Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(3), 362-370
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113048

具有间接信号吸收和Logistic源的生物趋化模型解的有界性

刘璐璐，辛　巧*

伊犁师范大学数学与统计分院，新疆　伊宁
Email: 511531864@qq.com, *xinqiaoylsy@163.com

收稿日期：2021年2月18日；录用日期：2021年3月19日；发布日期：2021年3月30日

摘　要

本文考虑具有二维间接信号吸收的拟线性趋化模型：

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot\left(D(u)\nabla u\right) - \nabla\cdot\left(S(u)\nabla v\right) + \mu\left(u-u^2\right), & x\in\Omega\times(0,T), \\ v_t = \Delta v - vw, & x\in\Omega\times(0,T), \\ w_t = -w + u, & x\in\Omega\times(0,T), \end{cases}$$

其中 $\Omega\in R^n\,(n=2)$ 是一个有界区域且具有光滑边界，$\mu, l>0$，非线性扩散系数 $D(u)$ 和趋化敏感系数 $S(u)$ 分别满足 $D(u)\ge(u+1)^{m-1}$，$S(u)\le(u+1)^{q-1}$ 且 $D(\cdot), S(\cdot)\in C^{1+l}([0,\infty))$。本文利用能量方法和半群理论证明在 $m>q-1-\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|^3_{L^\infty(\Omega)}2^3\right)}$ 和 $1<q\le 2$ 的条件下，该生物趋化模型的解全局有界，其中 $\bar{C},\lambda_0$ 为正常数。

关键词

间接信号吸收，拟线性，趋化，Logistic源，有界性

Boundedness of Solution for the Chemotaxis Model with Indirect Signal Absorption and Logistic Source

Lulu Liu, Qiao Xin*

College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

*通讯作者。

文章引用: 刘璐璐，辛巧. 具有间接信号吸收和 Logistic 源的生物趋化模型解的有界性[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 362-370. DOI: 10.12677/pm.2021.113048

Email: 511531864@qq.com, *xinqiaoylsy@163.com

Received: Feb. 18th, 2021; accepted: Mar. 19th, 2021; published: Mar. 30th, 2021

Abstract

In this paper, we consider the following two-dimensional quasilinear chemotaxis model with indirect signal absorption:

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot\left(D(u)\nabla u\right) - \nabla\cdot\left(S(u)\nabla v\right) + \mu\left(u-u^2\right), & x\in\Omega\times(0,T), \\ v_t = \Delta v - vw, & x\in\Omega\times(0,T), \\ w_t = -w+u, & x\in\Omega\times(0,T), \end{cases}$$

where $\Omega\in R^n\ (n=2)$ is a bounded and smooth domain, $\mu, l>0$, the nonlinear diffusivity $D(u)$ and chemosensitivity $S(u)$ are supposed to satisfy $D(u)\ge(u+1)^{m-1}$, $S(u)\le(u+1)^{q-1}$ and $D(\cdot), S(\cdot)\in C^{1+l}([0,\infty))$. Finally, we use the energy method and the semigroup theory to prove that the solution of the biologicalchemotaxis model is globally bounded under the conditions

$$m>q-1-\frac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\left\|v_0\right\|^3_{L^\infty(\Omega)}2^3\right)}$$ **and $1<q\le 2$, where $\bar{C},\lambda_0$ are the positive constants.**

Keywords

Indirect Signal Absorption, Quasilinear, Chemotaxis, Logistic Source, Boundednes

1. 引言

趋化现象是自然界中常见的现象，它描述的是细胞或细菌沿化学信号浓度梯度方向的定向运动[1] [2] [3]。在过去几年里，一些学者致力于研究趋化消耗模型

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot\left(D(u)\nabla u\right) - \nabla\cdot\left(S(u)\nabla v\right) + f(u), & x\in\Omega\times(0,T), \\ v_t = \Delta v - uv, & x\in\Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = \dfrac{\partial v}{\partial \upsilon} = 0, & x\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases}$$

其中，$\Omega\in R^n$ 中表示具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$u=u(x,t)$ 代表细胞密度，$v=(v,t)$ 代表化学信号物质的浓度，$D(u)$ 是扩散系数，$S(u)$ 是趋化敏感系数，$f(u)$ 是 Logistic 源，表示细胞的增殖和死亡，$-uv$ 是化学诱导剂的消耗。在 $D(u)=1$，$S(u)=u$，$f(u)=0$ 的情况下，当 $n\le 2$ 时，$\left\|v_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}$ 无小性限制，

Tao 在文献[4]证明了上述模型存在全局经典解。当 $n=3$ 时，初值足够光滑，Tao 和 Winkler 在文献[5]中讨论了上述趋化模型全局弱解的存在性。当 $n\ge 3$，$\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\le \frac{1}{6(n+1)\chi}$，$t\to\infty$ 时，模型的全局经典解 (u,v) 收敛于 $(\overline{u}_0,0)$，其中 $\overline{u}_0=\frac{1}{\Omega}\int_\Omega u(x,0)\mathrm{d}x$。在 $D(u)=1$，$S(u)=u$，$f(u)=\kappa u-\mu u^2$ 的情况下，Lankeit 和 Wang 在文献[6]中证明了当在 μ 足够大时该模型存在全局经典解，在 $\mu>0$ 时该模型存在经典弱解。Zheng 在文献[7]中证明了 $D(u)\ge C_D(u+1)^{m-1}$，$S(u)=u$，$C_D>0$，$m>\begin{cases}1-\dfrac{\mu}{\chi\left[1+\lambda_0\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}2^3\right]}, & N\le 2\\ 1, & N\ge 3\end{cases}$ 时，对于任意足够光滑的初值都存在一个经典有界解。

不同于一般的直接信号吸收的趋化模型，近几年关于间接信号吸收的生物趋化模型

$$\begin{cases}u_t=\nabla\cdot\left(D(u)\nabla u\right)-\nabla\cdot\left(S(u)\nabla v\right)+\mu\left(u-u^2\right), & x\in\Omega\times(0,T),\\ v_t=\Delta v-vw, & x\in\Omega\times(0,T),\\ w_t=-\delta w+u, & x\in\Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}=\dfrac{\partial v}{\partial \upsilon}=0, & x\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),w(x,0)=w_0(x), & x\in\Omega,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $\Omega\in R^n$ 具有光滑边界的有界区域，$n\in\mathrm{N}$，$\delta>0$ 是给定的参数。2019 年，Fuest 在文献[8]中讨论当 $D(u)=1$，$S(u)=u$，$\mu=0$，$n\le 2$ 或 $n\ge 3$，$\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\le\frac{1}{3n}$ 时该模型存在唯一的全局经典解。2020 年，Liu，Li 和 Huang 在文献[9]中证明了具有 Logistics 源的间接信号吸收模型，当 $D(u)=1$，$S(u)=u$，$n\ge 4$，μ 足够大时，模型的解有全局存在性和有界性，当 $\mu=0$，$n\ge 3$ 和 $0\le\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\le\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 时上述模型存在唯一的全局经典解。Zheng 等人在文献[10]中证明了当 $n=2$，非线性扩散系数 $D(u)$ 和趋化敏感系数 $S(u)$ 满足 $D(u)\ge u^m$，$S(u)\le u^q$，当 $m>\max\{1,2q-3\}$ 时，上述模型的解全局有界。受文献[7]，[9]，[10]和[11]的启发，本文主要利用能量方法证明趋化模型(1.1)在 $\delta=1$，$n=2$，$\mu>0$ 的条件下，非线性扩散系数 $D(u)$ 和趋化敏感系数 $S(u)$ 满足

$$D(u)\ge(u+1)^{m-1},\quad S(u)\le(u+1)^{q-1}\text{ 且 }D(\cdot),S(\cdot)\in C^{1+l}\left([0,\infty)\right),\quad l>0\tag{1.2}$$

$$m>q-1-\frac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|^3_{L^\infty(\Omega)}2^3\right)}\text{ 且 }1<q\le 2\tag{1.3}$$

成立，其中 $\bar{C},\lambda_0$ 为正常数，则该拟线性趋化模型的解全局有界。主要结论如下：

定理 1：设 $n=2$，初值满足 $u_0\in C^0(\bar{\Omega})$，$v_0\in W^{1,\infty}(\Omega)$，$w_0\in C^1(\bar{\Omega})$ 且 $u_0\ge 0$，$v_0\ge 0$，$w_0\ge 0$，则存在一个非负函数 (u,v,w)：

$$u\in C^0(\bar{\Omega})\times[0,T_{\max})\cap C^{2,1}(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max})),$$

$$v\in C^0(\bar{\Omega})\times[0,T_{\max})\cap C^{2,1}(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max})),$$

$$w\in C^{0,1}(\bar{\Omega})\times[0,T_{\max}),$$

是模型(1.1)的经典解。当 $D(u)$ 和 $S(u)$ 满足(1.2)，$m > q-1-\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)}$ 且 $1<q\le 2$ 时，则对任意的 $t\in(0,\infty)$，存在一个常数 $C>0$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C，\quad \|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C \text{ 和 } \|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C，$$

其中 $\bar{C},\lambda_0$ 为正常数。

注：文献[10]证明了当 $n=2$ 时，$m>\max\{1,2q-3\}$ 或 $m=0, 0<q<\dfrac{3}{2}$，模型存在全局经典解。与文献[10]的结果相对比，本文证明了当 $m>q-1-\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)}$，$1<q\le 2$ 时，获得了模型解的全局有界性，推广了文献[10]的结果。

2. 解的全局有界性

为了证明定理 1 的结果，先给出一个必要的引理。

引理 1：设 $n=2$，$m>q-1-\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)}$，$1<q\le 2$，$\lambda_0,\mu>0$。令 (u,v,w) 是模型(1.1)的解，则对任意 $p>1$，$t\in(0,T_{\max})$，存在一个正常数 C 使得

$$\int_\Omega (u(\cdot,t)+1)^p \le C。$$

证明：第一步：当 $1<p<2$ 时，对趋化模型(1.1)的第一个方程乘 $(u+1)^{p-1}$ 并在 Ω 上积分，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u+1)^p\,\mathrm{d}x+(p-1)\int_\Omega (u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&\le -\frac{p+1}{p}\int_\Omega (u+1)^p\,\mathrm{d}x-\int_\Omega \nabla\left(S(u)\nabla v\right)(u+1)^{p-1}\,\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{p+1}{p}\int_\Omega (u+1)^p\,\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega\left(u-u^2\right)(u+1)^{p-1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.1}$$

对(2.1)右端第二项运用 Young's 不等式可得

$$\begin{aligned}-\int_\Omega (u+1)^{p-1}\nabla\left(S(u)\nabla v\right)\mathrm{d}x&=(p-1)\int_\Omega S(u)(u+1)^{p-2}\,\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\\&=(p-1)\int_\Omega \nabla\Psi(u)\cdot\nabla v\mathrm{d}x\\&=-(p-1)\int_\Omega \Psi(u)\Delta v\\&\le (p-1)\int_\Omega \Psi(u)|\Delta v|\\&\le \frac{(p-1)}{p+q-2}\int_\Omega (u+1)^{p+q-2}|\Delta v|\mathrm{d}x\\&\le (p-1)\int_\Omega (u+1)^{p+q-1}\,\mathrm{d}x+(p-1)\int_\Omega |\Delta v|^{p+q-1}\,\mathrm{d}x+C_1\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $\Psi(u)=\int_0^u S(\sigma)(1+\sigma)^{p-2}\cdot\nabla\sigma$。

再对(2.1)右端第三项和第四项运用 $(u+1)^\beta\le 2^\beta\left(u^\beta+1\right)$ 可得

$$\begin{aligned}&\frac{p+1}{p}\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega\left(u-u^2\right)(u+1)^{p-1}\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{p+1}{p}\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega(u+1)^{p-1}\,\mathrm{d}x-\frac{\mu}{4}\int_\Omega(u+1)^{p+1}\,\mathrm{d}x\,,\\&\le\left(\varepsilon_1-\frac{\mu}{4}\right)\int_\Omega(u+1)^{p+1}\,\mathrm{d}x+C_2\end{aligned}$$

其中，$C_2=\frac{1}{p+1}\left(\varepsilon_1\frac{p+1}{p}\right)^{-p}\left(\frac{p+1}{p}+2\mu\right)^{p+1}|\Omega|+\frac{2}{p+1}\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{-\frac{(p-1)}{2}}\mu|\Omega|$。

对(2.2)右端第一项运用 Young's 不等式可得

$$(p-1)\int_\Omega(u+1)^{p+q-1}dx\le(p-1)\int_\Omega(u+1)^{p+1}+(p-1)|\Omega|^{\frac{p+1}{2-q}}$$

最后整理可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x+(p-1)\int_\Omega(u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&\le-\frac{p+1}{p}\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x+(p-1)\int_\Omega(u+1)^{p+1}\,\mathrm{d}x\\&\quad+(p-1)\int_\Omega|\Delta v|^{p+q-1}+\left(\varepsilon_1-\frac{\mu}{4}\right)\int_\Omega(u+1)^{p+1}\,\mathrm{d}x+C_3\end{aligned}\tag{2.3}$$

对任意 $t\in(s_0,T_{\max})$，对(2.3)运用常数变易法可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s_0)}\|u(s_0)\|_{L^p(\Omega)}^p+\left(\varepsilon_1+(p-1)-\frac{\mu}{4}\right)\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s)}\int_\Omega(u+1)^{p+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\quad+(p-1)\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s)}\int_\Omega|\Delta v|^{p+q-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s+C_3\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s)}\mathrm{d}s\\&\le\left(\varepsilon_1+(p-1)-\frac{\mu}{4}\right)\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s)}\int_\Omega(u+1)^{p+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\quad+(p-1)\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s)}\int_\Omega|\Delta v|^{p+q-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s+C_4\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中 $C_4=\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s_0)}\|u(s_0)\|_{L^p(\Omega)}^p+C_3\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s)}\mathrm{d}s$。

对任意的 $s_0\in(0,T_{\max})$，$s_0\le1$，令 $t\in(s_0,T_{\max})$，并对模型(1.1)第二个方程变形可得

$$v_t-\Delta v+v=-vw+v\text{。}$$

对(2.4)右端第二项运用文献[6]的引理 3.3 和文献[7]的引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}&(p-1)\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s)}\int_\Omega|\Delta v|^{p+q-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\le(p-1)\mathrm{e}^{-(p+1)t}\lambda_0\left[\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{p+q-1}2^{p+q-1}\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{(p+1)s}\int_\Omega\left(w^{p+q-1}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{(p+1)s_0}\|v(s_0,t)\|_{L^{2,p+q-1}(\Omega)}^{p+q-1}\right]\end{aligned}\tag{2.5}$$

对(2.5)右端运用 Young's 不等式可得

$$\int_\Omega w^{p+q-1}\mathrm{d}x<\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x+C_5\tag{2.6}$$

对模型(1.1)第三个方程两边同乘以 w^p 并在 Ω 上积分，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^{p+1}+\frac{(p+1)}{2}\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x\le(p+1)C_6\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x \tag{2.7}$$

再对(2.7)运用常数变易法可得

$$\int_\Omega w^{p+1}\le \mathrm{e}^{-\frac{(p+1)}{2}(t-s_0)}\left\|w(s_0)\right\|_{L^{p+1}}^{p+1}+(p+1)C_6\int_{s_0}^t \mathrm{e}^{-\frac{p+1}{2}(t-s)}\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{2.8}$$

将(2.8)代入到(2.6)中可得

$$\int_\Omega w^{p+q-1}\mathrm{d}x\le C_7\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s+C_8<C_7\int_\Omega(u+1)^{p+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s+C_8 \tag{2.9}$$

其中 $\bar{C}=C_7=(p+1)C_6\int_{s_0}^t \mathrm{e}^{-\frac{p+1}{2}(t-s)}\mathrm{d}s$，$C_8=\mathrm{e}^{-\frac{(p+1)}{2}(t-s_0)}\left\|w(s_0)\right\|_{L^{p+1}}^{p+1}+C_5$。

整理(2.4)，(2.5)和(2.9)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\int_\Omega(u+1)^p\le&\left(\varepsilon_1+(p-1)+\bar{C}(p-1)\lambda_0\left\|v_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{p+q-1}2^{p+q-1}-\frac{\mu}{4}\right)\int_{s_0}^t \mathrm{e}^{-(p+1)(t-s)}\int_\Omega(u+1)^{p+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+C_9(p-1)\lambda_0\left\|v_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{p+q-1}2^{p+q-1}\mathrm{e}^{-(p+1)t}\int_{s_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{(p+1)s}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+(p-1)\lambda_0\mathrm{e}^{-(p+1)(t-s_0)}\left\|v(s_0,t)\right\|_{L^{2,p+q-1}(\Omega)}^{p+q-1}\end{aligned}$$

令 $p=p_0:=1+\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\left\|v_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)}>1$，当 $p<2,1<q\le 2$ 时，有

$$\mu=4\cdot\left((p_0-1)+\bar{C}(p_0-1)\lambda_0\left\|v_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)>4\cdot\left((p_0-1)+\bar{C}(p_0-1)\lambda_0\left\|v_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{p_0+q-1}2^{p_0+q-1}\right)$$

当 $0<\varepsilon_1<\dfrac{\mu}{4}-(p_0-1)+\bar{C}(p_0-1)\lambda_0\left\|v_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{p_0+q-1}2^{p_0+q-1}$ 时，存在一个正常数 C_{10}，使得

$$\int_\Omega(u+1)^{p_0}\mathrm{d}x\le C_{10}$$

再令 $p<\dfrac{2p_0}{(2-p_0)^+},\alpha>\dfrac{1}{2}$，则

$$p<\frac{1}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\le\frac{2p_0}{(2-p_0)^+} \tag{2.10}$$

由常数变易法和 Hölder’s 不等式可得

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\tau(A+1)}v(s_0)+\int_{s_0}^t \mathrm{e}^{-(t-s)(A+1)}\left(-v(s)w(s)+v(s)\right)\mathrm{d}s \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\left\|w(\cdot,t)\right\|_{L^{p_0}(\Omega)}&\le\left\|w_0\right\|_{L^{p_0}(\Omega)}+\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\left\|u(\cdot,s)\right\|_{L^{p_0}(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le\left\|w_0\right\|_{L^{p_0}(\Omega)}+\left\|u(\cdot,s)\right\|_{L^{p_0}(\Omega)}\left(\frac{p_0}{p_0-1}\right)^{-\frac{p_0-1}{p_0}}\le C_{11}\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $\tau\in[0,s_0]$，再运用文献[6]的引理 3.3 和(2.11)可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|(A+1)^{\alpha} v(t)\right\|_{L^{p}(\Omega)} \\
&\leq C_{12} s_{0}^{-\alpha-\frac{2}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left\|v\left(s_{0}, t\right)\right\|_{L^{1}(\Omega)}+C_{12} \int_{s_{0}}^{t}(t-s)^{-\alpha-\frac{2}{2}\left(\frac{1}{p_{0}}-\frac{1}{p}\right)} \mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\|-v(s) w(s)+v(s)\|_{L^{p_{0}}(\Omega)} \mathrm{d} s \\
&\leq C_{13} \int_{0}^{+\infty} \sigma^{-\alpha-\frac{2}{2}\left(\frac{1}{p_{0}}-\frac{1}{p}\right)} \mathrm{e}^{-\mu \sigma} \mathrm{d} \sigma+C_{14} s_{0}^{-\alpha-\frac{2}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

由(2.10)，(2.13)和文献[10]的引理 3.1 可知对所有的 $t\in(0,T_{\max})$, $p\in\left[1,\frac{2p_0}{(2-p_0)^+}\right)$ 有

$$\int_{\Omega}|\nabla v|^{p} \leq C_{15} 。$$

第二步：对任意的 $p>1$，在模型(1.1)的第一个方程两边同乘 $(u+1)^{p-1}$ 并在 Ω 上积分并运用 Young's 不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \int_{\Omega}(u+1)^{p} \mathrm{d} x+(p-1) \int_{\Omega}(u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^{2} \mathrm{d} x \\
&\leq \frac{p-1}{2} \int_{\Omega}(u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^{2} \mathrm{d} x+\frac{p-1}{2} \int_{\Omega}(u+1)^{p+2 q-m-3}|\nabla v|^{2} \mathrm{d} x-\frac{\mu}{2} \int_{\Omega}(u+1)^{p+1} \mathrm{d} x+C
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

令 $1<l_0<\frac{2p_0}{2(2-p_0)^+}$，对(2.14)右端第二项运用 Hölder's 不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{p-1}{2} \int_{\Omega}(u+1)^{p+2 q-m-3}|\nabla v|^{2} \mathrm{d} x \\
&\leq \frac{p-1}{2}\left(\int_{\Omega}(u+1)^{\frac{l_{0}}{l_{0}-1}(p+2 q-m-3)}\right)^{\frac{l_{0}-1}{l_{0}}}\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^{2 l_{0}}\right)^{\frac{1}{l_{0}}} \mathrm{d} x \\
&\leq C\left\|(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^{2 \frac{l_{0}}{l_{0}-1} \frac{p+2 q-m-3}{m+p-1}}}^{2 \frac{p+2 q-m-3}{m+p-1}}
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

由于 $l_0>1, p>\max\left\{2q-m-3, p_0-\frac{p_0}{l_0}-2q+m+3\right\}$，所以

$$\frac{p_{0}}{m+p-1} \leq \frac{l_{0}}{l_{0}-1} \frac{p+2 q-m-3}{m+p-1}<\infty,$$

对(2.15)右端运用文献[7]的引理 2.1 可得

$$
\begin{aligned}
&C\left\|(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^{2 \frac{l_{0}}{l_{0}-1} \frac{p+2 q-m-3}{m+p-1}}}^{2 \frac{p+2 q-m-3}{m+p-1}} \\
&\leq C\left(\left\|\nabla(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{\mu_{1}}\left\|(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^{\frac{2 p_{0}}{m+p-1}}(\Omega)}^{1-\mu_{1}}+\left\|(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^{\frac{2 p_{0}}{m+p-1}}(\Omega)}\right)^{2 \frac{p+2 q-m-3}{m+p-1}} \\
&\leq C\left(\left\|\nabla(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2 \mu_{1} \frac{p+2 q-m-3}{m+p-1}}+1\right) \\
&\leq C\left(\left\|\nabla(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2 \frac{l_{0}(p+2 q-m-3)-p_{0}\left(l_{0}-1\right)}{l_{0}(m+p-1)}}+1\right)
\end{aligned}
$$

其中，$\mu_1=\dfrac{2\dfrac{m+p-1}{2p_0}-\dfrac{2(l_0-1)(m+p-1)}{2l_0(p+2q-m-3)}}{1-\dfrac{2}{2}+\dfrac{2(m+p-1)}{2p_0}}=(m+p-1)\dfrac{\dfrac{2}{2p_0}-\dfrac{2(l_0-1)}{2l_0(p+2q-m-3)}}{1-\dfrac{2}{2}+\dfrac{2(m+p-1)}{2p_0}}\in(0,1)$。

由 $p=p_0:=1+\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)}>1$，$l_0<\dfrac{2p_0}{2(2-p_0)^+}$ 和 $m>q-1-\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)}$ 可知

$$\frac{l_0(p+2q-m-3)-p_0(l_0-1)}{l_0(m+p-1)}<1。$$

最后，利用 Young's 不等式整理可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x+\frac{(p-1)}{4}\int_\Omega(u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\mu}{2}\int_\Omega(u+1)^{p+1}\,\mathrm{d}x\le C \tag{2.16}$$

对(2.16)在 $(0,t)$ 上积分可得对任意的 $p>1$，有

$$\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x\le C。$$

定理 1 的证明：首先，假设 (u,v,w) 是模型(1.1)的解，对任意的 $t\in(0,T_{\max})$，存在常数 $C>0$，由一阶常微分方程理论和 Hölder's 不等式可得

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\le\|w_0\|_{L^p(\Omega)}+\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)}\|u(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}\mathrm{d}s\le\|w_0\|_{L^p(\Omega)}+\|u(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}\left(\tfrac{p}{p-1}\right)^{-\frac{p-1}{p}}\le C_{16} \tag{2.17}$$

又因为 $p>n$ 时，$\theta\in[1,\infty]$ 可得

$$\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^\theta(\Omega)}\le C_{17}\|\nabla v_0\|_{L^\infty(\Omega)}+C_{18}\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\int_0^\infty\left(1+s^\phi\right)^{-\lambda s}\mathrm{d}s\le C \tag{2.18}$$

其中 $\phi>-1$，即可证明 $\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C$。

其次，当 $m>q-1-\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)}$，$1<q\le2$。当 $D(u)$ 和 $S(u)$ 满足(1.2)，对任意的 $p>1$，模型(1.1)两边同乘 $(u+1)^{p-1}$ 并在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x+(p-1)\int_\Omega(u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{p-1}{4}\int_\Omega(u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+(p-1)C_{19}^2\int_\Omega(u+1)^{p+2q-m-3}\,\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega\left(u-u^2\right)(u+1)^{p-1}\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{p-1}{4}\int_\Omega(u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+C_{20}p\int_\Omega(u+1)^{p+2q-m-3}\,\mathrm{d}x-\int_\Omega(u+1)^p\,\mathrm{d}x-\frac{\mu}{4}\int_\Omega(u+1)^{p+1}\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中 $C_{20}=C_{19}^2+2\mu+1$，$q-1-\dfrac{\mu}{4\cdot\left(1+\bar{C}\lambda_0\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^3 2^3\right)}<m<2q-3$，对上式右端第二项运用文献[7]的引理 2.1 和 Young's 不等式可得

$$\begin{aligned}&C_{20}p\int_\Omega(u+1)^{p+2q-m-3}\mathrm{d}x\\&\le C_{21}\left(\left\|\nabla(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(p+2q-m-3)}{m+p-1}\varsigma_1}\left\|(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2(p+2q-m-3)}{m+p-1}1-\varsigma_1}+\left\|(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2(p+2q-m-3)}{m+p-1}}\right)\\&\le C_{22}\left\|\nabla(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+C_{23}\left\|(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2(p+2q-m-3)}{m+p-1}}\end{aligned} \tag{2.20}$$

整理(2.19)和(2.20)可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}(u+1)^{p}\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}(u+1)^{p}\,\mathrm{d}x+C_{20}\int_{\Omega}\left|\nabla(u+1)^{\frac{m+p-1}{2}}\right|^{2}\mathrm{d}x\le C_{24}, \tag{2.21}$$

再运用 Gronwall 不等式可得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{p}(\Omega)}\le C_{24}\text{。}$$

再对上式运用标准的 Alikakos-Moser 迭代即可得到

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\le C\text{。}$$

最后，对模型(1.1)的第三个方程求一阶线性常微分方程的解，显然可得

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\le C\text{。}$$

从而定理 1 得证。

基金项目

新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(NO. 2018D01C004)。

参考文献

[1] Hu, B.R. and Tao, Y. (2016) To the Exclusion of Blow-Up in a Three-Dimensional Chemotaxis-Growth Model with Indirect Attractant Production. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 2111-2128. https://doi.org/10.1142/S0218202516400091

[2] Li, H. and Tao, Y.S. (2017) Boundedness in a Chemotaxis System with Indirect Signal Production and Generalized Logistic Source. *Applied Mathematics Letters*, **77**, 108-113. https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.10.006

[3] Tang, Q., Xin, Q. and Mu, C. (2020) Boundedness of the Higher-Dimensional Quasilinear Chemotaxis System with Generalized Logistic Source. *Acta Mathematica Scientia*, **40**, 713-722. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0309-0

[4] Tao, Y.S. (2011) Boundedness in a Chemotaxis Model with Oxygen Consumption by Bacteria. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **381**, 521-529. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.041

[5] Tao, Y.S. and Winkler, M. (2012) Eventual Smoothness and Stabilization of Large-Data Solutions in a Three-Dimensional Chemotaxis System with Consumption of Chemoattractant. *Journal of Differential Equations*, **252**, 2520-2543. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.07.010

[6] Lankeit, J. and Wang, Y.L. (2016) Global Existence, Boundedness and Stabilization in a High-Dimensional Chemotaxis System with Consumption. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **37**, 6099-6121. https://doi.org/10.3934/dcds.2017262

[7] Zheng, J. (2018) Global Solvability and Boundedness in the N-Dimensional Quasilinear Chemotaxis Model with Logistic Source and Consumption of Chemoattractant.

[8] Fuest, M. (2019) Analysis of a Chemotaxis Model with Indirect Signal Absorption. *Journal of Differential Equations*, **267**, 4778-4806. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.05.015

[9] Liu, Y., Li, Z. and Huang, J. (2020) Global Boundedness and Large Time Behavior of a Chemotaxis System with Indirect Signal Absorption. *Journal of Differential Equations*, **269**, 6365-6399. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.05.008

[10] Zheng, P. and Xing, J. (2020) Boundedness and Large-Time Behavior for a Two-Dimensional Quasilinear Chemotaxis-Growth System with Indirect Signal Consumption. *Ztschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **71**, Article No. 98. https://doi.org/10.1007/s00033-020-01320-w

[11] Song, X. and Zheng, J. (2019) A New Result for Global Solvability and Boundedness in the N-Dimensional Quasilinear Chemotaxis Model with Logistic Source and Consumption of Chemoattractant. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **475**, 895-917. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.03.002