Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(3), 377-386
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113050

Hans汉斯

Littlewood-Paley积分与Q_K型空间的刻画

崔　洁

青岛大学数学与统计学院，山东　青岛
Email: cuij_chn@163.com

收稿日期：2021年2月18日；录用日期：2021年3月19日；发布日期：2021年3月31日

摘　要

本文主要研究一类新的一维Q型空间——$Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$。首先给出了$Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$的若干基本性质。进而通过一类Littlewood-Paley函数Φ所构成的卷积算子，得到了该空间的Carleson测度刻画。

关键词

Q型空间，Carleson测度，Littlewood-Paley函数

Littlewood-Paley Integrals and the Characterization of Q_K Type Spaces

Jie Cui

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: cuij_chn@163.com

Received: Feb. 18th, 2021; accepted: Mar. 19th, 2021; published: Mar. 31st, 2021

Abstract

In this paper, we introduce a new class of Q type spaces $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$. We first investigate some basic properties of $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$. Further, via a family of convolution operators generated by Littlewood-Paley functions Φ, we establish a Carleson measure characterization of $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$.

文章引用: 崔洁. Littlewood-Paley 积分与 Q_K 型空间的刻画[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 377-386.
DOI: 10.12677/pm.2021.113050

Keywords

Q-Type Space, Carleson Measure, Littlewood-Paley Function

1. 引言

在调和分析和偏微分方程的研究中，Q 型空间起到重要的作用。作为介于 Sobolev 空间和 BMO 空间之间的一类可微函数空间，Q 型空间兼具两者的特点，一方面该空间具有平均振荡的性质，从而在调和分析研究中可以作为 BMO 空间的一个很好的替代。另一方面，该空间可以看作与 Campanato-Sobolev 型空间等价，因此在偏微分方程中具有很好的应用。在最近几十年中，Q 型空间及其推广的形式得到了广泛的研究。最早 Q 型空间 $Q_p(\mathbb{D})$ 是作为单位圆盘 D 上全纯 BMO 型空间 $BMOA(\mathbb{D})$ 上的推广而提出的([1])。在 2001 年，Essen 等人在文献[2]中将 Q 型空间推广到高维欧氏空间的情形，建立了 $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间的实变理论，从而使 Q 型空间可以广泛应用到调和分析和偏微分方程的诸多课题的研究中，相关的研究进展参见文献[3] [4] [5] [6]。

从几何的观点看，经典的 Q 型空间可以看作是一类与幂函数相关的加权函数空间，参见[7]。当将幂函数替换为一个一般的权函数时，很自然地产生了相应的加权 Q 型空间。2002 年，Essen，Xiao 和 Wulan 在文献[8]中建立并研究了单位圆盘上与权函数相关的 Q 型空间 $Q_K(\mathbb{D})$。$Q_K(\mathbb{D})$ 的高维实变形式由 Bao 和 Wulan 于 2014 年在文献[9]中引入，此后该类加权 Q 型空间得到了许多研究者的关注，参见文献[10] [11] [12]。

本文在上述结果的基础上，引入一类新的 Q 型空间 $Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})$，定义如下：

定义 1 令 $1<p<\infty$, $\lambda>0$，设 $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个单调非减函数，则 $f\in L_{loc}^p(\mathbb{R})$ 属于 $Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})$ 当且仅当

$$\|f\|_{Q_{K,\lambda}^p}^p(\mathbb{R})=\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\ell(I)^{-\lambda}\int_I\int_I\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p}K\left(\frac{|x-y|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,$$

其中，I 是 $\mathbb{R}$ 上的一个区间，$\ell(I)$ 表示区间 I 的长度。

本文的主要目的是利用 Carleson 测度刻画 $Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})$。BMO 空间和经典的 Q 型空间的主要结果之一是这两类空间均可以通过 Carleson 测度进行刻画，参见[2] [3]。在本文中，作者引入如下卷积算子：

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数，并且满足：

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)|}{1+|x|^2}\mathrm{d}x<\infty, \tag{1}$$

假设 Φ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个实值 C^∞ 函数且满足：

$$\begin{cases}|\Phi(x)|\lesssim(1+|x|)^{-2};\\|\nabla\Phi(x)|\lesssim(1+|x|)^{-3};\\\Phi_t(x):=1/t\,\Phi(x/t).\end{cases} \tag{2}$$

定义 Littlewood-Paley 积分：

$$\Phi_t(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi_t(x-y) f(y) \mathrm{d}y.$$

首先，在第二节中，作者给出 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 的若干基本性质，并讨论了该空间与 Campanato 型空间 BMO_{γ}^{p} 之间的关系。作为本文的主要结果，作者在第三节中利用上述定义的 Littlewood-Paley 积分 $\Phi_t(f)$ 和与权函数相关的 Carleson 测度刻画 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$。

2. $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 的基本性质

本节主要讨论 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 的一些基本性质。众所周知，经典的 Q 型空间 $Q_{\alpha}(\mathbb{R})$ 具有仿射不变性，即在平移，旋转和共形映射变换之下是不变的。由 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 的定义，通过直接计算可以证明 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 具有类似的性质。首先，我们可以得到 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 的一个简单刻画，即在共形映射和旋转下是保持不变的；其次，我们需要如下辅助函数：

$$\varphi_K(s) = \sup_{0<t\le 1} \frac{K(st)}{K(t)}, 0 < s < \infty.$$

我们在本文中假设辅助函数 $\varphi_K(s)$ 满足以下两个条件：

$$\int_1^{\infty} \frac{\varphi_K(s)}{s^p} \mathrm{d}s < \infty, \tag{3}$$

$$\int_0^{1} \frac{\varphi_K(s)}{s^{p-1}} \mathrm{d}s < \infty. \tag{4}$$

下面，我们证明 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 是非平凡的。

定义 1 令 $1 < p < \infty, \lambda > 0$。若

$$\|f\|_{Q_{1-1/p,\lambda}^{p}}^{p}(\mathbb{R}) = \sup_{I\subseteq\mathbb{R}} \ell(I)^{-\lambda} \int_I \int_I \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty,$$

那么，称 $f \in Q_{1-1/p,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$，其中 I 是 $\mathbb{R}$ 上的一个区间，$\ell(I)$ 是区间 I 的长度。

定理 1 令 $1 < p < \infty, \lambda > 0$，有 $Q_{1-1/p,\lambda}^{p}(\mathbb{R}) \subseteq Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$，并且 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 是非平凡的。

证明 设 I 是 $\mathbb{R}$ 上的一个区间，对于任意 $x, y \in I$，有 $|x-y| \le \ell(I)$，即 $\frac{|x-y|}{\ell(I)} \le 1$。因为 K 是一个非减的函数，所以 $K\left(\frac{|x-y|}{\ell(I)}\right) \le K(1)$。对于任意 $f \in Q_{1-1/p,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$，有

$$\ell(I)^{-\lambda} \int_I \int_I \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p} K\left(\frac{|x-y|}{\ell(I)}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le K(1) \ell(I)^{-\lambda} \int_I \int_I \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $Q_{1-1/p,\lambda}^{p}(\mathbb{R}) \subseteq Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$。而 $Q_{1-1/p,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 是非平凡的，故 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 是非平凡的。

接下来，本文讨论新的 $Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$ 空间与经典函数空间的关系，首先我们引入 Campanato 型空间的定义：

定义 2 令 $1 < p < \infty, \gamma > 0$。若 $f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R})$，且满足

$$\|f\|_{BMO_{\gamma}^{p}(\mathbb{R})}^{p} = \sup_{I\subseteq\mathbb{R}} \ell(I)^{-p-\gamma} \int_I |f(x) - f_I|^p \mathrm{d}x < \infty,$$

那么，称 $f\in BMO_\gamma^p(\mathbb{R})$。其中，$f_I=\ell(I)^{-1}\int_I f(x)\mathrm{d}x$，$I$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个区间，$\ell(I)$ 表示区间 I 的长度。并且，该式中上确界取遍 $\mathbb{R}$ 上所有长度为 $\ell(I)$ 的区间。

我们可以证明当 $\gamma=\lambda+1$ 时，新的空间 $Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})$ 是 Campanato 型空间 $BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})$ 的子空间。

定理 2 $Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})$ 是 $BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})$ 的子空间，即 $Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})\subseteq BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})$。

证明 设 $f\in Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})$，$I$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个区间，所以对任意 $x,y\in I$，如果 $\zeta>0$ 足够小，我们可以得到集合 $\{z\in I:\min(|x-z|,|y-z|)>\zeta\ell(I)\}$，它的测度大于 $C_{\zeta,n}\ell(I)$。因为 K 是非减的，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_I \min\left\{K\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right),K\left(\frac{|y-z|}{\ell(I)}\right)\right\}\mathrm{d}z\\
&\geq \int_{\{z\in I:\min(|x-z|,|y-z|)>\zeta\ell(I)\}}\min\left\{K\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right),K\left(\frac{|y-z|}{\ell(I)}\right)\right\}\mathrm{d}z\\
&\geq K(\zeta)C_{\zeta,n}\ell(I).
\end{aligned}
$$

注意到 $|x-z|^p\leq \ell(I)^p$，则对于一个足够小的 $\zeta>0$，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\|f\|_{BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})}^p\\
&\leq \ell(I)^{-\lambda-1}\int_I\int_I\left|\ell(I)^{-1}\int_I f(x)\mathrm{d}y-\ell(I)^{-1}\int_I f(y)\mathrm{d}y\right|^p\min\left\{K\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right),K\left(\frac{|y-z|}{\ell(I)}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\
&\lesssim \ell(I)^{-p-\lambda-1}\left[\int_I\int_I\int_I|f(x)-f(z)|^pK\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int_I\int_I\int_I|f(y)-f(z)|^pK\left(\frac{|y-z|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]\\
&\lesssim \ell(I)^{-p-\lambda}\int_I\int_I|f(x)-f(z)|^pK\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\
&\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\int_I\int_I\frac{|f(x)-f(z)|^p}{|x-z|^p}K\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\lesssim\|f\|_{Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})}^p<\infty.
\end{aligned}
$$

所以，$Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})\subseteq BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})$。从而完成了定理 2 的证明。

当权函数 K 进一步满足特定条件时，可以证明：

定理 3 如果 $\int_0^1\frac{K(t)}{t^p}\mathrm{d}t<\infty$，则有 $Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})=BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})$。

证明 由定理 2 可知，$Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})\subseteq BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})$，所以只需证 $BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})\subseteq Q_{K,\lambda}^p(\mathbb{R})$。

注意到，$\|f\|_{BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})}^p\approx\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\ell(I)^{-p-\lambda-1}\int_I\int_I|f(x)-f_I|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。而对于 $\mathbb{R}$ 上的任意区间 I 和 $y\in\mathbb{R}$，$|y|<\ell(I)$，

$$
\begin{aligned}
&\ell(I)^{-\lambda}\int_I|f(x+y)-f(x)|^p\mathrm{d}x\\
&\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\left(3\sqrt{n}\ell(I)\right)^{p+1}\left[\left(3\sqrt{n}\ell(I)\right)^{-p-1}\int_{3\sqrt{n}I}\left|f(x+y)-f_{3\sqrt{n}I}\right|^p\mathrm{d}(x+y)\right.\\
&\qquad\left.+\left(3\sqrt{n}\ell(I)\right)^{-p-1}\int_{3\sqrt{n}I}\left|f(y)-f_{3\sqrt{n}I}\right|^p\mathrm{d}x\right]\\
&\lesssim \ell(I)^{p+1}\|f\|_{BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})}^p.
\end{aligned}
$$

所以，对任意 $f\in BMO_{\lambda+1}^p(\mathbb{R})$，

$$\ell(I)^{-\lambda}\int_I\int_I\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p}K\left(\frac{|x-y|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\le\ell(I)^{-\lambda}\int_{|y|<\ell(I)}\int_I\frac{|f(x)-f(x+y)|^p}{|y|^p}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\lesssim\ell(I)^{p-1}\|f\|^p_{BMO^p_{\lambda+1}(\mathbb{R})}\int_{|y|<\ell(I)}|y|^{-p}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}y$$
$$\lesssim\|f\|^p_{BMO^p_{\lambda+1}(\mathbb{R})}\int_0^1\frac{K(t)}{t^p}\mathrm{d}t<\infty.$$

因此，$BMO^p_{\lambda+1}(\mathbb{R})\subseteq Q^p_{K,\lambda}(\mathbb{R})$。综上所述，$Q^p_{K,\lambda}(\mathbb{R})=BMO^p_{\lambda+1}(\mathbb{R})$，证明完成。

3. $Q^p_{K,\lambda}(\mathbb{R})$ 空间的 Carleson 型测度刻画

设 I 是 $\mathbb{R}$ 上任意区间，$\mathbb{R}^2_+=\{(x,t):x\in\mathbb{R},t>0\}$ 表示上半平面，定义如下 Carleson 方体：

$$S(I)=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2_+:x\in I,0<t<\ell(I)\}.$$

为简便起见，我们用 $v(x)$ 表示点 $x\in\mathbb{R}^2_+$ 到其边界的距离，$v(y)$ 类似；$\delta(x,y^*)=dist\{(x,y^*),\mathbb{R}^2\}$，其中 y^* 为 $y\in\mathbb{R}^2_+$ 关于坐标轴的对称点，即，如果 $y=(y_1,y_2)$，那么 $y^*=(y_1,-y_2)$。

下面引入 (K,λ)-Carleson 测度的定义以及有关 (K,λ)- Carleson 测度的刻画。

定义 3 设 μ 是 $\mathbb{R}^2_+$ 上的正 Borel 测度，则称 $\mu(\cdot,\cdot)$ 是一个 (K,λ)-Carleson 测度，如果

$$\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I)}K\left(\frac{v(x)}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\mu(x,t)<\infty.$$

类似于经典 Q 型空间，可以证明 $Q^p_{K,\lambda}(\mathbb{R})$ 有类似的性质。

定理 4 设 $\lambda<-1$，并且 K 满足 $\int_0^1\frac{\varphi_K(s)}{s}\mathrm{d}s<\infty$，设 μ 是 $\mathbb{R}^2_+$ 上的正 Borel 测度，则 μ 是一个 (K,λ)- Carleson 测度当且仅当 $\sup_{y\in\mathbb{R}^2_+}\ell(I)^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}^2_+}K\left(\frac{v(x)v(y)}{\delta(x,y^*)^2}\right)\mathrm{d}\mu(x)<\infty$。

证明 必要性 若 μ 是一个 (K,λ)-Carleson 测度，设 I 是 $\mathbb{R}$ 上的区间，并且以 $\bar{y}$ 为中心，长度为 $v(y)$。对任意正整数 K，定义 I_ζ 为与 I 中心相同且边长为 $2\zeta\ell(I)$ 的方体。再者，$S(I_\zeta)$ 指对应的 Carleson 方体。从而，易知 $\begin{cases}\delta(x,y^*)\ge v(y),x\in S(2I);\\ \delta(x,y^*)\approx 2^\zeta v(y),x\in S(I_{\zeta+1})\setminus S(I_\zeta).\end{cases}$

进而，

$$\ell(I)^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}^2_+}K\left(\frac{v(x)v(y)}{\delta(x,y^*)^2}\right)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$=\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(2I)}K\left(\frac{v(x)v(y)}{\delta(x,y^*)^2}\right)\mathrm{d}\mu(x)+\sum_{\zeta=1}^{\infty}\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I_{\zeta+1})\setminus S(I_\zeta)}K\left(\frac{v(x)v(y)}{\delta(x,y^*)^2}\right)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$\le\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(2I)}K\left(\frac{v(x)}{v(y)}\right)\mathrm{d}\mu(x)+\sum_{\zeta=1}^{\infty}\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I_{\zeta+1})\setminus S(I_\zeta)}K\left(\frac{v(x)}{2^{2\zeta}v(y)}\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

由假设知，μ 是一个(K,λ)-Carleson 测度，$\left(2^{\zeta}\ell(I)\right)^{-\lambda}\int_{S(I_{\zeta})}K\left(\frac{v(x)}{2^{\zeta}\ell(I)}\right)\mathrm{d}\mu(x)\lesssim 1$。

综上所述，可以推出

$$
\begin{aligned}
&\ell(I)^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}_+^2}K\left(\frac{v(x)v(y)}{\delta(x,y^*)^2}\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\lesssim 1+\sum_{\zeta=1}^{\infty}\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I_{\zeta+1})}K\left(\frac{v(x)}{2^{2\zeta+1}v(y)}\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\lesssim 1+\sum_{\zeta=1}^{\infty}\varphi_K\left(2^{-\zeta}\right)2^{n\lambda(\zeta+1)}\left(2^{\zeta+1}\ell(I)\right)^{-\lambda}\int_{S(I_{\zeta+1})}K\left(\frac{v(x)}{2^{\zeta+1}v(y)}\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\lesssim\sum_{\zeta=1}^{\infty}\varphi_K\left(2^{-\zeta}\right)\lesssim\int_0^1\varphi_K(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}<\infty.
\end{aligned}
$$

充分性 下面，记 Carleson 方体$S(I_{\zeta})$的中心为 y，那么可知，现在$v(y)=\frac{\ell(I)}{2}$。如果$x\in S(I)$，就有$\left|x-y^*\right|\lesssim\ell(I)$，因此可以得到，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I)}K\left(\frac{v(x)}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\lesssim\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(2I)}K\left(\frac{v(x)}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\lesssim\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\ell(I)^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}_+^2}K\left(\frac{v(x)v(y)}{\delta(x,y^*)^2}\right)\mathrm{d}\mu(x)<\infty.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

此时，如果(5)式成立，则 μ 是一个(K,λ)-Carleson 测度。从而定理 4 得证。

为了进一步研究$Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$的 Carleson 测度刻画，给出如下两个引理：

引理 1 设$1<p<\infty$，若 K 满足(3)，则$\sup\limits_{0<s<1}\left(\int_s^1\frac{K(t)}{t^p}\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^s\left(K(t)\right)^{1/(1-p)}\mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p}<\infty$。

引理 2 令$1<p<\infty,1/p+1/q=1,0<b\le\infty$。设非负函数 μ 和 h 在$(0,b)$上可测，对于所有可测函数$f\ge 0$，可得到以下 Hardy 型不等式：

(i) $\int_0^b\left(\int_0^s f(t)\mathrm{d}t\right)^p\mu(s)\mathrm{d}s\le C\int_0^b f^p(s)h(s)\mathrm{d}s$ 成立，当且仅当

$$A:=\sup_{0<s<b}\left(\int_s^b\mu(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^s h(t)^{1-q}\mathrm{d}t\right)^{1/q}<\infty,$$

(ii) $\int_0^b\left(\int_s^b f(t)\mathrm{d}t\right)^p\mu(s)\mathrm{d}s\le C\int_0^b f^p(s)h(s)\mathrm{d}s$ 成立，当且仅当

$$B:=\sup_{0<s<b}\left(\int_0^s\mu(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_s^b h(t)^{1-q}\mathrm{d}t\right)^{1/q}<\infty,$$

其中 C 的取值依赖于 p，A 或者 B。

借助于上面给出的引理 1 和引理 2，接下来利用 Liitlewood 函数 Φ 的性质给出本文的主要结果：

定理 5 设$f\in L_{loc}^{p}(\mathbb{R})$并且满足(1)式，其中$1<p<2$。假设 K 满足(3)，(4)，那么

(i) 如果 $f\in Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$，则 $\left|\nabla f(x,t)\right|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 是一个 (K,λ)-Carleson 测度；

(ii) 如果 $\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}\Phi_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y=f(x)$，则若 $\left|\nabla f(x,t)\right|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 是一个 (K,λ)-Carleson 测度，有 $f\in Q_{K,\lambda}^{p}(\mathbb{R})$。

证明 (i) 设 I 和 J 都是 $\mathbb{R}$ 上以 x_0 为中点的区间，并且有 $\ell(J)=3\ell(I)$。不失一般性，我们假设 $x_0=0$。设函数 τ 满足 $\begin{cases}\tau=1, & 在(2/3)J上;\\ \mathrm{supp}\ \tau\subseteq(4/5)J, & 且0\le\tau\le 1,\end{cases}$ 则有 $\left|\tau(x)-\tau(y)\right|\lesssim\ell(J)^{-1}|x-y|$。

对 f 作分解，$f=f_1+f_2+f_3$，其中 $\begin{cases}f_1=f_J;\\ f_2=(f-f_J)\tau;\\ f_3=(f-f_J)(1-\tau).\end{cases}$

根据引言中 Littlewood-Paley 函数 Φ 的定义以及限制条件(2)，易知 $\begin{cases}\left|\dfrac{\partial\Phi_t(y)}{\partial y}\right|\lesssim\left(t^2+|y|^2\right)^{-1};\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\Phi_t(y)}{\partial y}\mathrm{d}y=0.\end{cases}$

从而，

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right|&\le\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial\Phi_t(y)}{\partial y}\right|\left|f(x)-f(x+y)\right|\mathrm{d}y\\&\le\left|\left(t^2+|y|^2\right)^{-1}\right|\left|f(x)-f(x+y)\right|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

又由 Minkowski 不等式，可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}&\lesssim\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\left(t^2+|y|^2\right)^{-1}\right|\left|f(x)-f(x+y)\right|\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\&\lesssim\int_{\mathbb{R}}\left|\left(t^2+|y|^2\right)^{-1}\right|\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)-f(x+y)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y\\&\lesssim t^{-2}\int_{|y|\le t}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f(x+y)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{|y|>t}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f(x+y)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}|y|^{-2}\mathrm{d}y\\&\lesssim t^{-2}\int_0^1\int_{|\xi|=1}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f(x+r\xi)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r\\&\quad+\int_t^{\infty}\int_{|\xi|=1}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f(x+r\xi)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}r^{-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

这里 $r=|y|,|\xi|=1$，上述计算中的最后一步使用了球坐标变换。设

$$\Psi(r):=\int_{|\xi|=1}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f(x+r\xi)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}\xi,$$

从而有

$$\left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim t^{-2}\int_0^t\Psi(r)\mathrm{d}r+\int_t^{\infty}\Psi(r)r^{-2}\mathrm{d}r.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I)}\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right|^{p}K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le \ell(I)^{-\lambda}\int_0^{\ell(I)}K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p}\mathrm{d}t\\
&\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\int_0^{\ell(I)}K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\left(t^{-2}\int_0^t\Psi(r)\mathrm{d}r+\int_t^\infty\Psi(r)r^{-2}\mathrm{d}r\right)^p\mathrm{d}t\\
&\lesssim \ell(I)^{1-p}(B_1+B_2),
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\begin{cases}
B_1 := \ell(I)^{-\lambda}\int_0^1 K(t)t^{-2p}\left(\int_0^t\Psi(\ell(I)r)\mathrm{d}r\right)^p\mathrm{d}t;\\
B_2 := \ell(I)^{-\lambda}\int_0^1 K(t)\left(\int_t^\infty\Psi(\ell(I)r)r^{-2}\mathrm{d}r\right)^p\mathrm{d}t.
\end{cases}
$$

对于 B_1，注意到

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0<s<1}\left(\int_s^1\frac{K(t)}{t^{2p}}\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^s\frac{(K(t))^{1/(1-p)}}{t^{p/(1-p)}}\mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p}\\
&\le \sup_{0<s<1}\left(\int_s^1\frac{K(t)}{t^{p}}\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^s(K(t))^{1/(1-p)}\mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p}<\infty.
\end{aligned}
$$

根据引理 1，易得

$$
B_1\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\int_0^1\frac{K(t)}{t^p}\left(\Psi(\ell(I)t)\right)^p\mathrm{d}t.
$$

$$
\begin{aligned}
B_2&\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\int_0^\infty K(t)\left(\int_t^\infty\Psi(\ell(I)r)r^{-2}\mathrm{d}r\right)^p\mathrm{d}t\\
&\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\int_0^\infty\frac{K(t)}{t^p}\left(\Psi(\ell(I)t)\right)^p\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

因此，由 Hölder 不等式以及球坐标变换，可得

$$
\begin{aligned}
&\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I)}\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right|^{p}K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \ell(I)^{1-p-\lambda}\int_0^\infty\frac{K(t)}{t^p}\left(\Psi(\ell(I)t)\right)^p\mathrm{d}t\\
&\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\int_0^\infty K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)t^{-p}\left(\Psi(t)\right)^p\mathrm{d}t\\
&\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\int_0^\infty\int_{|\xi|=1}\left\|f(x+t\xi)-f(x)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p}K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)t^{-p}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\\
&\lesssim \ell(I)^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x+y)-f(x)\right|^{p}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)|y|^{-p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

注意到，$\begin{cases}\left|\dfrac{\partial\Phi_t(y)}{\partial t}\right|\le t^{-n-1};\\ \int_{\mathbb{R}}\dfrac{\partial\Phi_t(y)}{\partial t}\mathrm{d}y=0,\end{cases}$ 可得 $\left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\le\int_{\mathbb{R}}\left|\dfrac{\partial\Phi_t(y)}{\partial t}\right|\left|f(x+y)-f(x)\right|\mathrm{d}y$。

同理可得，$\int_{S(I)}\left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|^p K\left(\dfrac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\lesssim\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x+y)-f(x)\right|^p K\left(\dfrac{|y|}{\ell(I)}\right)|y|^{-p}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

因此，$\int_{S(I)}\left|\nabla f_2(x,t)\right|^p K\left(\dfrac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\lesssim C_1+C_2+C_3$，其中，

$$\begin{cases}C_1:=\int_{y\in J}\int_{x\in J}\dfrac{\left|f_2(x)-f_2(y)\right|^p}{|x-y|^p}K\left(\dfrac{|x-y|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\\ C_2:=\int_{y\in(4/5)J}\int_{x\notin J}\dfrac{\left|f_2(x)-f_2(y)\right|^p}{|x-y|^p}K\left(\dfrac{|x-y|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\\ C_3:=\int_{y\notin J}\int_{x\in(4/5)J}\dfrac{\left|f_2(x)-f_2(y)\right|^p}{|x-y|^p}K\left(\dfrac{|x-y|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{cases}$$

类似于上面的过程，继续将其分解讨论，如此进行下去，最终可得

$$\ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I)}\left|\nabla f(x,t)\right|^p K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\lesssim\|f\|^p_{Q^p_{K,\lambda}(\mathbb{R})}.$$

(ii) 由三角不等式，易知

$$\sup_I\ell(I)^{-\lambda}\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)|y|^{-p}\int_I\left|f(x+y)-f(x)\right|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\lesssim A_1+A_2+A_3,$$

其中，$\begin{cases}A_1:=\sup\limits_I\ell(I)^{-\lambda}\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\dfrac{|y|}{\ell(I)}\right)|y|^{-p}\int_I\left|f(x,|y|)-f(x)\right|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\\ A_2:=\sup\limits_I\ell(I)^{-\lambda}\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\dfrac{|y|}{\ell(I)}\right)|y|^{-p}\int_I\left|f(x+y,|y|)-f(x+y)\right|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\\ A_3:=\sup\limits_I\ell(I)^{-\lambda}\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\dfrac{|y|}{\ell(I)}\right)|y|^{-p}\int_I\left|f(x+y,|y|)-f(x,|y|)\right|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{cases}$

对于 A_1，根据 Minkowski 不等式易知

$$\begin{aligned}\left(\int_I\left|f(x,|y|)-f(x)\right|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}&\le\left(\int_I\left(\int_0^{|y|}\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\mathrm{d}t\right)^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\&\le\int_0^{|y|}\left(\int_I\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\,\mathrm{d}t\\&\le\int_0^{|y|}\left(\int_I\left|\nabla f(x,t)\right|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

所以，由引理 1 和引理 2 我们可以得到

$$A_1 \le \sup_I \ell(I)^{-\lambda} \int_{|y|<\ell(I)} K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)|y|^{-p}\left(\int_0^{|y|}\left(\int_I |\nabla f(x,t)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}y$$
$$\lesssim \sup_I \ell(I)^{-\lambda+1}\int_0^1 \frac{K(r)}{r^p}\left(\int_0^r\left(\int_I |\nabla f(x,\ell(I)s)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}r$$
$$\lesssim \sup_I \ell(I)^{-\lambda+1}\int_0^1\left(\int_I |\nabla f(x,\ell(I)r)|^p \mathrm{d}x\right)K(r)\mathrm{d}r$$
$$\lesssim \sup_I \ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I)}|\nabla f(x,t)|^p K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty.$$

同理，$A_3 \lesssim \sup_I \ell(I)^{-\lambda}\int_{S(I)}|\nabla f(x,t)|^p K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty$。

对于 A_2，易知 $A_2 \le \sup_I \ell(I)^{-\lambda}\int_{|y|<\ell(I)} K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)|y|^{-p}\int_{3I}|f(x,|y|)-f(x)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \lesssim A_1<\infty$。

因此，$f\in Q^p_{K,\lambda}(\mathbb{R})$。这就完成了定理 5 的证明。

致　谢

作者衷心感谢李澎涛教授的指导与建议。

基金项目

山东省自然科学基金(项目编号：ZR2020MA004)；国家自然科学基金(项目编号：11471176)。

参考文献

[1] Aulaskari, R., Xiao, J. and Zhao, R. (1995) On Subspaces and Subsets of BMOA and UBC. *Analysis*, **15**, 101-121. https://doi.org/10.1524/anly.1995.15.2.101

[2] Essén, M., Janson, S., Peng, L. and Xiao, J. (2000) Q Spaces of Several Real Variables. *Indiana University Mathematics Journal*, **49**, 575-615. https://doi.org/10.1512/iumj.2000.49.1732

[3] Dafni, G. and Xiao, J. (2004) Some New Tent Spaces and Duality Theorems for Fractional Carleson Measures and $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$. *Journal of Functional Analysis*, **208**, 377-422. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00181-2

[4] Wu, Z. and Xie, C. (2003) Q Spaces and Morrey Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **201**, 282-297. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00020-X

[5] Xiao, J. (2007) Homothetic Variant of Fractional Sobolev Space with Application to Navier-Stokes System. *Dynamics of Partial Differential Equations*, **4**, 227-245. https://doi.org/10.4310/DPDE.2007.v4.n3.a2

[6] Li, P. and Zhai, Z. (2010) Well-Posedness and Regularity of Generalized Navier-Stokes Equations in Some Critical Q-Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **259**, 2457-2519. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.07.013

[7] Essén, M. and Wulan, H. (2002) On Analytic and Meromorphic Function and Spaces of Q_K-Type. *Illinois Journal of Mathematics*, **46**, 1233-1258.

[8] Essén, M., Wulan, H. and Xiao, J. (2006) Several Function-Theoretic Characterizations of Möius Invariant Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **230**, 78-115. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2005.07.004

[9] Bao, G. and Wulan, H. (2014) Spaces of Several Real Variables. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, 1-14. https://doi.org/10.1155/2014/931937

[10] 陈萱. 与权函数相关的一维实变 Q 型空间的 Carleson 型刻画[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 990-995. https://doi.org/10.12677/PM.2020.1010116

[11] Han, F. and Li, P. (2020) Characterizations for a Class of Q-Type Spaces of Several Real Variables. *Advances in Mathematics (China)*, **49**, 195-214.

[12] Wulan, H. and Zhou, J. (2014) Decomposition Theorems for Spaces and Applications. *Forum Mathematicum*, **26**, 467-495. https://doi.org/10.1515/form.2011.174