Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(3), 336-345
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113045

具有Hardy项的半线性椭圆方程正径向对称解的存在性

李时雨

上海理工大学理学院，上海
Email: 928736127@qq.com

收稿日期：2021年2月15日；录用日期：2021年3月16日；发布日期：2021年3月24日

摘　要

本文主要研究了以下具有Dirichlet边界条件的椭圆方程在 $B_R(0)$ 中正径向对称解的存在性：$-div\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)=\mu\frac{u}{|x|^{2(1+a)}}+\frac{u^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}}{|x|^s}$，$u>0$。其中 $0\le a<\sqrt{\bar{\mu}}$，$\bar{\mu}=\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$，$2^*(a,s)=\frac{2(N-s)}{N-2(1+a)}$，$\frac{2Na}{N-2}\le s<2(1+a)$，$0<\varepsilon<2^*(a,s)-1$，$0\le\mu<\left(\sqrt{\bar{\mu}}-a\right)^2$ 且 $2^*(a,s)$ 是临界指数。我们主要利用山路引理、Moser迭代和比较原理证明该方程正径向对称解的存在性。

关键词

Hardy-Sobolev临界指数，山路引理，Moser迭代，比较原理

Existence of Positive Radial Symmetric Solutions for Semilinear Elliptic Equation with Hardy Exponent

Shiyu Li

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 928736127@qq.com

Received: Feb. 15th, 2021; accepted: Mar. 16th, 2021; published: Mar. 24th, 2021

文章引用: 李时雨. 具有 Hardy 项的半线性椭圆方程正径向对称解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 336-345.
DOI: 10.12677/pm.2021.113045

Abstract

In this paper, we study the existence of positive radial symmetric solutions of $-div\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)=\mu\frac{u}{|x|^{2(1+a)}}+\frac{u^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}}{|x|^{s}}$, $u>0$ in $B_R(0)$ with Dirichlet boundary condition. Here, $0\le a<\sqrt{\bar{\mu}}$, $\bar{\mu}=\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$, $2^*(a,s)=\frac{2(N-s)}{N-2(1+a)}$, $\frac{2Na}{N-2}\le s<2(1+a)$, $0<\varepsilon<2^*(a,s)-1$, $0\le\mu<\left(\sqrt{\bar{\mu}}-a\right)^2$ and $2^*(a,s)$ is a critical exponent. We mainly prove the existence of positive radial symmetric solution of the equation by using the mountain pass lemma, Moser iteration and comparison principle.

Keywords

Hardy-Sobolev Critical Exponent, Mountain Pass Lemma, Moser Iteration, Comparison Principle

1. 引言

本文主要研究了以下具有Dirichlet边界的椭圆方程：

$$\begin{cases}-div\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)=\mu\dfrac{u}{|x|^{2(1+a)}}+\dfrac{u^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}}{|x|^{s}}, u>0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N(N\ge3)$ 中的球 $B_R(0)$，且 $0\le a<\sqrt{\bar{\mu}}$，$\bar{\mu}=\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$，$2^*(a,s)=\frac{2(N-s)}{N-2(1+a)}$，$\frac{2Na}{N-2}\le s<2(1+a)$，$0<\varepsilon<2^*(a,s)-1$，$0\le\mu<\left(\sqrt{\bar{\mu}}-a\right)^2$。

(1.1)是具有加权Hardy位势的半线性椭圆方程，它属于非线性微分方程。而非线性微分方程是非线性科学的主要研究方向，它在微分几何、数学物理、生态学、经济学和工程技术中都有广泛而深入的研究，而椭圆方程便是实际问题中常见的非线性微分方程，如热力学中的气体燃烧理论[1]、几何中的Yamabe问题[2]、人口动力系统[3]、调和分析中的Hardy-Littlewood-Sobolev不等式[4]等。

Cao和Peng在[5]中利用Moser迭代和比较原理证明了下面方程径向对称解的存在性：

$$\begin{cases}-\Delta u=\mu\dfrac{u}{|x|^2}+u^{2^*-1-\varepsilon}, u>0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中，$0\le\mu<\bar{\mu}=\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$，$2^*=\frac{2N}{N-2}$。

受到文献[5]启发，本文研究了问题(1.1)，主要结论如下：

定理1.1： 假设 $2^*(a,s)=\dfrac{2(N-s)}{N-2(1+a)}$ 和 $\dfrac{2Na}{N-2}\le s<2(1+a)$，则问题(1.1)有径向对称正解。

2. 预备知识

问题(1.1)对应能量泛函为 $E:H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)\to\mathbb{R}$，其中

$$E(u)=\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^{2(1+a)}}\right)-\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}\int_\Omega |x|^{-s}|u|^{2^*(a,s)-\varepsilon}，\quad \forall u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right),$$

显然，$E(u)$ 的临界点就是(1.1)的解。在 $H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$ 上定义范数：

$$\|u\|\triangleq\left(\int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^{2(1+a)}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

下面给出本文需要的几个基本引理。

引理2.1： [6]

假设 $\dfrac{2Na}{N-2}\le s<2(1+a)$，$2\le q\le 2^*(a,s)$ 和 $0\le\mu<\left(\sqrt{\bar{\mu}}-a\right)^2$，有

(1) 加权Hardy不等式

$$\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^{2(1+a)}}\le\frac{1}{\left(\sqrt{\bar{\mu}}-a\right)^2}\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}}，\quad \forall u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right);$$

(2) 加权Sobolev-Hardy不等式存在一个常数 $C>0$，使得

$$\left(\int_\Omega\frac{u^q}{|x|^s}\right)^{1/q}\le C\|u\|，\quad \forall u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right);$$

(3) 对于 $q<2^*(a,s)$，从 $H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$ 到 $L^q(\Omega)$ 的映射 $u\to|x|^{-\frac{q}{s}}u$ 是紧的。

引理2.2： (Caffarelli-Kohn-Nirenberg不等式) [7]

对所有 $u\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$，有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bq}|u|^q\right)^{p/q}\le C_{a,b}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|Du|^p，$$

其中当 $n>p$ 时，$-\infty<a<\dfrac{n-p}{p}$，$0\le b-a\le 1$，$q=\dfrac{np}{n-p+p(b-a)}$；

当 $n\le p$ 时，$-\infty<a<\dfrac{n-p}{p}$，$\dfrac{p-n}{p}<b-a\le 1$，$q=\dfrac{np}{n-p+p(b-a)}$。

引理2.3： [8]

假设V是自反Banach空间且具有范数$\|\cdot\|$，设 $M\subset V$ 是V的弱闭子集。设 $E:M\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是强制的且在M上关于V序列弱下半连续，即假设满足以下条件：

(1) (强制性)当 $\|u\|\to\infty$ 时，$E(u)\to\infty$，其中 $u\in M$；

(2) (序列弱下半连续性)对任意 $u\in M$ 存在M中的序列 $\{u_m\}$，在V上 $u_m\rightharpoonup u$ 使得

$$E(u)\le\liminf_{m\to\infty}E(u_m);$$

那么E在M上下有界且在M上达到其最小值。

引理2.4： [6]

令 $u\in C^2\left(B_R\setminus\{0\}\right)\cap C^1\left(\overline{B_R}\setminus\{0\}\right)$ 且u满足

$$\begin{cases}\partial_i\left(|x|^{\beta}\partial_i u\right)+K|x|^{\alpha}u^q=0, & x\in B_R\setminus\{0\},\\ u>0, & x\in B_R\setminus\{0\},\\ u=0, & x\in\partial B_R\setminus\{0\},\end{cases}$$

其中K是正常数。那么当 $q\ge 1$，$\beta\left(\frac{1}{2}\beta+N-2\right)\le 0$ 和 $\frac{1}{2}\beta\ge\frac{\alpha}{q}$ 时，在 $B_R\setminus\{0\}$ 中u是径向对称的。

3. 主要结果证明

3.1. 正解存在性证明

首先，我们证明以下Dirichlet问题非负解的存在性：

$$\begin{cases}-div\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)=\mu\frac{u}{|x|^{2(1+a)}}+\frac{u^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}}{|x|^s}, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N\left(N\ge 3\right)$ 中的球 $B_R(0)$，且 $0\le a<\sqrt{\bar{\mu}}$，$\bar{\mu}=\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$，$2^*(a,s)=\frac{2(N-s)}{N-2(1+a)}$，$\frac{2Na}{N-2}\le s<2(1+a)$，$0<\varepsilon<2^*(a,s)-1$，$0\le\mu<\left(\sqrt{\bar{\mu}}-a\right)^2$。

问题(3.1)对应能量泛函为：

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}\int_\Omega|x|^{-s}|u|^{2^*(a,s)-\varepsilon},\quad u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)。$$

引理3.1： 对任意 $c\in\mathbb{R}$，泛函J都满足 $(PS)_c$ 条件。

证明： 取 $c\in\mathbb{R}$ 并假设 $\{u_n\}$ 是水平c上的PS序列，即 $J(u_n)\to c$ 和在 $\left(H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)\right)^*$ 内有 $J'(u_n)\to 0$。这意味着存在一个常数 $M>0$，使得

$$\left|J(u_n)\right|\le M.\tag{3.2}$$

根据 $J'(u_n)\to 0$，可得

$$o(1)\|u_n\|=\left\langle J'(u_n),u_n\right\rangle=\|u_n\|^2-\int_\Omega|x|^{-s}|u_n|^{2^*(a,s)-\varepsilon}.\tag{3.3}$$

计算(3.2) $-\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}$ (3.3)得，

$$\begin{aligned}M+o(1)\|u_n\|&\ge\frac{1}{2}\|u_n\|^2-\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}\int_\Omega|x|^{-s}|u|^{2^*(a,s)-\varepsilon}\\&\quad-\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}\|u_n\|^2+\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}\int_\Omega|x|^{-s}|u|^{2^*(a,s)-\varepsilon}\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}\right)\|u_n\|^2\end{aligned}$$

这意味着$\{u_n\}$有界。通过通常论证，存在一个子序列仍然记为$\{u_n\}$且存在$u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$使得

- 在$H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$中，$u_n\rightharpoonup u$；
- 在$L^{2^*(a,s)-\varepsilon}(\Omega)$中，$|x|^{-\frac{s}{2^*(a,s)-\varepsilon}}u_n\to|x|^{-\frac{s}{2^*(a,s)-\varepsilon}}u$；
- u_n在Ω上几乎处处收敛到u。

接下来，我们证明u_n到u是强收敛。首先，根据以上分析，可得当$n\to\infty$时，

$$\left\|u_n|x|^{-\frac{s}{2^*(a,s)-\varepsilon}}-u|x|^{-\frac{s}{2^*(a,s)-\varepsilon}}\right\|_{L^{2^*(a,s)-\varepsilon}(\Omega)}\to 0.$$

因为$J'(u_n)\to 0$和$u_n\rightharpoonup u$，所以$\langle J'(u_n),u_n-u\rangle\to 0$且显然有$\langle J'(u),u_n-u\rangle\to 0$。
因此，当$n\to\infty$时，一方面有

$$\langle J'(u_n)-J'(u),u_n-u\rangle\le\left|\langle J'(u_n),u_n-u\rangle\right|+\left|\langle J'(u),u_n-u\rangle\right|=o(1),$$

另一方面有，

$$\langle J'(u_n)-J'(u),u_n-u\rangle=\|u_n-u\|^2-\int_\Omega|x|^{-s}\left(|u_n|^{2^*(a,s)-2-\varepsilon}u_n-|u|^{2^*(a,s)-2-\varepsilon}u\right)(u_n-u).$$

根据Hölder不等式，有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|x|^{-s}|u_n|^{2^*(a,s)-2-\varepsilon}u(u_n-u)\\
&\le\int_\Omega|x|^{-s}|u_n|^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}|u_n-u|\\
&=\int_\Omega|x|^{-s\cdot\frac{2^*(a,s)-1-\varepsilon}{2^*(a,s)-\varepsilon}}|u_n|^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}|x|^{-s\cdot\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}}|u_n-u|\\
&\le\left(\int_\Omega|x|^{-s}|u_n|^{2^*(a,s)-\varepsilon}\right)^{\frac{2^*(a,s)-1-\varepsilon}{2^*(a,s)-\varepsilon}}\left\||x|^{\frac{-s}{2^*(a,s)-\varepsilon}}|u_n-u|\right\|_{L^{2^*(a,s)-\varepsilon}(\Omega)}\\
&\le C\|u_n\|^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}\left\|u_n|x|^{\frac{-s}{2^*(a,s)-\varepsilon}}-u|x|^{\frac{-s}{2^*(a,s)-\varepsilon}}\right\|_{L^{2^*(a,s)-\varepsilon}(\Omega)}=o(1)
\end{aligned}$$

同理可得，$\int_\Omega|x|^{-s}|u|^{2^*(a,s)-2-\varepsilon}u(u_n-u)=o(1)$。因此，

$$o(1)=\langle J'(u_n)-J'(u),u_n-u\rangle=\|u_n-u\|^2+o(1),$$

即在$H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$中$u_n\to u$且对任意$c\in\mathbb{R}$，泛函$J$都满足$(PS)_c$条件。

引理3.2： 泛函J允许在非负函数集内存在$(PS)_c$序列，其中

$$c=\inf_{g\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(g(t)),\quad\Gamma=\left\{g\in C\left([0,1],H_0^1(\Omega)\right):g(0)=0,J(g(1))<0\right\}.$$

证明：接下来我们证明J满足山路引理的所有假设。显然，$J(0)=0$。
由加权Hardy-Sobolev不等式可得

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2^*(a,s)-\varepsilon}\int_\Omega|x|^{-s}|u|^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}u\ge\frac{1}{2}\|u\|^2-C_1\|u\|^{2^*(a,s)-\varepsilon}.$$

对任意a,s，我们选择足够小的ε使得$2^*(a,s)-\varepsilon>2$。根据以上分析，存在$\rho,e>0$，使得对任意$u\in\left\{u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right):\|u\|=e\right\}$有$J(u)\ge\rho$。此外，对任意$u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$，有

$$J(tu)=\frac{t^2}{2}\|u\|^2-\frac{t^{2^*(a,s)-\varepsilon}}{2^*(a,s)-\varepsilon}\int_\Omega |x|^{-s}|u|^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}u.$$

因此，当 $t\to+\infty$ 有 $J(tu)\to-\infty$。因此，我们可以选择合适的 $t_0>0$，使得 $J(t_0u)<0$。根据山路引理，可知J允许存在 $(PS)_c$ 序列，并且由于对任意的 $u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$，都有 $J(|u|)\le J(u)$，故这个序列可以在非负函数集合中被选择。证毕！

通过引理3.1、3.2和山路引理，我们得到了问题(1.1)的一个非负解 $u\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$，再通过极大值原理，该解是正解。

3.2. 径向对称性证明

接下来，记问题(1.1)中的 $2^*(a,s)-1-\varepsilon=p>0$，并研究解 $u_\varepsilon\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$ 的奇异性和径向对称性。根据标准椭圆的正则性理论得，$u_\varepsilon(x)\in C^2(\Omega\setminus\{0\})\cap C^1(\bar\Omega\setminus\{0\})$。因此，$u_\varepsilon(x)$ 的奇点是原点。

假设 $u_\varepsilon\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$ 满足问题(1.1)。令 $\upsilon(x)=|x|^\nu u(x)$，$\nu=\left(\sqrt{\bar\mu}-a\right)-\sqrt{\left(\sqrt{\bar\mu}-a\right)^2-\mu}$，可得

$$\begin{cases}-div\left(|x|^{-2a-2\nu}\nabla\upsilon\right)=|x|^{-\left(2^*(a,s)-\varepsilon\right)\nu-s}\upsilon^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}, & \upsilon>0 \quad x\in\Omega,\\ \upsilon=0 & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{3.4}$$

根据标准椭圆的正则性理论得，$\upsilon_\varepsilon(x)\in C^2(\Omega\setminus\{0\})\cap C^1(\bar\Omega\setminus\{0\})$。

引理3.3： (1) $\upsilon(x)\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a-2\nu}\right)$；(2) $\upsilon(x)$ 在 Ω 上有界。

证明： (1)对任意满足(1.1)的 $u(x)\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a}\right)$，根据加权Hardy不等式，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega|x|^{-2a-2\nu}|\nabla\upsilon|^2&=\int_\Omega|x|^{-2a-2\nu}\left||x|^\nu\nabla u+\nu|x|^{\nu-2}ux\right|^2\\&\le2\left(\int_\Omega|x|^{-2a}|\nabla u|^2+\nu^2\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^{2(1+a)}}\right)\\&\le C\end{aligned}$$

因此，$\upsilon(x)=|x|^\nu u(x)\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a-2\nu}\right)$。

(2)根据引理2.2提到的Caffarelli-Kohn-Nirenberg不等式，得对任意 $u(x)\in H_0^1\left(\Omega,|x|^{-2a-2\nu}\right)$ 有

$$\left(\int_\Omega|x|^m|\nabla u|^2\right)^{\frac12}\ge C_{m,n}\left(\int_\Omega|x|^n|u|^{p(m,n)}\right)^{\frac{1}{p(m,n)}},\tag{3.5}$$

其中 $m=-2a-2\nu$，$n=-\left(2^*(a,s)-\varepsilon\right)\nu-s$，$p(m,n)=2^*(a,s)+\dfrac{\varepsilon\nu}{\sqrt{\left(\sqrt{\bar\mu}-a\right)^2-\mu}}$。

注意到 $\upsilon(x)$ 满足

$$\int_\Omega|x|^m\nabla\upsilon\cdot\nabla\varphi=\int_\Omega|x|^n\upsilon^p\varphi,\quad\forall\varphi\in H_0^1\left(\Omega,|x|^m\right).$$

定义 $\upsilon_l=\min\{\upsilon(x),l\}$，$l>1$。设 $t>1$，取上式中 $\varphi=\upsilon\cdot\upsilon_l^{2(t-1)}\in H_0^1\left(\Omega,|x|^m\right)$ 得

$$\int_\Omega|x|^m|\nabla\upsilon|^2\upsilon_l^{2(t-1)}+2(t-1)\int_\Omega|x|^m|\nabla\upsilon_l|^2\upsilon_l^{2(t-1)}=\int_\Omega|x|^n\upsilon^{p+1}\upsilon_l^{2(t-1)}.$$

因此，

$$\left(\int_\Omega |x|^n \left(\upsilon\cdot\upsilon_l^{t-1}\right)^{p(m,n)}\right)^{\frac{2}{p(m,n)}} \le C_{m,n}^{-2}\int_\Omega |x|^m \left|\nabla\left(\upsilon\cdot\upsilon_l^{t-1}\right)\right|^2$$
$$\le 2C_{m,n}^{-2}\left((t-1)^2\int_\Omega |x|^m |\nabla\upsilon_l|^2 \upsilon_l^{2(t-1)} + \int_\Omega |x|^m |\nabla\upsilon|^2 \upsilon_l^{2(t-1)}\right) \tag{3.6}$$
$$\le 2C_{m,n}^{-2} t\int_\Omega |x|^n \upsilon^{p+2t-1}$$

根据(3.6)和Levi's定理，由 $\upsilon\in L^{p+2t-1}\left(\Omega,|x|^n\right)$ 可知 $\upsilon\in L^{tp(m,n)}\left(\Omega,|x|^n\right)$。

接下来定义

$$\begin{cases} p-1+2t_0 = p(m,n), \\ p-1+2t_{j+1} = p(m,n)t_j, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} M_0 = \left(C\cdot C_{m,n}^{-2}\right)^{\frac{p(m,n)}{2}}, \\ M_{j+1} = \left(2C_{m,n}^{-2} t_j M_j\right)^{\frac{p(m,n)}{2}}, \end{cases} \tag{3.8}$$

其中 $j=0,1,2,\cdots$，C是满足 $\int_\Omega |x|^m |\nabla\upsilon|^2 \le C$ 的固定常数。

由(3.7)可得

$$t_j = \frac{\left(2^{-1}p(m,n)\right)^{j+1}\left(p(m,n)-p-1\right)+p-1}{p(m,n)-2}。$$

结合(3.8)和[9]中类似计算可得 $\exists\, d>0$ (d与j无关)使得 $M_j \le \mathrm{e}^{dt_j-1}$。

又因为 $2<p+1<p(m,n)$，故对所有 $j\ge 0$ 都有 $t_j>1$ 且当 $j\to+\infty$ 时 $t_j\to+\infty$。

结合(3.6)、(3.7)和(3.8)，得

$$\int_\Omega |x|^n \upsilon^{p+2t_1-1} \le \left(2C_{m,n}^{-2}t_0\right)^{\frac{p(m,n)}{2}}\left(\int_\Omega |x|^n \upsilon^{p+2s_0-1}\right)^{\frac{p(m,n)}{2}}$$
$$\le \left(2C_{m,n}^{-2}t_0\right)^{\frac{p(m,n)}{2}}\left(C^{\frac{p(m,n)}{2}} C_{m,n}^{-p(m,n)}\right)^{\frac{p(m,n)}{2}}$$
$$\le \left(2C_{m,n}^{-2}t_0 M_0\right)^{\frac{p(m,n)}{2}}$$
$$\le M_1$$

类似地我们有，$\int_\Omega |x|^n \upsilon^{p+2t_j-1} \le M_j$。

记 $C(\Omega,n)=\max_{x\in\Omega}|x|^{-n}$，并根据 $p-1+2t_{j+1}=p(m,n)t_j$ 可得

$$|\upsilon|_{L^{p(m,n)t_j}(\Omega)} \le \left(\int_\Omega |\upsilon|^{p(m,n)t_j} |x|^n\cdot|x|^{-n}\right)^{\frac{1}{p(m,n)t_j}}$$
$$\le C(\Omega,n)^{\frac{1}{p(m,n)t_j}} |\upsilon|^{\frac{1}{p(m,n)t_j}}_{L^{p(m,n)t_j}\left(\Omega,|x|^n\right)}$$
$$\le C(\Omega,n)^{\frac{1}{p(m,n)t_j}} M_{j+1}^{\frac{1}{p(m,n)t_j}}$$
$$\le C(\Omega,n)^{\frac{1}{p(m,n)t_j}} \mathrm{e}^{\frac{d}{p(m,n)t_j}}$$

对上述不等式两边取极限并利用当 $j \to +\infty$ 时 $t_j \to +\infty$，得 $|\upsilon|_{L^\infty(\Omega)} \le e^{\frac{d}{p(m,n)}}$。证毕！

根据引理3.3，可知 $\upsilon(x) = |x|^{\nu} u(x)$ 在 Ω 内有上界。对于 $\upsilon(x) = |x|^{\nu} u(x)$ 的下界我们有

引理3.4:假设 $u(x) \in H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2a-2\nu}\right)$ 满足问题(1.1)，则对任意 $B_\rho \subset\subset \Omega$，都存在一个 $C(\rho) > 0$ 使得对 $\forall x \in B_\rho \subset\subset \Omega$ 都有 $u(x) \ge C(\rho)|x|^{-\nu}$。

证明：令 $f(x) = \min\left\{|x|^{-s} u^{2^*(a,s)-1-\varepsilon}(x), l\right\}$，$l > 0$，则 $f \in L^\infty(\Omega)$。

假设 $u_1 \ge 0$ 且 $u_1 \in H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2a}\right)$ 是下面线性方程的解；

$$\begin{cases} -div\left(|x|^{-2a} \nabla u_1\right) = \mu \dfrac{u_1}{|x|^{2(1+a)}} + f, & x \in \Omega, \\ u_1 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

记 $U = u - u_1$，则 $U \in H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2a}\right)$ 且 U 满足

$$\begin{cases} -div\left(|x|^{-2a} \nabla U\right) = \mu \dfrac{U}{|x|^{2(1+a)}} + g, & x \in \Omega, \\ U = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

其中 $g \ge 0$ 且 $0 \le \mu < \left(\sqrt{\bar{\mu}} - a\right)^2$。

由引理2.3可知，问题(3.9)和(3.10)有解。再根据加权Hardy不等式和比较原理[10]，可知u是问题(3.9)的一个上解且 $0 \le u_1 \le u$。证明如下，将(3.10)的两边同时乘以 $U^- := \max\{0, -U(x)\}$ 并分部积分可得

$$-\int_\Omega |x|^{-2a} \left|\nabla U^-\right|^2 = -\int_\Omega \mu \frac{\left(U^-\right)^2}{|x|^{2(1+a)}} + \int_\Omega g U^- .$$

这意味着 $U^- = 0$，即 $U \ge 0$。

根据引理3.3得，存在一个常数 $C_1 > 0$ 使得 $0 \le u_1 \le u \le C_1 |x|^{-\nu}$，因此我们只需证明 u_1 有下界即可。

因为在 Ω 中 $u_1 \not\equiv 0$，$u_1 \ge 0$ 且 $-div\left(|x|^{-2a} \nabla u_1\right) \ge 0$，所以存在 $\delta > 0$ 和充分小的 $\rho > 0$ 使得对任意 $x \in B_{2\rho}$ 都有 $u_1 \ge \delta$。选择合适的 $C(\rho) > 0$ 且 $C(\rho)$ 满足当 $|x| \ge \rho$ 时 $C(\rho)|x|^{-\nu} \le \delta$，并取 $\omega = \left(u_1 - C|x|^{-\nu}\right)^-$。因为 $\int_{B_\rho} \left|\nabla |x|^{-\nu}\right|^2 < \infty$ 和 $u_1 \in H_0^1(B_\rho)$，所以 $\omega \in H_0^1(B_\rho)$。

结合(3.9)和 $|x|^{-\nu}$ 是 $-div\left(|x|^{-2a} \nabla u\right) - \mu \dfrac{u}{|x|^{2(1+a)}} = 0$ 的弱解的事实，可知 u_1 和 $|x|^{-\nu}$ 的线性组合是 $-div\left(|x|^{-2a} \nabla u_1\right) = \mu \dfrac{u_1}{|x|^{2(1+a)}} + f$ 的弱解。因此

$$-div\left(|x|^{-2a} \nabla\left(u_1 - C|x|^{-\nu}\right)\right) = \mu \frac{u_1 - C|x|^{-\nu}}{|x|^{2(1+a)}} + f .$$

对上式两边同时乘以 ω 并分部积分得

$$-\int_{B_\rho} |x|^{-2a} |\nabla \omega|^2 + \int_\Omega \mu \frac{\omega^2}{|x|^{2(1+a)}} = \int_\Omega f \omega \ge 0 .$$

又因为 $0 \le \mu < \left(\sqrt{\bar{\mu}} - a\right)^2$，所以 $\omega \equiv 0$。

$\omega \equiv 0$ 还有第二种证法：只需证明 $-\int_{B_\rho} |x|^{-2a} |\nabla \omega|^2 + \int_{B_\rho} \mu \frac{\omega^2}{|x|^{2(1+a)}} \ge 0$ 即可。显然

$$
\begin{aligned}
0 &> -\int_{B_\rho} |x|^{-2a} |\nabla \omega|^2 + \int_{B_\rho} \mu \frac{\omega^2}{|x|^{2(1+a)}} \\
&= \int_{B_\rho} |x|^{-2a} \nabla\left(u_1 - C|x|^{-\nu}\right) \cdot \nabla \omega - \int_{B_\rho} \frac{\mu}{|x|^{2(1+a)}} \left(u_1 - C|x|^{-\nu}\right) \omega \\
&= \int_{B_\rho} f \omega - C\left(\int_{B_\rho} |x|^{-2a} \nabla |x|^{-\nu} \cdot \nabla \omega - \int_{B_\rho} \frac{\mu}{|x|^{2(1+a)}} |x|^{-\nu} \omega \right) \\
&= \int_{B_\rho} f \omega + \frac{C\nu}{\rho^{2a+\nu+1}} \int_{\partial B_\rho} \omega \\
&> \frac{C\nu}{\rho^{2a+\nu+1}} \int_{\partial B_\rho} \omega \ge 0
\end{aligned}
$$

显然矛盾，证毕！

结合引理3.3和引理3.4，我们得到

命题3.5: 假设 $u(x) \in H_0^1\left(\Omega, |x|^{-2a-2\nu}\right)$ 满足问题(1.1)且 $0 \le \mu < \left(\sqrt{\bar{\mu}} - a\right)^2$，则对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$，都存在两个正常数 C_1 和 C_2，使得

$$
\begin{cases}
u(x)|x|^{\nu} \ge C_1, & \forall x \in \Omega' \in \Omega, \\
u(x)|x|^{\nu} \le C_2, & \forall x \in \Omega.
\end{cases}
$$

最后我们给出定理1.1的证明。

定理1.1的证明： 根据以上分析，我们只需证明 $\upsilon(x)$ 在 Ω 中是径向对称的。根据标准椭圆的正则性理论，我们有 $\upsilon(x) \in C^2\left(\Omega \setminus \{0\}\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \setminus \{0\}\right)$。由(2.4)可知，

$$
\partial_i \left(|x|^{-2a-2\nu} \partial_i \upsilon \right) + |x|^{-\left(2^*(a,s)-\varepsilon\right)\nu - s} \upsilon^{2^*(a,s)-1-\varepsilon} = 0 . \tag{3.11}
$$

当 $\beta = -2a - 2\nu$，$\alpha = -\left(2^*(a,s) - \varepsilon\right)\nu - s$，$q = 2^*(a,s) - 1 - \varepsilon$ 和 $K = 1$ 时，(3.11)显然满足引理 2.4 中的条件。证毕！

参考文献

[1] Joseph, D.D. and Lundgren, T.S. (1973) Quasilinear Dirichlet Problems Driven by Positive Sources. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **49**, 241-269. https://doi.org/10.1007/BF00250508

[2] Brezis, H. and Nirenberg, L. (2010) Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, **36**, 437-477. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360405

[3] Ekeland, I. and Ghoussoub. N. (2002) Selected New Aspects of the Calculus of Variations in the Large. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **39**, 207-265. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-02-00929-1

[4] Lieb, E.H. (1983) Sharp Constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and Related Inequalities. *Annals of Mathematics*, **118**, 349-374. https://doi.org/10.2307/2007032

[5] Cao, D. and Peng, S. (2006) Asymptotic Behavior for Elliptic Problems with Singular Coefficient and Nearly Critical Sobolev Growth. *Annali di Matematicapura ed Applicata*, **185**, 189-205. https://doi.org/10.1007/s10231-005-0150-z

[6] Chou, K.S. and Chu, C.W. (1993) On the Best Constant for a Weighted Sobolev-Hardy Inequality. *Journal of the London Mathematical Society*, **48**, 137-151. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-48.1.137

[7] Catrina, F. and Wang, Z.Q. (2001) On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg Inequalities: Sharp Constants, Existence (and

Nonexistence), and Symmetry of Extremal Functions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **54**, 229-258. https://doi.org/10.1002/1097-0312(200102)54:2<229::AID-CPA4>3.0.CO;2-I

[8] Struwe, M. (2008) Variational Methods. 4th Edition, Springer, Berlin Heidelberg.

[9] Lin, C.S., Ni, W.M. and Takagi, I. (1988) Large Amplitude Stationary Solutions to a Chemotaxis System. *Journal of Differential Equations*, **72**, 1-27. https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90147-7

[10] Dupaigne, L. (2002) A Nonlinear Elliptic PDE with the Inverse-Square Potential. *Journal D'analyse Mathématique*, **86**, 359-398. https://doi.org/10.1007/BF02786656