Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 419-427
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114054

量子环面代数及其上的李代数

陆狄雷，常智华

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: ludyray@126.com

收稿日期：2021 年 3 月 2 日；录用日期：2021 年 4 月 2 日；发布日期：2021 年 4 月 12 日

摘 要

量子环面代数在 A 型扩张仿射李代数的研究中起到重要作用．两个变量的量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 在 q 是一个 m 次本原单位根时，同构于 m 阶矩阵代数的一个有扭双重 loop 代数．为证明这一结果，本文具体地构造了矩阵代数的双重 loop 代数的一个有限自同构群并将量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 实现为矩阵代数的双重 loop 代数在这一有限群作用下的不动点子代数．进一步将量子环面代数的结果应用于以其为坐标环的特殊线性李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)$，我们得到 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)$ 在 q 是单位根时是基于有限维单李代数 $\mathfrak{sl}_{mn}(\mathbb{C})$ 的一个有扭双重 loop 代数．

关键词

量子环面，有扭双重 loop 代数，扩张仿射李代数

Quantum Tori and Lie Algebras over Quantum Tori

Dilei Lu, Zhihua Chang

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: ludyray@126.com

文章引用: 陆狄雷, 常智华. 量子环面代数及其上的李代数 [J]. 理论数学, 2021, 11(4): 419-427.
DOI: 10.12677/pm.2021.114054

Received: Mar. 2^{nd}, 2021; accepted: Apr. 2^{nd}, 2021; published: Apr. 12^{th}, 2021

Abstract

Quantum tori play important roles in the study of extended affine Lie algebra of type A. The quantum torus $\mathbb{C}_q$ in two variables is isomorphic to a twisted double loop algebra of the $m \times m$-matrices provided that q is a m-th primitive root of unit. In order to prove this result, we concretely construct a finite group of automorphism of the double loop algebra of matrices and realize the quantum torus $\mathbb{C}_q$ as its sub-algebra of fixed points under this action. We further apply this result to the special linear Lie algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)$ coordinated by the quantum torus $\mathbb{C}_q$, and conclude that the Lie algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)$ is also a twisted double loop Lie algebra based on the finite-dimensional simple Lie algebra $\mathfrak{sl}_{mn}(\mathbb{C})$ if q is a root of unit.

Keywords

Quantum Torus, Twisted Double Loop Algebra, Extended Affine Lie Algebra

1. 介绍

有限维复单李代数可以通过有限型根系和 Cartan 矩阵进行分类. 20 世纪 50 年代后期, V. G. Kac 和 R. V. Moody 分别推广了 Cartan 矩阵的概念, 引入了 Kac-Moody 代数的概念, 并进一步对其中的仿射型 Kac-Moody 代数给出了基于有限维李代数的 (有扭) loop 代数的实现. 因为同时具有 Chevalley-Serre 和 loop 实现, 仿射李代数的结构和表示的研究近几十年取得了丰硕的成果 (参考文献 [1]).

20 世纪 90 年代初, S. Azam, B. Allison, S. Berman, Y. Gao 和 A. Pianzola 在 [2] 中进一步将仿射型 Kac-Moody 代数推广到扩张仿射李代数. 事实上, 论文 [3] 已证明零度为 0 的扩张仿射李代数就是有限维可列单李代数, 而零度为 1 的扩张仿射李代数恰为仿射 Kac-Moody 代数. 对于零度更大的情形, 论文 [4] 证明了除 A 型外其它类型的扩张仿射李代数的无中心核同构于一个基于有限维单李代数的多重 (有扭) loop 代数. A 型的扩张仿射李代数较为特别, 论文 [5] 指出当 $n \geqslant 3$ 时, 零度为 ν 的 A_n 型扩张仿射李代数的无中心核同构于 ν 个变量的量子环面代数上的特殊线性李代

数. 量子环面代数是一个非交换的含幺结合代数.

论文 [6] 对零度为 2 的扩张仿射李代数做了更为细致的研究, 得到了它们的完整分类. 特别地, 零度为 2 的 A_n 型扩张仿射李代数的分类依赖于 2 个变量的量子环面代数的分类. 从论文 [5] 可以知道, 当参数 q 不是一个单位根时, 量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 是一个单的结合代数. 但 q 是一个单位根时, 量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 不是单的, 它的中心与两个变量的 Laurent 多项式代数 $\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 同构. 根据论文 [6] 的结果, 把量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 看成其中心为基环的代数, 通过基环的扩张可以得到 $\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 分式域上的一个有限维代数. 通过证明这个有限维代数是中心单的结合代数，从而说明了量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 事实上是 Larent 多项式环 $\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 上的全矩阵代数的一个扭形式 (某个有限自同构群作用下的不动点子代数).

本文我们具体地给出 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 上的全矩阵的代数的有限自同构群, 并证明相应的不动点子代数与 q 是单位根时的量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 同构. 即, 通过自同构的直接构造来说明 $\mathbb{C}_q$ 是矩阵代数的一个有扭双重 loop 代数 (第2节). 并进一步在第3节中说明以这样的量子环面代数为坐标环的特殊线性李代数也是有限维单李代数的有扭双重 loop 代数. 这些结果帮助我们更为简单地理解以量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 为坐标环的特殊线性李代数的有限维表示的分类的结果, 也启发我们借助于多重 loop 李代数的结论来对以量子环面代数为坐标环的李代数进行更为深入地研究.

2. 量子环面代数

量子环面代数是多项式代数的非交换推广. 我们在本节中回顾量子环面代数的定义和基本性质, 并通过构造矩阵代数上的一些有限阶自同构证明量子环面代数同构于矩阵代数的有扭双重 loop 代数.

定义 2.1. 设 $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,\nu}$ 是一个 $\nu \times \nu$ 的复方阵且满足

$$q_{ii} = 1, i = 1, \dots, \nu, \text{ 且 } \quad q_{ij} = q_{ji}^{-1}, 1 \le i, j \le \nu.$$

定义复数域上 ν 个变量的**量子环面代数** $\mathbb{C}_Q[x_1^{\pm1}, \dots, x_\nu^{\pm1}]$ 为由生成元 $x_1^{\pm1}, \dots, x_\nu^{\pm1}$ 和定义关系

$$\begin{aligned} x_i x_i^{-1} &= 1 = x_i^{-1} x_i, & i &= 1, \dots, \nu, \\ x_i x_j &= q_{ij} x_j x_i, & 1 &\le i, j \le \nu. \end{aligned}$$

决定的结合代数.

特别地, 当 $\nu = 2$ 时, $Q = \begin{pmatrix} 1 & q \\ q^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ 由一个参数 q 决定, 我们将 $\mathbb{C}_Q[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$ 简记为 $\mathbb{C}_q$. 即, $\mathbb{C}_q$ 是由 $x^{\pm1}$ 和 $y^{\pm1}$ 生成的含幺结合代数, 生成元满足定义关系

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1 = yy^{-1} = y^{-1}y, \qquad xy = qyx.$$

量子环面代数的中心和导子等性质已在文献 [5] 中进行了详细的讨论, 我们仅在这里列出本文中所需的若干性质.

命题 2.2. ([5]) 设 $Z(\mathbb{C}_q)$ 为量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 的中心.

- $\{x^iy^j, i,j\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{C}_q$ 的一组基,
- $\mathbb{C}_q=[\mathbb{C}_q,\mathbb{C}_q]\oplus Z(\mathbb{C}_q)$.
- 当 q 不是单位根时, $Z(\mathbb{C}_q)=\mathbb{C}$; 且 $\mathbb{C}_q$ 是单结合代数.
- 当 q 是 m 次本原单位根时,
$$x^my^m=y^mx^m. \tag{2.1}$$
$Z(\mathbb{C}_q)$ 同构于 $x^{\pm m}, y^{\pm m}$ 生成的 *Laurent* 多项式代数 $\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]$. □

我们这里考虑 q 是 m 次本原单位根的情形. 由于其中心是交换的 Laurent 多项式代数 $\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]$, 量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 是 $\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]$ 上的有限型的结合代数, 即 $\mathbb{C}_q$ 作为交换环 $\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]$ 的模是有限生成的. 更进一步, $\mathbb{C}_q$ 是 $\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]$ 上的 $m\times m$ 矩阵代数 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]$ 相对于环扩张 $\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]\subseteq\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ 的扭形式 (twisted form), 也称为 $\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]$ 上的 Azumaya 代数. 文献 [6] 中通过说明 $\mathbb{C}_q$ 在 $\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]$ 的分式域 K 上的扩张 $\mathbb{C}_q\otimes_{\mathbb{C}[x^{\pm m}, y^{\pm m}]}K$ 是 K 上的有限维中心可除代数证明了这一事实, 我们在这里通过矩阵代数上的自同构具体地给出这个扭形式.

为此, 我们引入矩阵

$$X=\begin{pmatrix}1&&&&\\&q&&&\\&&q^2&&\\&&&\ddots&\\&&&&q^{m-1}\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&&&&1\\1&0&&&\\&1&\ddots&&\\&&\ddots&0&\\&&&1&0\end{pmatrix}$$

容易验证, 它们满足下列性质:

- $X^m=1=Y^m$.
- $XY=qYX$.
- $\{X^iY^j|0\le i,j\le m-1\}$ 是 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ 的一组基.

矩阵 X 和 Y 可以给出矩阵代数 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ 上的两个 m 阶自同构:

$$\begin{aligned}\sigma_X:\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\longrightarrow\mathrm{M}_m(\mathbb{C}),&\qquad A\longrightarrow XAX^{-1},\\ \sigma_Y:\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\longrightarrow\mathrm{M}_m(\mathbb{C}),&\qquad A\longrightarrow YAY^{-1}.\end{aligned}$$

引理 2.3. 矩阵代数 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ 的自同构 σ_X 和 σ_Y 满足

(i) $\sigma_X\sigma_Y=\sigma_Y\sigma_X$.

(ii) $\sigma_X(X^iY^j)=q^jX^iY^j$, $i,j=0,1,\dots,m-1$.

(iii) $\sigma_Y(X^iY^j)=q^{-i}X^iY^j$, $i,j=0,1,\dots,m-1$.

引理可直接计算验证, 我们在此略去细节. □

DOI: 10.12677/pm.2021.114054

接下来我们考虑矩阵代数 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ 相应于自同构 σ_X 和 σ_Y 的双重有扭 loop 结合代数. 记 $\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 为两个变量 u 和 v 的 Laurent 多项式代数. 首先将自同构 σ_X 和 σ_Y 延拓为无扭 loop 代数 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 上的自同构:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_X : \mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}] \to \mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}], \qquad A\otimes u^i v^j \mapsto q^{-j}\sigma_X(A)\otimes u^i v^j,\\
&\tilde{\sigma}_Y : \mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}] \to \mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}], \qquad A\otimes u^i v^j \mapsto q^{i}\sigma_Y(A)\otimes u^i v^j.
\end{aligned}$$

自同构 $\tilde{\sigma}_X$ 和 $\tilde{\sigma}_Y$ 同样满足:

$$\tilde{\sigma}_X^m = \tilde{\sigma}_Y^m = 1, \qquad \tilde{\sigma}_X\tilde{\sigma}_Y = \tilde{\sigma}_Y\tilde{\sigma}_X.$$

因此, 它们定义了有限群 $\Gamma = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 在 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 上的作用. 我们将证明

定理 2.4. *设 q 是一个 m 次的本原单位根, 则两个变量的量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 同构于 loop 结合代数 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 在 Γ 作用下的不动点子代数. 即,*

$$\mathbb{C}_q \cong (\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}])^{\Gamma}. \tag{2.2}$$

Proof. 因为 $\{X^iY^j | i,j = 0,1,\dots,m-1\}$ 是 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ 的一组基, 所以

$$\{X^iY^j\otimes u^r v^s | i,j = 0,1,\dots,m-1, r,s\in\mathbb{Z}\}$$

是 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 的一组基.

由引理 2.3, 我们直接计算

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_X(X^iY^j\otimes u^r v^s) =& q^{j-s}X^iY^j\otimes u^r v^s,\\
\tilde{\sigma}_Y(X^iY^j\otimes u^r v^s) =& q^{-i+r}X^iY^j\otimes u^r v^s.
\end{aligned}$$

说明 $\sum a_{ijrs}X^iY^j\otimes u^r v^s \in (\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}])^{\Gamma}$ 当且仅当

$$a_{ijrs} = q^{j-s}a_{ijrs}, \text{ 且 } \quad a_{ijrs} = q^{-i+r}a_{ijrs}.$$

即, $a_{ijrs}\neq 0$ 仅当 $j\equiv s \pmod{m}$ 且 $i\equiv r \pmod{m}$. 注意到 $X^m = Y^m = 1$, 我们有 loop 代数 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 在 Γ 作用下的不动点子代数 $(\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}])^{\Gamma}$ 有一组基

$$\{X^iY^j\otimes u^i v^j | i,j\in\mathbb{Z}\}.$$

它们的乘积满足

$$(X^iY^j\otimes u^iv^j)(X^kY^l\otimes u^kv^l) = X^iY^jX^kY^l\otimes u^{i+k}v^{j+l} = q^{-jk}X^{i+k}Y^{j+l}\otimes u^{i+k}v^{j+l}.$$

另一方面, 由命题 2.2, 量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 有一组基 $\{x^iy^j | i,j\in\mathbb{Z}\}$, 它们也满足

$$x^iy^jx^ky^l = q^{-jk}x^{i+k}y^{j+l}, \qquad i,j,k,l\in\mathbb{Z}.$$

因此,

$$\varphi: \mathbb{C}_q \to (\mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[u^{\pm 1}, v^{\pm 1}])^{\Gamma}, \quad x^i y^j \mapsto X^i Y^j \otimes u^i v^j, i, j \in \mathbb{Z}.$$

是一个代数同构. □

注记 2.5. 上述定理说明当 q 是一个单位根时, 两个变量的量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 是矩阵代数的一个有扭双重 loop 代数. 但对于 $\nu > 2$ 个变量的量子环面代数 $\mathbb{C}_Q$, 即便在 $Q = (q_{ij})$ 中所有元素 q_{ij} 都是单位根的情形都不一定是一个有扭的多重 loop 矩阵代数. 此时把 $\mathbb{C}_Q$ 看成是以其中心作为基环上的代数是仍然有限维的, 但这个有限维代数的结构目前仍不清楚.

3. 量子环面上的特殊线性李代数

基于 S. Berman, Y. Gao 和 Y. Krylyuk 在论文 [5] 中的结果, 零度为 2 的 A_n-型扩张仿射李代数与量子环面 $\mathbb{C}_q$ 上的特殊线性李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)$ 中心同源. 这里的特殊线性李代数事实上可以对任何一个含幺结合代数 $\mathscr{A}$ 定义, 即,

$$\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A}) | \mathrm{tr}(A) \in [\mathscr{A}, \mathscr{A}]\}, \tag{3.1}$$

其中 $\mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})$ 是元素在 $\mathscr{A}$ 中的全体 n 阶方阵在通常的换位运算下形成的李代数.

在上一节中, 我们证明了参数 q 是 m 次本原单位根时, 两个变量的量子环面代数 $\mathbb{C}_q$ 同构于 m 阶全矩阵代数 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ 的双重 loop 代数在有限群 $\Gamma = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 作用下的不动点子代数. 此时,

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q) = \mathfrak{sl}_n((\mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[u^{\pm 1}, v^{\pm 1}])^{\Gamma}). \tag{3.2}$$

我们将进一步证明: $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)$ 是有限维李代数 $\mathfrak{sl}_{mn}(\mathbb{C})$ 的一个多重有扭 loop 代数.

设 $\mathscr{A}$ 是一个含幺结合代数, Γ 是 $\mathscr{A}$ 的自同构群的一个有限子群. 则 Γ 可以通过在每个元素上分别作用的方式作用在李代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})$ 上, 且这一作用可以限制到 $\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})$. 我们仍然把这样得到的李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})$ 的自同构群的有限子群记为 Γ. 考虑结合代数 $\mathscr{A}$ 在 Γ 作用下的不动点子代数 $\mathscr{A}^{\Gamma}$. 容易看出

$$\mathfrak{gl}_n(\mathscr{A}^{\Gamma}) = \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})^{\Gamma}. \tag{3.3}$$

但不动点子代数 $\mathscr{A}^{\Gamma}$ 上的特殊线性李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A}^{\Gamma})$ 通常并不同构于李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})$ 在 Γ 作用下的不动点子代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})^{\Gamma}$.

例 3.1. 在 2 阶矩阵代数 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 上定义自同构:

$$\tau: \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

记 $\Gamma = \langle \tau \rangle$ 为由 τ 生成的自同构群. 则

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

DOI: 10.12677/pm.2021.114054

容易验证:

$$\left[\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^\Gamma, \mathrm{M}_2(\mathbb{C})^\Gamma\right] = 0.$$

但

$$[\mathrm{M}_2(\mathbb{C}), \mathrm{M}_2(\mathbb{C})]^\Gamma = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^\Gamma = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{M}_2(\mathbb{C})^\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{C} \right\}.$$

但我们可以证明下面的引理:

引理 3.2. 设 $\mathscr{A}$ 是一个含幺结合代数, Γ 是 $\mathscr{A}$ 的自同构群的有限子群. 则 $\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A}^\Gamma) = \mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})^\Gamma$ 当且仅当

$$[\mathscr{A}, \mathscr{A}] \cap \mathscr{A}^\Gamma = [\mathscr{A}^\Gamma, \mathscr{A}^\Gamma]. \tag{3.4}$$

Proof. 由特殊线性李代数的定义,

$$\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A}^\Gamma) = \left\{ A \in \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A}^\Gamma) \middle| \mathrm{tr}(A) \in [\mathscr{A}^\Gamma, \mathscr{A}^\Gamma] \right\} = \left\{ A \in \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})^\Gamma \middle| \mathrm{tr}(A) \in [\mathscr{A}^\Gamma, \mathscr{A}^\Gamma] \right\}.$$

而

$$\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})^\Gamma = \mathfrak{sl}_n(A) \cap \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})^\Gamma = \left\{ A \in \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})^\Gamma \middle| \mathrm{tr}(A) \in [\mathscr{A}, \mathscr{A}] \right\}.$$

当 $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})^\Gamma = \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A}^\Gamma)$ 时, 自然有 $\mathrm{tr}(A) \in \mathscr{A}^\Gamma$. 所以 $\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})^\Gamma$ 可写为

$$\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})^\Gamma = \left\{ A \in \mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})^\Gamma \middle| \mathrm{tr}(A) \in [\mathscr{A}, \mathscr{A}] \cap \mathscr{A}^\Gamma \right\}.$$

因此, 当 $[\mathscr{A}, \mathscr{A}] \cap \mathscr{A}^\Gamma = [\mathscr{A}^\Gamma, \mathscr{A}^\Gamma]$ 时有 $\mathfrak{sl}_n(A^\Gamma) = \mathfrak{sl}_n(A)^\Gamma$, 充分性得证.

下面证明必要性: 设 $\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A}^\Gamma) = \mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})^\Gamma$. 记 $e_{11}(a)$ 为 $\mathfrak{gl}_n(\mathscr{A})$ 中 $(1,1)$ 位置为 a 其余位置为 0 的矩阵. 则 $a \in [\mathscr{A}^\Gamma, \mathscr{A}^\Gamma]$ 当且仅当 $e_{11}(a) \in \mathfrak{sl}_n(\mathscr{A}^\Gamma) = \mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})^\Gamma$, 这等价于 $a \in [\mathscr{A}, \mathscr{A}] \cap \mathscr{A}^\Gamma$. 因此, $[\mathscr{A}, \mathscr{A}] \cap \mathscr{A}^\Gamma = [\mathscr{A}^\Gamma, \mathscr{A}^\Gamma]$. □

注记 3.3. 上述引理中在 $n = 1$ 时是自然成立的. 事实上,

$$\mathfrak{sl}_1(\mathscr{A})^\Gamma = \mathfrak{sl}_1(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A}^\Gamma = [\mathscr{A}, \mathscr{A}] \cap \mathscr{A}^\Gamma, \quad \mathfrak{sl}_1(\mathscr{A}^\Gamma) = [\mathscr{A}^\Gamma, \mathscr{A}^\Gamma].$$

接下来回到量子环面 $\mathbb{C}_q$ 上特殊线性李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)$ 的讨论. 在上一节中, 我们定义了有限群 $\Gamma = \langle \tilde{\sigma}_X, \tilde{\sigma}_Y \rangle$ 在 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$ 上的作用, 进而通过逐个位置作用到 $\mathfrak{sl}_n(\mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}])$ 上. 进而有下面的定理:

定理 3.4. 设 q 是一个 m 次本原单位根, 则有李代数同构

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q) \cong (\mathfrak{sl}_n(\mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]))^\Gamma \cong \left(\mathfrak{sl}_{mn}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]\right)^\Gamma. \tag{3.5}$$

Proof. 记 $\mathscr{A} = \mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[u^{\pm1}, v^{\pm1}]$, $\Gamma = \langle \tilde{\sigma}_X, \tilde{\sigma}_Y \rangle$. 则由定理 2.4可知, $\mathbb{C}_q \cong \mathscr{A}^\Gamma$. 我们验证结合代数 $\mathscr{A}$ 满足上述引理的条件.

在定理2.4的证明过程中, 我们已经说明 $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ 有一组基 $\{X^iY^j|i,j=0,\dots,m-1\}$. 因为

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{i,j=0}^{m-1} a_{ij}X^iY^j\right)=\sum_{i=0}^{m-1} a_{i0}(1+q^i+q^{2i}+\cdots+q^{(m-1)i})=ma_{00}+\sum_{i=1}^{m-1} a_{i0}\frac{1-q^{mi}}{1-q^i}=ma_{00},$$

所以 $\sum\limits_{i,j=0}^{m-1} a_{ij}X^iY^j\in\mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})=[\mathrm{M}_m(\mathbb{C}),\mathrm{M}_m(\mathbb{C})]$ 当且仅当 $a_{00}=0$. 因此, $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$ 有一组基

$$\{X^iY^j|i,j=0,\dots,m-1,\text{且}(i,j)\neq(0,0)\}.$$

基于上述讨论, 结合代数 $\mathscr{A}=\mathrm{M}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1},v^{\pm1}]$ 有一组基 $\{X^iY^j\otimes u^kv^l|i,j=0,\dots,m-1,k,l\in\mathbb{Z}\}$. 因此, $[\mathscr{A},\mathscr{A}]=\mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1},v^{\pm1}]$ 的一组基为 $\{X^iY^j\otimes u^kv^l|i,j=0,\dots,m-1,\text{且}(i,j)\neq(0,0),k,l\in\mathbb{Z}\}$. 注意到 $\sum a_{ijkl}X^iY^j\otimes u^kv^l\in\mathscr{A}^\Gamma$ 当且仅当 a_{ijkl} 非零时有 $k\equiv i \pmod m$ 且 $l\equiv j \pmod m$. 因此, $[\mathscr{A},\mathscr{A}]\cap\mathscr{A}^\Gamma$ 的一组基为

$$\{X^iY^j\otimes u^iv^j|i,j\in\mathbb{Z},m\nmid i\ \text{或} m\nmid j\}. \tag{3.6}$$

另一方面, 由定理 2.4有 $\mathscr{A}^\Gamma\cong\mathbb{C}_q$. 由命题 2.2可得 $[\mathbb{C}_q,\mathbb{C}_q]$ 的一组基为 $\{x^iy^j|i,j\in\mathbb{Z},m\nmid i\ \text{或} m\nmid j\}$. 通过同构 $\mathscr{A}^\Gamma\cong\mathbb{C}_q$, (3.6)也是 $[\mathscr{A}^\Gamma,\mathscr{A}^\Gamma]$ 的一组基.

至此, 我们验证了结合代数 $\mathscr{A}$ 在 Γ 的作用下满足引理 3.2的条件. 因此,

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)\cong\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A}^\Gamma)=\mathfrak{sl}_n(\mathscr{A})^\Gamma\cong\left(\mathfrak{sl}_{mn}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[u^{\pm1},v^{\pm1}]\right)^\Gamma. \tag{3.7}$$

即, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}_q)$ 是 $\mathfrak{sl}_{mn}(\mathbb{C})$ 的一个有扭双重 loop 代数. □

致　谢

作者感谢汪永杰博士在论文写作过程中给予的建议。

基金项目

广东省基础与应用基础研究基金项目 2020A1515011417。

参考文献

[1] Chen, F., Liao, X., Tan, S. and Wang, Q. (2021) Vertex Algebras and Extended Affine Lie Algebras Coordinated by Rational Quantum Tori. *Journal of Algebra*, **569**, 111-142. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.11.010

[2] Allison, B., Azam, S., Berman, S., Gao, Y. and Pianzola, A. (1997) Extended Affine Lie Algebras and Their Root Systems. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **126**. https://doi.org/10.1090/memo/0603

[3] Allison, B., Berman, S., Gao, Y. and Pianzola, A. (1997) A Characterization of Affine Kac-Moody Lie Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **185**, 671-688. https://doi.org/10.1007/s002200050105

[4] Allison, B., Berman, S., Faulkner, J. and Pianzola, A. (2009) Multiloop Realization of Extended Affine Lie Algebras and Lie Tori. *Transactions of the American Mathematical Society*, **361**, 4807-4842. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-09-04828-4

[5] Berman, S., Gao, Y. and Krylyuk, Y. (1996) Quantum Tori and the Structure of Elliptic Quasi-Simple Lie Algebras. *Journal of Functional Analysis*, **135**, 339-389. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0013

[6] Allison, B., Berman, S. and Pianzola, A. (2014) Multiloop Algebras, Iterated Loop Algebras and Extended Affine Lie Algebras of Nullity 2. *Journal of the European Mathematical Society*, **16**, 327-385. https://doi.org/10.4171/JEMS/435