2月11日；录用日期：2021年3月11日；发布日期：2021年3月18日

摘 要

论文利用法曲率、测地曲率的概念，结合空间曲线的投影柱面、投影曲线的性质，对测地曲率的几何意义给出了一个较详细的证明。

关键词

测地曲率，几何意义，投影柱面，投影曲线

Proof of the Geometric Meaning of Geodesic Curvature

Debao Yan

School of Mathematics and Statistics, Heze University, Heze Shandong
Email: bbs0415@yeah.net

Received: Feb. 11th, 2021; accepted: Mar. 11th, 2021; published: Mar. 18th, 2021

Abstract

This work gives a detailed proof for the geometric meaning of geodesic curvature by using the definitions of normal curvature and geodesic curvature, and combining the characters of projective cylinder and projective cure.

Keywords

Geodesic Curvature, Geometric Meaning, Projective Cylinder, Projective Cure

文章引用: 闫德宝. 测地曲率几何意义的证明[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 319-322.
DOI: 10.12677/pm.2021.113042

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

测地曲率是微分几何中一个重要概念，由它可以引出曲面上的测地线、短程性和高斯－波捏(博内)公式等重要内容。文献[1] [2] [3]对测地曲率的几何意义都给出了证明，但证明过程都过于简单、笼统，学习者、读者很难完全理解。本文结合测地线几何意义的证明过程涉及到的知识点，如法曲率、测地曲率的概念，曲面上两曲线相切的证明等内容，给出了一个较完整、详细的证明过程。希望这一证明能让读者对测地曲率几何意义有较清晰、完整的理解，从而促进测地线、短程性和高斯－波捏相关内容的学习[4] [5] [6]。

2. 预备知识

设空间中有一 C^2 类的曲面 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$。$P=P(u,v)$ 是 Σ 上一点，Γ 为 Σ 上经过 P 点的任一曲线，其方程为：$u=u(s),v=v(s)$，或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(s),v(s))=\boldsymbol{r}(s)$，其中，$s$ 是自然参数。记 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(s)$ 为曲线 Γ 的切向量和主法向量，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u,v)$ 为曲面 Σ 上的单位法向量，θ 为 Γ 的主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角。

定义 1 [1] [2] [3]任取曲面 Σ 在点 P 处的一方向 $(d)=du:dv$，$\boldsymbol{n}$ 为 Σ 在点 $P(u,v)$ 处的法向量。称由 $\boldsymbol{n}$ 与(d)所确定的平面为 Σ 在点 P 沿方向(d)的法截面。法截面与曲面 Σ 的交线称为 Σ 在点 P 处沿方向(d)的法截线。

在本文中，法截面记为 π^*，法截线记为 Γ^*，Γ^* 上各点处的曲率记为 $k^*=k^*(s)$。

定义 2 [1] [2] [3]曲面 Σ 在点 P 沿方向(d)的法曲率定义为

$$k_n=\begin{cases}k^*,\text{法截线}\Gamma^*\text{向的}\boldsymbol{n}\text{的正向弯曲}\\-k^*,\text{法截线}\Gamma^*\text{向的}\boldsymbol{n}\text{的反向弯曲}\end{cases}$$

引理 1 [1] [2] [3]设曲面 Σ 上的曲线 Γ 与 Σ 在 P 点沿方向 $(d)=du:dv$ 的法截线 Γ^* 相切，则有

$$k_n=k\cos\theta=k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}。$$

其中，k_n 为 Σ 沿(d)的法曲率，k 为 Γ 在 P 点的曲率，θ 为 Σ 在 P 点的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 Γ 在 P 点的主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角。

注 1 曲率 $k=k(s)$ 反映的是空间曲线在其上一点处的弯曲程度；法曲率反映的是曲面在一点处沿某一方向的弯曲程度；曲面在其上一点处沿任一方向均存在一法截面、法截线和法曲率。

再引入一个新的向量。令 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}$ 是两两垂直的单位向量，且构成一右手系。显然，由 Σ 上一点 P 处的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 Σ 上的过 P 点的曲线 Γ 在该点的单位切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 确定的向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 位于 Σ 在 P 点的切平面内。

定义 3 [1] [2] [3]曲线 Γ 在 P 点的曲率向量 $\ddot{\boldsymbol{r}}=k\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 上的投影(也就是在 Σ 于 P 点的切平面内的投影)

$$k_g=\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\varepsilon},$$

称为曲线 Γ 在 P 点的测地曲率。其中，k 为曲线 Γ 在 P 点的曲率，$\boldsymbol{\beta}$ 为 Γ 在 P 点的主法向量。

定义 4 [1] [2] [3]设曲线 Γ 为曲面 Σ 上过点 P 的曲线，π 为 Σ 在 P 点的切平面。过 Γ 上每一点作切平面 π 的垂线，这些垂线组成一柱面 Σ^*，称 Σ^* 为 Γ 关于 π 的投影柱面。Σ^* 与 π 的交线，称为 Γ 关于 π 的(正)

投影曲线，记为Γ^*。

注 2 由定义 4 可知，曲线Γ与Γ^*都在投影柱面Σ^*上，且投影曲线Γ^*是平面π内的曲线。

引理 2 在定义 4 的条件下，曲线Γ与Γ^*在P点相切。

证 由定义 4 知，曲面Σ在P点的法线是柱面Σ^*的一条直母线。由于Γ在Σ^*上，故Γ在P点的切线L也是Σ^*在P点的一条切线。因此，Σ^*在P点的切平面就是由$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{\alpha}$ (过P点的一条直母线与Γ在P点的切线L)所确定的平面，记该切平面为π^*。

因为切线L既在π^*上，又在π上，所以π与π^*相交于直线L。

另一方面，Γ^*在P点的切线既要在π^*上，又要在其所在平面π上，故Γ^*在P点的切线也是π与π^*的交线，即Γ在P点切线也是L。

综上知，Γ与Γ^*在P点相切。

引理 3 在定义 4 的条件下，向量$\boldsymbol{\varepsilon}$是投影柱面Σ^*在P点的法向量。

证 由引理 2 知，Γ在P点的切向量$\boldsymbol{\alpha}$也是Σ^*在P点的一个切向量。Σ在P点的法向量$\boldsymbol{n}$也是Σ^*在P点的一个切向量。再由$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{n}$不平行)，$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}$知，$\boldsymbol{\varepsilon}$为$\Sigma^*$在$P$点的单位法向量。

引理 4 向量$\boldsymbol{\varepsilon}$是投影曲线Γ^*在P点的主法向量。

证 由引理 2 知，Γ在P点的切向量$\boldsymbol{\alpha}$也是Γ^*在P点的切向量。由$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}$知，$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\varepsilon}$。又由于$\Gamma^*$是平面曲线，$\Gamma^*$所在平面$\pi$即为其在 P 点的密切平面。再由$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}$都在平面$\pi$内知，$\boldsymbol{\varepsilon}$是投影曲线$\Gamma^*$在 P 点的主法向量。

3. 测地曲率的几何意义及其证明

定理 [1] [2] [3]曲面Σ上的曲线Γ在P点的测地曲率k_g的绝对值等于Γ在P点的切平面π上的正投影曲线Γ^*在P点的曲率k^*，即有$|k_g|=k^*$。

证 由定义 1 和引理 2，引理 3 知，切平面π是Σ^*在P点沿方向$\boldsymbol{\alpha}$的法截面，Γ^*是Σ^*在P点沿方向$\boldsymbol{\alpha}$的法截线。再由引理 3 和引理 4 知，Σ^*在P点的法向量和Γ^*在P点的主法向量重合，即它们之间的夹角$\theta=0$或π。于是，由引理 1 知，Σ^*在P点沿方向$\boldsymbol{\alpha}$的法曲率为$k_n^*=k^*\cos\theta=\pm k^*$，即

$$|k_n^*|=k^*. \tag{1}$$

其中，k^*是Γ^*在P点的曲率。

另一方面，由引理 1 可知，法曲率k_n^*还可以表示成曲线Γ在P点的曲率k乘以$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\varepsilon}$夹角的余弦，即$k_n^*=k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$。结合定义 3 可以得到

$$k_n^*=k_g. \tag{2}$$

其中，k_g为曲线Γ在P点的测地曲率。由(1)、(2)两式可得：

$$|k_g|=k^*.$$

定理得证。

基金项目

菏泽学院 2020 年教改项目(项目编号：2020010)。

参考文献

[1] 梅向明, 黄敬之. 《微分几何》(第五版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 吴大任. 《微分几何》(修订版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[3] 陈维桓. 《微分几何》[M]. 北京: 人们教育出版社, 2006.

[4] 邢家省, 高建全, 罗秀华. 曲面上测地线和短程线的性质[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2015, 28(1): 63-66, 86.

[5] 邢家省, 张光照. 曲面上曲线的测地曲率向量的注记[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2013, 34(4): 7-10, 15.

[6] 邢家省, 王拥军. 高斯-波捏公式的应用[J]. 河南科学, 2013, 31(1): 6-9.