Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(3), 395-406
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113052

Hans汉斯

区间上N型函数的一般迭代性质研究

魏小琴

重庆师范大学，重庆
Email: 1559527102@qq.com

收稿日期：2021年2月21日；录用日期：2021年3月23日；发布日期：2021年3月31日

摘　要

折线函数的迭代性质研究，折线函数是最简单的非线性函数，函数数值迭代运算下可以交叉于不同的子区间，导致迭代情况极其复杂。前人已经对折线函数的2次迭代、单折点的折线函数的迭代进行了研究，本文在此基础上，对两个折点时的折线函数中的(N型)的迭代进行了讨论，利用折点的运动轨道变化来探索迭代下折点在迭代情况，并在若干情形下给出其*n*次迭代表达式。

关键词

折线函数，迭代，折点，N型函数

Research on General Iterative Properties of N-Type Functions on the Interval

Xiaoqin Wei

Chongqing Normal University, Chongqing
Email: 1559527102@qq.com

Received: Feb. 21st, 2021; accepted: Mar. 23rd, 2021; published: Mar. 31st, 2021

Abstract

In this paper, we mainly discuss the iterative properties of polygonal function. Although polygonal function is the simplest nonlinear function, it can cross different sub intervals under the numerical iterative operation, which makes the iterative situation extremely complex. Predecessors have studied the second iteration of polygonal function and the iteration of polygonal function with single vertex. Based on this, this paper discusses the (N-type of function) iteration of polygonal function with two vertex, explores the iterative situation of the vertex by using the dynamics orbit of the vertex, and gives its *n*-times iterative representation in some cases.

文章引用: 魏小琴. 区间上 N 型函数的一般迭代性质研究[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 395-406.
DOI: 10.12677/pm.2021.113052

Keywords

Polygonal Function, Iteration, Vertex, N-Type Function

1. 引言

动力系统起源于 19 世纪 80 年代，法国数学家 Poincare 创立了微分方程定性理论，为研究动力系统奠定了基础。事实上，动力系统就是要研究一个决定性系统的状态随时间变化而变化的规律问题。我们通常情况下所说的动力系统多指由映射迭代生成的系统，可以利用它来模拟实际生活中的一些随时间变化而不断演变的事物，这样可以看作是一种运算或者说是法则在其某个集合上做自映射运算，因此对映射迭代的研究就显得尤为重要。由于迭代运算的复杂性，导致映射问题古老而复杂，迟迟没有较大的进展。一直到二十世纪，随着计算机条件的改善，微分方程、差分方程等数学领域的相互融合，才使得映射迭代问题取得了巨大的突破。

人们对于映射迭代的研究，可以追溯到一百多年前，著名数学家 Abel [1]、Schroder [2]、Babbage [3]等人对映射迭代的研究工作，迭代运算相比于代数运算来说，要复杂得多，特别是关于非线性迭代的运算，因此给映射迭代带来重重困难。到了近代，在计算机、物理学、化学、天文学等学科的推动下，非线性动力系统的研究成为了学术热点，比如关于分岔的 Feignbaum 现象、关于周期性的 Sharkovsky 序、关于运动复杂性的 Smale 马蹄等等的重大发现不断出现，促进了微分方程与迭代函数的快速发展，特别对于现在的迭代理论的发展起了奠定作用，影响重大。

我们知道，函数是一类特殊的映射，关于函数迭代的研究，成为了人们不断研究的课题[4] [5]。折线函数是最简单的非线性函数，但是函数数值迭代运算下可以交叉于不同的子区间[6] [7]，使得整个问题变得复杂。关于折线函数的迭代，Kobza J [8]研究了折线函数的二次迭代，例子表明虽然一些折线函数迭代后具有与原函数相似的形状，但大部分折线函数在迭代后不仅形状发生了变化，并且折点个数也跟着改变，这些变化依赖于迭代的次数，并随着迭代指数的不断增大而更加复杂。对于单折点折线函数，李林[6]利用折点的运动轨道变化来探索迭代下折点在迭代下的变化情况，并在若干情形下给出其 n 次迭代表达式，司晨玲[9]在李林[6]的基础上对单折点折线函数的迭代情况做了进一步研究，更精确地描述了单折点折线函数在迭代运算下的复杂程度与迭代指数的关系。孙太祥在文献[10]中研究了 N 型函数的迭代根情况，本文在前人的基础上，对当折点为两个的 N 型函数迭代性质进行了讨论分析。

2. 预备知识

我们考虑函数 $f: I=[a,b] \to I$ 且具有如下的形式

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t):=k_1 t+\beta_1, a\le t\le t_0, \\ f_2(t):=k_2 t+\beta_2, t_0<t\le t_1, \\ f_3(t):=k_3 t+\beta_3, t_1<t\le b. \end{cases} \tag{1}$$

它的两个折点为 (t_0,x_0)，(t_1,x_1)，其中

$$x_0=k_1 a_1+\beta_1, t_0=-\frac{\beta_1-\beta_2}{k_1-k_2};$$

$$x_1 = k_2 a_2 + \beta_2, t_1 = -\frac{\beta_2 - \beta_3}{k_2 - k_3};$$

以下我们要研究的是当 $k_1 > 0$，$k_2 < 0$，$k_3 < 0$ 情形下，即为 N 型折线函数，折点的个数随迭代后的变化情况，结果依赖于两个折点与对角线 $x = t$ 的位置变化。为了方便起见，本文将 N 型折线函数进行分类，第一类是 $x_0 \le t_0$；第二类是 $t_0 < x_0 \le t_1$；第三类是 $x_0 > t_1$；在这三类情形下分别进行讨论。

3. 主要结果及证明

令 f 是(1)式的折线函数，其中在 $k_1 > 0$，$k_2 < 0$，$k_3 < 0$。

定理 1 (i) 如果 $x_0 \le t_0$ 且 $f_3(b) \le t_0$ 时，那么折点的个数在迭代下不会增加，即 $V(f^n) = 2$，$\forall n \in N$，并且 f^n 的折点坐标为

$$\left(t_0, k_1^n t_0 + \beta_1\left(\frac{1-k_1^n}{1-k_1}\right)\right), \left(t_1, k_1^{n-1} k_2 t_1 + k_1^{n-1}\beta_2 + \beta_1\left(\frac{1-k_1^{n-1}}{1-k_1}\right)\right).$$

另外，若 $0 < k_1 < 1$，则对任意 $t \in I$，当 $n \to \infty$ 时，$f^n(t) \to \dfrac{\beta_1}{1-k_1}$；

(ii) 如果 $x_0 \le t_0$ 且 $t_0 < f_3(b) \le t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 3$；

(iii) 如果 $x_0 \le t_0$ 且 $f_3(b) > t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 4$。

证明：(i) 如图 1，当 $x_0 < t_0$ 且 $f_3(b) < t_0$ 时，f_1 单调递增，f_2 单调递减，f_3 单调递增，有 $a \le f(t) \le t_0$，$\forall t \in [a, b]$。因此 f 的 n 次迭代表达式为：

$$f^n(t) = \begin{cases} f_1^n(t) = k_1^n t + \beta_1\left(\dfrac{1-k_1^n}{1-k_1}\right), t \in [a, t_0]; \\ f_1^{n-1}(f_2(t)) = k_1^{n-1}k_2 t + k_1^{n-1}\beta_2 + \beta_1\left(\dfrac{1-k_1^{n-1}}{1-k_1}\right), t \in (t_0, t_1]; \\ f_1^{n-1}(f_3(t)) = k_1^{n-1}k_3 t + k_1^{n-1}\beta_3 + \beta_1\left(\dfrac{1-k_1^{n-1}}{1-k_1}\right), t \in (t_1, b]. \end{cases}$$

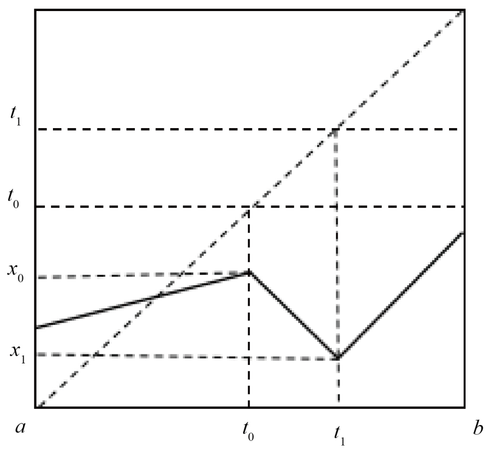

Figure 1. $x_0 < t_0$ and $f_3(b) < t_0$

图 1. $x_0 < t_0$ 且 $f_3(b) < t_0$

从上式可以看出，左导数

$$Df^n(t_0-0)=k_1^n \ne k_1^{n-1}k_2 = Df^n(t_0+0),$$
$$Df^n(t_1-0)=k_1^{n-1}k_2 \ne k_1^{n-1}k_3 = Df^n(t_1+0).$$

因此对所有的 $n\in N$，有 $V(f^n)=2$。

(ii) 如图 2，当 $x_0<t_0$ 且 $t_0<f_3(b)<t_1$ 时，f_1 单调递增，f_2 单调递减，f_3 单调递增，有 $f_3(t_1)<t_0$，$f_3(b)>t_0$，根据 f_3 的连续性，必然存在 $t_0^*\in(t_1,b)$，使得 $f_3(t_0^*)=t_0$，因此 $t_0^*=f_3^{-1}(t_0)$，此时有

$$\begin{cases} a\le f(t)\le t_0, t\in\left[a,t_1^*\right]; \\ t_0<f(t)\le t_1, t\in\left(t_1^*,b\right]. \end{cases}$$

并且

$$f^2(t)=\begin{cases} f_1^2(t)=k_1^2t+\beta_1(1+k_1), t\in[a,t_0]; \\ f_1(f_2(t))=k_1k_2t+k_1\beta_2+\beta_1, t\in(t_0,t_1]; \\ f_1(f_3(t))=k_1k_3t+k_1\beta_3+\beta_1, t\in\left(t_1,t_0^*\right]; \\ f_2(f_3(t))=k_2k_3t+k_2\beta_3+\beta_2, t\in\left(t_0^*,b\right]. \end{cases}$$

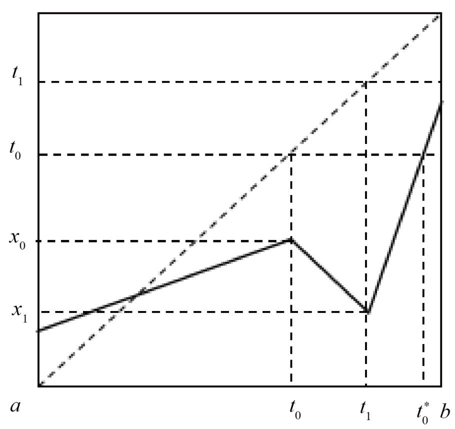

Figure 2. $x_0<t_0$ and $t_0<f_3(b)<t_1$

图 2. $x_0<t_0$ 且 $t_0<f_3(b)<t_1$

从上式可以看出

$$Df^2(t_0-0)=k_1^2\ne k_1k_2=Df^2(t_0+0);$$
$$Df^2(t_1-0)=k_1k_2\ne k_1k_3=Df^2(t_1+0);$$
$$Df^2(t_0^*-0)=k_1k_3\ne k_2k_3=Df^2(t_0^*+0).$$

这意味着 $V(f^2)=3$，进一步，根据非单调的定义，t_0,t_1,t_0^* 都是 f^2 的非单调点，由严格逐段单调连续函数 f 的非单调点也是其 n 次迭代 f^n 的非单调点，所以其非单调点的个数在迭代下是不会减少的。另一方面，对于折线函数来说，每个非单调点都是折点(反过来不成立)，因此，对所有自然数 $n\ge 2$，由 $V(f^n)\ge N(f^n)$ 可得 $V(f^n)\ge 3$。

(iii) 证明过程与(ii)类似。

定理 2 (i) 如果 $t_0 < x_0 \le t_1$，$x_1 \ge t_0$ 且 $f_1(a) \ge t_0$，$f_3(b) \le t_1$ 时，那么折点的个数在迭代下不会增加，即 $V(f^n) = 2$，$\forall n \in N$，并且 f^n 的折点坐标为

$$\left(t_0, k_2^{n-1}k_1t_0 + k_2^{n-1}\beta_1 + \beta_2\left(\frac{1-k_2^{n-1}}{1-k_2}\right)\right), \left(t_1, k_2^n t_1 + \beta_2\left(\frac{1-k_2^n}{1-k_2}\right)\right).$$

另外，若 $-1 < k_2 < 0$ 则，对任意 $t \in I$，当 $n \to \infty$ 时，$f^n(t) \to \dfrac{\beta_2}{1-k_2}$；

(ii) 如果 $t_0 < x_0 \le t_1$，$x_1 \ge t_0$；

$f_1(a) < t_0$，$f_3(b) \le t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 3$；

$f_1(a) < t_0$，$f_3(b) > t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 4$；

$f_1(a) \ge t_0$，$f_3(b) > t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 3$；

(iii) 如果 $t_0 < x_0 \le t_1$，$x_1 < t_0$；

$f_1(a) < t_0$，$f_3(b) \le t_0$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 4$；

$f_1(a) < t_0$，$t_0 < f_3(b) \le t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 5$；

$f_1(a) < t_0$，$f_3(b) > t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 6$；

$f_1(a) \ge t_0$，$f_3(b) \le t_0$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 3$；

$f_1(a) \ge t_0$，$t_0 < f_3(b) \le t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 4$；

$f_1(a) \ge t_0$，$f_3(b) > t_1$，对所有的整数 $n \ge 2$，$V(f^n) \ge 5$；

证明：(i) 如图 3，当 $t_0 < x_0 < t_1$，$x_1 > t_0$ 且 $f_1(a) > t_0$，$f_3(b) < t_1$ 时，f_1 单调递增，f_2 单调递减，f_3 单调递增，有 $t_0 \le f(t) \le t_1$，$\forall t \in [a,b]$。因此 f 的 n 次迭代表达式为：

$$f^n(t) = \begin{cases} f_2^{n-1}(f_1(t)) = k_2^{n-1}k_1t + k_2^{n-1}\beta_1 + \beta_2\left(\dfrac{1-k_2^{n-1}}{1-k_2}\right), t \in [a, t_0]; \\ f_2^n(t) = k_2^n t + \beta_2\left(\dfrac{1-k_2^n}{1-k_2}\right), t \in (t_0, t_1]; \\ f_2^{n-1}(f_3(t)) = k_2^{n-1}k_3t + k_2^{n-1}\beta_3 + \beta_2\left(\dfrac{1-k_2^{n-1}}{1-k_2}\right), t \in (t_1, b]. \end{cases}$$

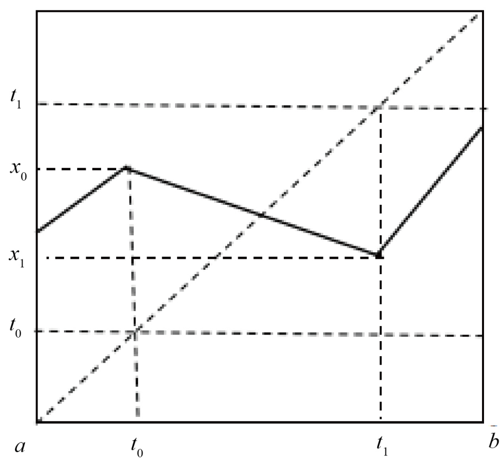

Figure 3. $t_0 < x_0 < t_1, x_1 > t_0$ and $f_1(a) > t_0, f_3(b) < t_1$

图 3. $t_0 < x_0 < t_1, x_1 > t_0$ 且 $f_1(a) > t_0, f_3(b) < t_1$

从上式可以看出，左导数

$$Df^n(t_0-0)=k_2^{n-1}k_1 \ne k_2^n = Df^n(t_0+0);$$
$$Df^n(t_1-0)=k_2^n \ne k_2^{n-1}k_3 = Df^n(t_1+0).$$

因此对所有的 $n\in N$，有 $V(f^n)=2$。

(ii) 如图 4，当 $t_0<x_0<t_1$， $x_1>t_0$， $f_1(a)>t_0$， $f_3(b)>t_1$ 时，有 $f_3(t_1)<t_1$， $f_3(b)>t_1$，根据 f_3 的连续性，必然存在 $t_1^*\in(t_1,b)$，使得 $f_3(t_1^*)=t_1$，因此 $t_1^*=f_3^{-1}(t_1)$，此时有

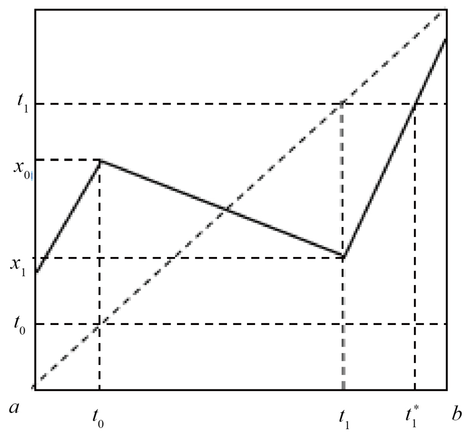

Figure 4. $t_0<x_0<t_1, x_1>t_0$ and $f_1(a)>t_0, f_3(b)>t_1$

图 4. $t_0<x_0<t_1, x_1>t_0$ 且 $f_1(a)>t_0, f_3(b)>t_1$

$$\begin{cases} t_0\le f(t)\le t_1, t\in[a,t_1^*]; \\ t_1<f(t)\le b, t\in(t_1^*,b]. \end{cases}$$

并且

$$f^2(t)=\begin{cases} f_2(f_1(t))=k_1k_2t+k_2\beta_1+\beta_2, t\in[a,t_0]; \\ f_2^2(t)=k_2^2t+\beta_2(1+k_2), t\in(t_0,t_1]; \\ f_2(f_3(t))=k_2k_3t+k_2\beta_3+\beta_2, t\in(t_1,t_1^*]; \\ f_3^2(t)=k_3^2t+\beta_3(1+k_3), t\in(t_1^*,b]. \end{cases}$$

从上式可以看出

$$Df^2(t_0-0)=k_1k_2 \ne k_2^2 = Df^2(t_0+0);$$
$$Df^2(t_1-0)=k_2^2 \ne k_2k_3 = Df^2(t_1+0);$$
$$Df^2(t_1^*-0)=k_2k_3 \ne k_3^2 = Df^2(t_1^*+0).$$

这意味着 $V(f^2)=3$，因此 $V(f^n)\ge 3$。其余两种情况可类似证明。

(iii) 如图 5，当 $t_0<x_0<t_1$， $x_1<t_0$， $f_1(a)>t_0$， $f_3(b)>t_1$ 时，有 $f_2(t_0)>t_0$， $f_2(t_1)<t_0$， $f_3(t_1)<t_0$， $f_3(b)>t_1$，根据 f_2，f_3 的连续性，必然存在 $t_0^*\in(t_0,t_1)$，$t_1^*\in(t_1,b)$，$t_2^*\in(t_1,b)$，使得 $f_2(t_0^*)=t_0$，$f_3(t_1^*)=t_0$，$f_3(t_2^*)=t_1$，此时有

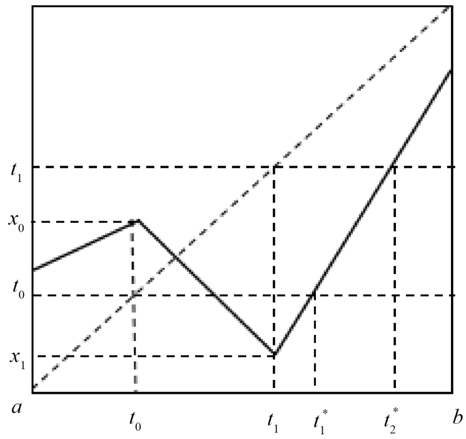

Figure 5. $t_0 < x_0 < t_1, x_1 < t_0$ and $f_1(a) > t_0, f_3(b) > t_1$

图 5. $t_0 < x_0 < t_1, x_1 < t_0$ 且 $f_1(a) > t_0, f_3(b) > t_1$

$$\begin{cases} a \le f(t) \le t_0, t \in [t_0^*, t_1^*]; \\ t_0 < f(t) < t_1, t \in [a, t_0^*) \cup (t_1^*, t_2^*]; \\ f(t) \ge t_1, t \in [t_2^*, b]. \end{cases}$$

并且

$$f^2(t) = \begin{cases} f_2(f_1(t)) = k_1k_2t + k_2\beta_1 + \beta_2, t \in [a, t_0]; \\ f_2^2(t) = k_2^2t + \beta_2(1+k_2), t \in (t_0, t_0^*]; \\ f_1(f_2(t)) = k_1k_2t + k_1\beta_2 + \beta_1, t \in (t_0^*, t_1]; \\ f_1(f_3(t)) = k_1k_3t + k_1\beta_3 + \beta_1, t \in (t_1, t_1^*]; \\ f_2(f_3(t)) = k_2k_3t + k_2\beta_3 + \beta_2, t \in (t_1, t_2^*]; \\ f_3^2(t) = k_3^2t + \beta_3(1+k_3), t \in (t_2^*, b]. \end{cases}$$

从上式可以看出

$$\begin{aligned} &Df^2(t_0 - 0) = k_1k_2 \ne k_2^2 = Df^2(t_0 + 0); \\ &Df^2(t_0^* - 0) = k_2^2 \ne k_1k_2 = Df^2(t_0^* + 0); \\ &Df^2(t_1 - 0) = k_1k_2 \ne k_1k_3 = Df^2(t_1 + 0); \\ &Df^2(t_1^* - 0) = k_1k_3 \ne k_2k_3 = Df^2(t_1^* + 0); \\ &Df^2(t_2^* - 0) = k_2k_3 \ne k_3^2 = Df^2(t_2^* + 0). \end{aligned}$$

这意味着 $V(f^2) = 5$，因此 $V(f^n) \ge 5$。其余五种情况可类似证明。

定理 3 (i) 如果 $x_0 > t_1$，$x_1 \ge t_1$ 且 $f_1(a) \ge t_1$，那么折点的个数在迭代下不会增加，即 $V(f^n) = 2$，$\forall n \in N$，并且 f^n 的折点坐标为

$$\left(t_0, k_3^{n-1}k_1t_0 + k_3^{n-1}\beta_1 + \beta_3\left(\frac{1-k_3^{n-1}}{1-k_3}\right)\right), \left(t_1, k_3^{n-1}k_2t_1 + k_3^{n-1}\beta_2 + \beta_3\left(\frac{1-k_3^{n-1}}{1-k_3}\right)\right).$$

另外，若 $0<k_3<1$ 则，对任意 $t\in I$，当 $n\to\infty$ 时，$f^n(t)\to\dfrac{\beta_3}{1-k_3}$；

$f_1(a)<t_0$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 4$；

$t_0\le f_1(a)<t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 3$；

(ii) 如果 $x_0>t_1$，$t_0\le x_1<t_1$；

$f_1(a)<t_0$，$f_3(b)\le t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 5$；

$f_1(a)<t_0$，$f_3(b)>t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 6$；

$t_0\le f_1(a)<t_1$，$f_3(b)\le t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 4$；

$t_0\le f_1(a)<t_1$，$f_3(b)>t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 5$；

$f_1(a)\ge t_1$，$f_3(b)\le t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 3$；

$f_1(a)\ge t_1$，$f_3(b)>t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 4$；

(iii) 如果 $x_0>t_1$，$x_1<t_0$；

$f_1(a)<t_0$，$f_3(b)\le t_0$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 6$；

$f_1(a)<t_0$，$t_0<f_3(b)\le t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 7$；

$f_1(a)<t_0$，$f_3(b)>t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 8$；

$t_0\le f_1(a)<t_1$，$f_3(b)\le t_0$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 5$；

$t_0\le f_1(a)<t_1$，$t_0<f_3(b)\le t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 6$；

$t_0\le f_1(a)<t_1$，$f_3(b)>t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 7$；

$f_1(a)\ge t_1$，$f_3(b)\le t_0$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 4$；

$f_1(a)\ge t_1$，$t_0<f_3(b)\le t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 5$；

$f_1(a)\ge t_1$，$f_3(b)>t_1$，对所有的整数 $n\ge 2$，$V(f^n)\ge 6$；

证明：(i) 如图 6，当 $x_0>t_1$，$x_1>t_1$ 且 $f_1(a)>t_1$ 时，f_1 单调递增，f_2 单调递减，f_3 单调递增，有 $t_1\le f(t)\le b$，$\forall t\in[a,b]$。因此 f 的 n 次迭代表达式为：

$$f^n(t)=\begin{cases} f_3^{n-1}(f_1(t))=k_3^{n-1}k_1t+k_3^{n-1}\beta_1+\beta_3\left(\dfrac{1-k_3^{n-1}}{1-k_3}\right),t\in[a,t_0];\\ f_3^{n-1}(f_2(t))=k_3^{n-1}k_2t+k_3^{n-1}\beta_2+\beta_3\left(\dfrac{1-k_3^{n-1}}{1-k_3}\right),t\in(t_0,t_1];\\ f_3^{n}(t)=k_3^{n}t+\beta_3\left(\dfrac{1-k_3^{n}}{1-k_3}\right),t\in(t_1,b]. \end{cases}$$

从上式可以看出，左导数

$$Df^n(t_0-0)=k_3^{n-1}k_1\ne k_3^{n-1}k_2=Df^n(t_0+0);$$
$$Df^n(t_1-0)=k_3^{n-1}k_2\ne k_3^{n}=Df^n(t_1+0).$$

因此对所有的 $n\in N$，有 $V(f^n)=2$。

如图 7，当 $x_0>t_1$，$x_1>t_1$，$t_0<f_1(a)<t_1$ 时，有 $f_1(a)<t_1$，$f_1(t_0)>t_1$，根据 f_1 的连续性，必然存在 $t_0^*\in(a,t_0)$，使得 $f_1(t_0^*)=t_1$，因此 $t_0^*=f_1^{-1}(t_1)$，此时有

$$\begin{cases} t_0\le f(t)\le t_1,t\in[a,t_0^*];\\ f(t)>t_1,t\in(t_0^*,b]. \end{cases}$$

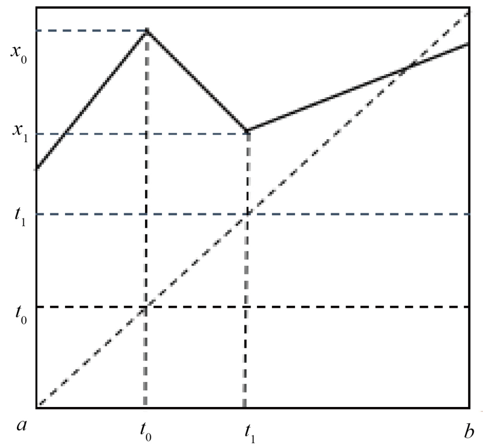

Figure 6. $x_0 > t_1, x_1 > t_1$ and $f_1(a) > t_1$

图 6. $x_0 > t_1, x_1 > t_1$ 且 $f_1(a) > t_1$

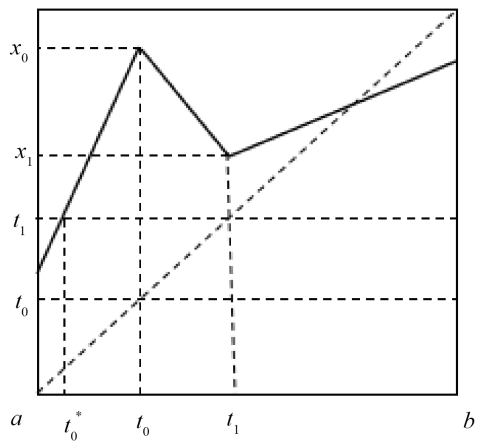

Figure 7. $x_0 > t_1, x_1 > t_1$ and $t_0 < f_1(a) < t_1$

图 7. $x_0 > t_1, x_1 > t_1$ 且 $t_0 < f_1(a) < t_1$

并且

$$f^2(t) = \begin{cases} f_2(f_1(t)) = k_1k_2t + k_2\beta_1 + \beta_2, t \in [a, t_0^*]; \\ f_3(f_1(t)) = k_1k_3t + k_3\beta_1 + \beta_3, t \in (t_0^*, t_0]; \\ f_3(f_2(t)) = k_2k_3t + k_3\beta_2 + \beta_3, t \in (t_0, t_1]; \\ f_3^2(t) = k_3^2t + \beta_3(1 + k_3), t \in (t_1, b]. \end{cases}$$

从上式可以看出

$$Df^2(t_0^* - 0) = k_1k_2 \neq k_1k_3 = Df^2(t_0^* + 0);$$
$$Df^2(t_0 - 0) = k_1k_3 \neq k_2k_3 = Df^2(t_0 + 0);$$
$$Df^2(t_1 - 0) = k_2k_3 \neq k_3^2 = Df^2(t_1 + 0).$$

这意味着 $V(f^2) = 3$，因此 $V(f^n) \geq 3$。剩余的一种情况可类似证明。

(ii) 如图 8，当 $x_0 > t_1$，$t_0 < x_1 < t_1$，$f_1(a) < t_0$，$f_3(b) < t_1$ 时，有 $f_1(a) < t_0$，$f_1(t_0) > t_1$，$f_2(t_0) > t_1$，$f_2(t_1) < t_1$，根据 f_1，f_2 的连续性，必然存在 $t_0^* \in (a, t_0)$，$t_1^* \in (a, t_0)$，$t_2^* \in (t_0, t_1)$，使得 $f_1(t_0^*) = t_0$，$f_1(t_1^*) = t_1$，$f_2(t_2^*) = t_1$，因此 $t_0^* = f_1^{-1}(t_0)$，$t_1^* = f_1^{-1}(t_1)$，$t_2^* = f_2^{-1}(t_1)$，此时有

$$\begin{cases} a \le f(t) \le t_0, t \in [a, t_0^*]; \\ t_0 < f(t) \le t_1, t \in (t_0^*, t_1^*] \cup [t_2^*, t_1) \cup [t_1, b]; \\ f(t) > t_1, t \in (t_1^*, t_2^*). \end{cases}$$

并且

$$f^2(t) = \begin{cases} f_1^2(t) = k_1^2 t + \beta_1(1 + k_1), t \in [a, t_0^*]; \\ f_2(f_1(t)) = k_1 k_2 t + k_2 \beta_1 + \beta_2, t \in (t_0^*, t_1^*]; \\ f_3(f_1(t)) = k_1 k_3 t + k_3 \beta_1 + \beta_3, t \in (t_1^*, t_0]; \\ f_3(f_2(t)) = k_2 k_3 t + k_3 \beta_2 + \beta_3, t \in (t_0, t_2^*]; \\ f_2^2(t) = k_2^2 t + \beta_2(1 + k_2), t \in (t_2^*, t_1]; \\ f_2(f_3(t)) = k_2 k_3 t + k_2 \beta_3 + \beta_2, t \in (t_1, b]. \end{cases}$$

从上式可以看出

$$Df^2(t_0^* - 0) = k_1^2 \ne k_1 k_2 = Df^2(t_0^* + 0);$$
$$Df^2(t_1^* - 0) = k_1 k_2 \ne k_1 k_3 = Df^2(t_1^* + 0);$$
$$Df^2(t_0 - 0) = k_1 k_3 \ne k_2 k_3 = Df^2(t_0 + 0);$$
$$Df^2(t_2^* - 0) = k_2 k_3 \ne k_2^2 = Df^2(t_2^* + 0);$$
$$Df^2(t_1 - 0) = k_2^2 \ne k_1 k_2 = Df^2(t_1 + 0).$$

这意味着 $V(f^2) = 5$，因此 $V(f^n) \ge 5$。其余五种情况可类似证明。

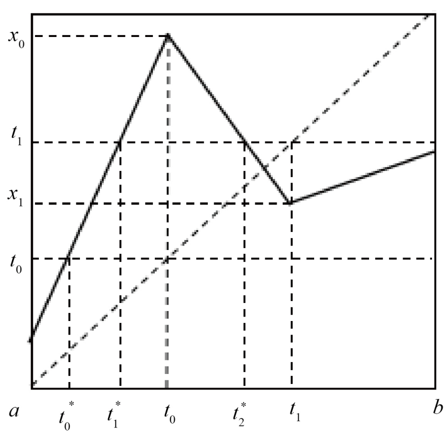

Figure 8. $x_0 > t_1, t_0 < x_1 < t_1$ and $f_1(a) < t_0, f_3(b) < t_1$

图 8. $x_0 > t_1, t_0 < x_1 < t_1$ 且 $f_1(a) < t_0, f_3(b) < t_1$

(iii) 如图 9，当 $x_0 > t_1$，$x_1 < t_0$，$f_1(a) < t_0$，$f_3(b) < t_0$ 时，有 $f_1(a) < t_0$，$f_1(t_0) > t_1$，$f_2(t_0) > t_1$，$f_2(t_1) < t_0$，

根据 f_1，f_2 的连续性，必然存在 $t_0^* \in (a,t_0)$，$t_1^* \in (a,t_0)$，$t_2^* \in (t_0,t_1)$，$t_3^* \in (t_0,t_1)$，使得 $f_1(t_0^*) = t_0$，$f_1(t_1^*) = t_1$，$f_2(t_2^*) = t_1$，$f_2(t_3^*) = t_0$，因此 $t_0^* = f_1^{-1}(t_0)$，$t_1^* = f_1^{-1}(t_1)$，$t_2^* = f_2^{-1}(t_1)$，$t_2^* = f_2^{-1}(t_0)$，此时有

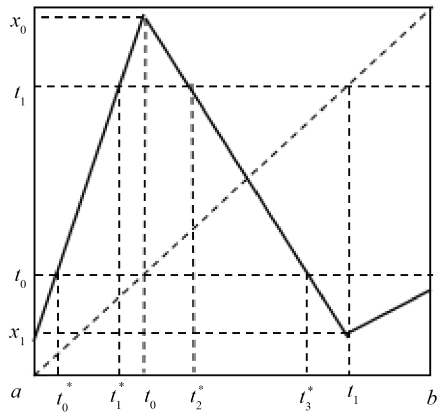

Figure 9. $x_0 > t_1, x_1 < t_0$ and $f_1(a) < t_0, f_3(b) < t_0$

图 9. $x_0 > t_1, x_1 < t_0$ 且 $f_1(a) < t_0, f_3(b) < t_0$

$$\begin{cases} a \le f(t) \le t_0, t \in [a,t_0^*] \cup (t_3^*,b]; \\ t_0 < f(t) \le t_1, t \in (t_0^*,t_1^*] \cup [t_2^*,t_3^*]; \\ f(t) > t_1, t \in (t_1^*,t_2^*). \end{cases}$$

并且

$$f^2(t) = \begin{cases} f_1^2(t) = k_1^2 t + \beta_1(1+k_1), t \in [a,t_0^*]; \\ f_2(f_1(t)) = k_1k_2t + k_2\beta_1 + \beta_2, t \in (t_0^*,t_1^*]; \\ f_3(f_1(t)) = k_1k_3t + k_3\beta_1 + \beta_3, t \in (t_1^*,t_0]; \\ f_3(f_2(t)) = k_2k_3t + k_3\beta_2 + \beta_3, t \in (t_0,t_2^*]; \\ f_2^2(t) = k_2^2 t + \beta_2(1+k_2), t \in (t_2^*,t_3^*]; \\ f_1(f_2(t)) = k_1k_2t + k_1\beta_2 + \beta_1, t \in (t_3^*,t_1]; \\ f_1(f_3(t)) = k_1k_3t + k_1\beta_3 + \beta_1, t \in (t_1,b]. \end{cases}$$

从上式可以看出

$$Df^2(t_0^* - 0) = k_1^2 \ne k_1k_2 = Df^2(t_0^* + 0);$$

$$Df^2(t_1^* - 0) = k_1k_2 \ne k_1k_3 = Df^2(t_1^* + 0);$$

$$Df^2(t_0 - 0) = k_1k_3 \ne k_2k_3 = Df^2(t_0 + 0);$$

$$Df^2(t_2^* - 0) = k_2k_3 \ne k_2^2 = Df^2(t_2^* + 0);$$

$$Df^2(t_3^* - 0) = k_2^2 \ne k_1k_2 = Df^2(t_3^* + 0);$$

$$Df^2(t_1 - 0) = k_1k_2 \ne k_1k_3 = Df^2(t_1 + 0).$$

这意味着 $V\left(f^{2}\right)=6$，因此 $V\left(f^{n}\right)\geq 6$。其余八种情况可类似证明。

4. 结论

本文主要研究了 N 型折线函数的迭代，通过折点的运动轨道变化讨论迭代下折点在迭代下的变化情况，并给出(i) 当 $x_0 \leq t_0$，$f_3\left(b\right)\leq t_0$ 时；(ii) 当 $t_0 < x_0 \leq t_1$，$x_1 \geq t_0$ 且 $f_1\left(a\right)\geq t_0$，$f_3\left(b\right)\leq t_1$ 时；(iii) 当 $x_0 > t_1$，$x_1 \geq t_1$ 且 $f_1\left(a\right)\geq t_1$ 时这三种情况下的 n 次迭代表达式，在余下的情况，给出了折点在二次迭代后的情况，能大致判断折点增长的速度。

基金项目

重庆市自然科学基金(cstc2018jcyjAX0418)。

参考文献

[1] Abel, N.H. (1981) Oeuvres Completes. Norwegian Mathematical Society, Christiana, 36-39.

[2] Schroder, E. (1987) Uber iterate funktionen. *Annals of Mathematics*, **3**, 295-322.

[3] Babbage, C. (1815) An Essay towards the Calculus of Functions. *Philosophical Transactions*, **105**, 389-423. https://doi.org/10.1098/rstl.1815.0024

[4] 张伟年. 动力系统基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 1-17.

[5] 张景中, 熊金城. 函数迭代与一维动力系统[M]. 成都: 四川教育出版社, 1992: 1-12.

[6] Li, L. (2007) Number of Vertices for Polygonal Functions under Iteration. *Journal of the Korea of Mathematical Education Series B*: *Pure Applied Mathematics*, **14**, 99-109.

[7] 李林. 折线函数和集值函数的迭代与迭代根[D]: [硕士学位论文]. 成都: 四川大学, 2007: 7-14.

[8] Kobza, J. (2000) Iterative Functional Equation x(x(t)) = f(t) with f(t) Piecewise Linear. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **115**, 331-347. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(99)00308-8

[9] 司晨玲, 张萍萍. 两类折线函数的迭代[J]. 内江师范学院学报, 2015(30): 10-13.

[10] 孙太祥, 席鸿建. 区间上 N 型函数的迭代根[J]. 数学研究, 1996(2): 40-45.