Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4),436-441
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114056

具脉冲的三种群害虫模型的动力学性质

杜明银

郑州工商学院，河南 郑州
Email: dmy_2005@163.com

收稿日期：2021年3月4日；录用日期：2021年4月6日；发布日期：2021年4月13日

摘 要

基于害虫控制策略，研究固定时刻种植树木和投放害虫天敌的脉冲种群系统模型，利用Floquet理论和比较原理，研究害虫灭绝周期解的存在性和全局渐进稳定性，给出森林病虫害控制给出重要理论依据。

关键词

森林害虫，脉冲投放，周期解，全局稳定性

Dynamical Properties of a Three Species Pest Model with Impulses

Mingyin Du

Zhengzhou Technology and Business University, Zhengzhou Henan
Email: dmy_2005@163.com

Received: Mar. 4th, 2021; accepted: Apr. 6th, 2021; published: Apr. 13th, 2021

Abstract

Based on the pest control strategy, the impulsive population system model of planting trees and releasing natural enemies at fixed time is studied. By using Floquet theory and comparison principle, the existence and global asymptotic stability of periodic solution of pest extinction are studied, and the important theoretical basis for forest pest control is given.

Keywords

Forest Pests, Impulsive Release, Periodic Solution, Global Stability

文章引用: 杜明银. 具脉冲的三种群害虫模型的动力学性质[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 436-441.
DOI: 10.12677/pm.2021.114056

1. 引言

林业是我国经济发展的重要组成部分，而林业发展面临着科技水平低、病害虫严重等各种问题，尤其是在森林的漫长生育发展过程中，害虫的侵袭，森林病虫害时有发生。对于森林化学防治而言，害虫产生抗药性、误杀天敌以及污染环境的问题十分突出，因此生物防治虫害显得尤为重要。生物防治的主要手段是定期投放害虫天敌，以达到控制或根除害虫的目的。很显然害虫天敌的投放不是连续的，因此模型中加入脉冲效应更加切合实际。另外，每年人工定期植树，对于树木数量的增长来讲也具有脉冲效应，因此用脉冲动力系统描述这种现象更符合生态实际，关于具脉冲的害虫管理模型，国内外学者进行了大量的研究，见文献[1] [2] [3] [4]。

本文在已有文献的基础上，以森林害虫的生物控制策略为前提，建立三种群脉冲微分系统模型，在固定时刻投放害虫天敌，定时种植树木，利用脉冲微分方程的 Floquet 理论和比较原理研究了害虫灭绝周期解的存在性和全局渐进稳定性，对已有结果进行了优化和推广。

2. 三种群动力学模型

根据树木、害虫、天敌这三个种群之间的关系，建立三种群脉冲微分系统模型。$x_1(t)$ 表示t时刻森林中害虫的总量，$x_2(t)$ 表示t时刻森林中树木的数量，$y(t)$ 表示t时刻森林中具有的害虫天敌数量。在固定时刻释放害虫天敌和新植入树木的脉冲微分模型为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \eta x_1(t) y(t) + \gamma x_1(t) x_2(t) & \\ \dot{x}_2(t) = \beta x_2(t) - \mu_2 x_1(t) x_2(t) & \\ \dot{y}(t) = d\eta x_1(t) y(t) - \mu y(t) & t \neq n\tau \\ \Delta x_1(t) = 0 & \\ \Delta x_2(t) = p_2 & \\ \Delta y(t) = p & t = n\tau, n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{1}$$

其中，α 表示害虫的内禀增长率，$\mu > 0$ 表示害虫天敌的死亡率，$\mu_2 > 0$ 树木的死亡率，β 表示树木的增植率，$\eta > 0$ 表示单位时间内害虫被天敌吃掉的概率，$\gamma > 0$ 表示害虫对树木的破坏系数，$d > 0$ 表示天敌以害虫作为食物的增长系数，p表示 $t = n\tau\left(n \in Z^+\right)$ 时刻向森林中投放的天敌数量，p_2 表示 $n\tau$ 时刻新种植的树木的数量，τ 是脉冲效应周期，$\Delta y(t) = y(t^+) - y(t)$。

模型(1)的解 $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), y(t)\right)$ 是分段连续函数，当 $t \in \left(n\tau, (n+1)\tau\right)$ 时，$x(t)$ 是连续的。令 $f = \left(f_1, f_2, f_3\right)$ 为(1)的前三个方程右端的映射，显然f的光滑性保证了解的存在唯一性。

3. 模型及其适定性

不要使用空格、制表符设置段落缩进，不要通过连续的回车符(换行符)调整段间距。

这部分首先给出模型(1)的害虫灭绝周期解，通过脉冲微分方程的比较原理和Floquet理论及得到了周期解不稳定和全局渐进稳定的条件。

定理3.1 模型(1)有一个害虫灭绝周期解 $\left(0, \tilde{x}_2(t), \tilde{y}(t)\right)$；且对于(1)的每一个解 $y(t) \to \tilde{y}(t), (t \to \infty)$；

$x_2(t)\to\tilde{x}_2(t),(t\to\infty,\beta<0)$，其中：$\tilde{x}_2(t)=\dfrac{p_2\mathrm{e}^{\beta(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{\beta\tau}},t\in(n\tau,(n+1)\tau)$，$\tilde{y}(t)=\dfrac{p\mathrm{e}^{-\mu(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-\mu\tau}},t\in(n\tau,(n+1)\tau)$，$x_2(t)=\tilde{x}_2(t)+\left(x_2(0^+)-\dfrac{p_2}{1-\mathrm{e}^{\beta\tau}}\right)\mathrm{e}^{\beta(t-n\tau)}$，$y(t)=\tilde{y}(t)+\left(y(0^+)-\dfrac{p}{1-\mathrm{e}^{-\mu\tau}}\right)\mathrm{e}^{-\mu(t-n\tau)}$。

证明：当 $x_1(t)=0$ 时，考虑(1)的子系统：

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=-\mu y(t), & t\neq n\tau\\ \Delta y(t)=p, & t=n\tau\end{cases} \tag{2}$$

容易得到(2)的一个正周期解：

$$\begin{cases}\tilde{y}(t)=\dfrac{pe^{-\mu(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-\mu\tau}}, & t\in(n\tau,(n+1)\tau)\\ y(0^+)=\dfrac{p}{1-\mathrm{e}^{-\mu\tau}}\end{cases}$$

因此，(2)的任一解可以表示为：

$$y(t)=\tilde{y}(t)+\left(y(0^+)-\frac{p}{1-\mathrm{e}^{-\mu\tau}}\right)\mathrm{e}^{-\mu(t-n\tau)}$$

显然 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=\tilde{y}(t)$。

考虑(1)的另一个子系统

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t)=\beta x_2(t), & t\neq n\tau\\ \Delta x_2(t)=p_2, & t=n\tau\end{cases} \tag{3}$$

同样的方法，可以得到(3)的正周期解和任一解的表达式：

$$\begin{cases}\tilde{x}_2(t)=\dfrac{p_2\mathrm{e}^{\beta(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{\beta\tau}}, & t\in(n\tau,(n+1)\tau)\\ x_2(0^+)=\dfrac{p_2}{1-\mathrm{e}^{\beta\tau}}\end{cases}$$

$$x_2(t)=\tilde{x}_2(t)+\left(x_2(0^+)-\frac{p_2}{1-\mathrm{e}^{\beta\tau}}\right)\mathrm{e}^{\beta(t-n\tau)}$$

若 $\beta<0$，$\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=\tilde{x}_2(t)$，从而得到(1)的一个害虫灭绝的周期解 $(0,\tilde{x}_2(t),\tilde{y}(t))$. 证毕。

定理3.2 对于系统(1)的害虫灭绝周期解 $(0,\tilde{x}_2(t),\tilde{y}(t))$：

1) 若 $\beta>0$，则 $(0,\tilde{x}_2(t),\tilde{y}(t))$ 是不稳定的；

2) 若 $\beta=0$，$p\geq\dfrac{\alpha\mu\tau}{\eta\mathrm{e}^{\mu n\tau}}$，则 $(0,\tilde{x}_2(t),\tilde{y}(t))$ 是稳定的；

3) 若 $\beta<0$，$p>\dfrac{\alpha\beta\mu\tau-\gamma p_2\mu\mathrm{e}^{-\beta n\tau}}{\eta\mathrm{e}^{\mu n\tau}}$，则 $(0,\tilde{x}_2(t),\tilde{y}(t))$ 是全局渐进稳定的。

为了证明定理方便，我们首先引入如下引理。

引理3.1 [5]对于齐次线性T-周期脉冲微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x,t\neq t_k,t\in R\\ \Delta x=B_kx,t=t_k,k\in Z\end{cases} \tag{4}$$

假设有下面的条件：

$$H_1: A(\bullet) \in PC\left(R, C^{n\times n}\right), A(t+T) = A(t) \ \ (t \in R);$$

$$H_2: B_k \in C^{n\times n}, \det\left(E + B_k\right) \neq 0, t_k < t_{k+1} \ \ (k \in Z);$$

$$H_3: \exists q \in N, 使得 B_{k+q} = B_k, t_{k+q} = t_k + T,\ (k \in Z).$$

若H_1~H_3均成立，则(4)的每一个基解矩阵都可以表示为如下形式：

$$X(t) = \Phi(t)\mathrm{e}^{Gt}, (t \in R) \tag{5}$$

其中 $G \in C^{n\times n}$ 是常值矩阵，$\Phi(\bullet) \in PC^1\left(R, C^{n\times n}\right)$ 为可逆矩阵且是T-周期的。

下面开始证明定理：

首先，作变换 $s(t) = x_1(t), u(t) = x_2(t) - \tilde{x}_2(t), v(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$，则(3.1)在 $\left(0, \tilde{x}_2(t), \tilde{y}(t)\right)$ 处的近似线性系统为：

$$\begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \eta\tilde{y}(t) + \gamma\tilde{x}_2(t) & 0 & 0 \\ -\mu_2\tilde{x}_2(t) & \beta & 0 \\ d\eta\tilde{y}(t) & 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

容易得到满足 $\Phi(0) = E$ 的基解矩阵为：

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\int_0^\tau (\alpha - \eta\tilde{y}(s) + \gamma\tilde{x}_2(s))\mathrm{d}s} & 0 & 0 \\ * & \mathrm{e}^{\beta t} & 0 \\ ** & 0 & \mathrm{e}^{-\mu t} \end{pmatrix}$$

在下面的计算中没有用到的式子我们用 *,** 表示。

模型(1)的线性脉冲条件为：

$$\begin{pmatrix} s\left((n\tau)^+\right) \\ u\left((n\tau)^+\right) \\ v\left((n\tau)^+\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(n\tau) \\ u(n\tau) \\ v(n\tau) \end{pmatrix}$$

单值矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\int_0^\tau (\alpha - \eta\tilde{y}(s) + \gamma\tilde{x}_2(s))\mathrm{d}s} & 0 & 0 \\ * & \mathrm{e}^{\beta t} & 0 \\ ** & 0 & \mathrm{e}^{-\mu t} \end{pmatrix}$$

的特征值为：

$\lambda_1 = \int_0^\tau \left(\alpha - \eta\tilde{y}(s) + \gamma\tilde{x}_2(s)\right)\mathrm{d}s$，$\lambda_2 = \mathrm{e}^{\beta t}$，$\lambda_3 = \mathrm{e}^{-\mu t} < 1$，由引理3.1：

1) 当 $\beta > 0$ 时，$\lambda_2 = \mathrm{e}^{\beta t} > 1$，则 $\left(0, \tilde{x}_2(t), \tilde{y}(t)\right)$ 是不稳定的；

2) 当 $\beta = 0$，$\lambda_1 = \mathrm{e}^{\int_0^\tau \left(\alpha - \frac{\eta p \exp\{-\mu(s - n\tau)\}}{1 - \exp\{-\mu\tau\}}\right)\mathrm{d}s}$，$\lambda_2 = \mathrm{e}^{\beta t} = 1$，当 $p \geq \dfrac{\alpha\mu\tau}{\eta\mathrm{e}^{\mu n\tau}}$ 时，$\lambda_1 \leq 1$，$\left(0, \tilde{x}_2(t), \tilde{y}(t)\right)$ 是稳定的；

3) 当 $\beta<0$，$\lambda_2=e^{\beta t}\le 1$，$\lambda_1=\exp\left\{\int_0^\tau\left(\alpha-\frac{\eta p\exp\{-\mu(s-n\tau)\}}{1-\exp\{-\mu\tau\}}+\frac{\gamma p_2\exp\{\beta(s-n\tau)\}}{1-\exp\{\beta\tau\}}\right)ds\right\}$

所以当 $p>\frac{\alpha\beta\mu\tau-\gamma p_2\mu e^{-\beta n\tau}}{\eta e^{\mu n\tau}}$ 时，$\lambda_1<1$，从而 $(0,\tilde{x}_2(t),\tilde{y}(t))$ 是全局渐进稳定的。

下面证明当 $\beta<0$ 时，$(0,\tilde{x}_2(t),\tilde{y}(t))$ 是全局吸引的。

根据已知条件选取 $\varepsilon>0$，使得

$$\sigma=\exp\left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\left(\alpha-\eta(\tilde{y}(t)-\varepsilon)+\gamma(\tilde{x}_2(t)+\varepsilon)\right)dt\right)<1$$

注意到 $\dot{y}(t)\ge-\mu y(t),\dot{x}_2(t)\le\beta x_2(t),(\beta<0)$。考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases}\dot{z}(t)=-\mu z(t), & t\ne n\tau\\ \Delta z(t)=p, & t=n\tau\end{cases}\tag{6}$$

$$\begin{cases}\dot{u}(t)=\beta u(t), & t\ne n\tau\\ \Delta z(t)=p_2, & t=n\tau\end{cases}\tag{7}$$

由文献[6]定理容易看出，当t充分大时

$$y(t)\ge z(t)>\tilde{y}(t)-\varepsilon\tag{8}$$

$$x_2(t)\le u(t)<\tilde{x}_2(t)+\varepsilon\tag{9}$$

不失一般性，我们假设 $t\ge0$ 时，(8)式和(9)式成立，由(1)得

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)\le x_1(t)\left[\alpha-\eta(\tilde{y}(t)-\varepsilon)+\gamma(\tilde{x}_2(t)+\varepsilon)\right], & t\ne n\tau\\ \Delta x_1(t)=0, & t=n\tau\end{cases}\tag{10}$$

在 $(n\tau,(n+1)\tau)$ 上对(10)积分得：

$$x_1((n+1)\tau)\le x_1(n\tau)e^{\int_n^{n+1}\left(\alpha-\eta(\tilde{y}(t)-\varepsilon)+\gamma(\tilde{x}_2(t)+\varepsilon)\right)dt}=x_1(n\tau)\sigma\tag{11}$$

所以 $x_1(n\tau)\le x_1(0^+)\sigma^n$，于是当 $n\to\infty$ 时，$x_1(n\tau)\to0$。当 $t\in(n\tau,(n+1)\tau)$ 时，$0<x_1(t)\le x_1(n\tau)e^{\alpha\tau}$ 所以，当 $n\to\infty$ 时，$x_1(t)\to0$。

令 $m_1=\frac{p\exp\{-\mu\tau\}}{1-\exp\{-\mu\tau\}}-\varepsilon>0$，$\varepsilon$ 为任意小的正数，由于当t充分大时，对任意的 $\varepsilon>0$，$y(t)>\tilde{y}(t)-\varepsilon$，进而 $y(t)\ge m_1$。不妨设当 $t\ge0$ 时，$y(t)\ge m_1$。对于 $0<\varepsilon_1<\frac{\mu m_1}{d\eta}$，存在 $\tau_0>0$ 使得当 $t\ge\tau_0$ 时，$0<x_1(t)<\varepsilon_1$。不妨设 $t>0$ 时，$0<x_1(t)<\varepsilon_1$，由(1)得 $-\mu y(t)\le\dot{y}(t)\le y(t)(-\mu+d\eta\varepsilon_1m_1)$。由引理3.2得 $z(t)\le y(t)\le\omega(t)$，且 $n\to\infty$ 时 $z(t)\to\tilde{y}(t)$，$\omega(t)\to\tilde{\omega}(t)$。其中 $z(t),\omega(t)$ 分别为(6)和下面脉冲微分方程的解：

$$\begin{cases}\dot{\omega}(t)=\omega(t)(-\mu+d\eta\varepsilon_1m_1), & t\ne n\tau\\ \Delta\omega(t)=p, & t=n\tau\end{cases}$$

$$\tilde{\omega}(t)=\frac{pe^{(-\mu+d\eta\varepsilon_1m_1)(t-n\tau)}}{1-e^{(-\mu+d\eta\varepsilon_1m_1)\tau}},\ t\in(n\tau,(n+1)\tau)$$

故对于 $\forall\varepsilon_2>0$，$\exists\tau_1>0$，当 $t>\tau_1$ 时，有 $\tilde{y}(t)-\varepsilon_2\le y(t)\le\tilde{\omega}(t)+\varepsilon_2$。

当 $\varepsilon_2\to0$，且 $t\to\infty$ 时，$\tilde{y}(t)-\varepsilon_2\le y(t)\le\tilde{y}(t)+\varepsilon_2$，$y(t)\to\tilde{y}(t)$。同样的方法可以得到，当 $n\to\infty$

时 $x_2(t) \to \tilde{x}_2(t)$. 证毕。

由上述研究结果可以看出，当害虫天敌的脉冲释放量满足一定条件时，害虫天敌将在森林中持续生存，森林数量维持在一个预期水平。这种生物防治害虫的方法符合实际，也为控制森林虫害提供了理论依据。

基金项目

河南省教育厅重点科研项目(18B110020)。

参考文献

[1] Lakshmikantham, V., Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore, 133-135. https://doi.org/10.1142/0906

[2] Tang, S.Y. and Cheke, R.A. (2008) Models for Integrated Pest Control and Their Biological Implications. *Mathematical Biosciences*, **215**, 115-125. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2008.06.008

[3] 张玉娟, 陈兰荪, 孙丽华. 一类具有脉冲效应的捕食者-食饵系统分析[J]. 大连理工大学学报, 2004, 44(5): 769-774.

[4] 徐为坚, 陈兰荪. 基于喷洒杀虫剂及释放病虫的脉冲控制害虫模型[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(17): 89-94.

[5] Drumi, B. and Pavel, S. (1993) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Scientific and Technical, United States, 26-31.

[6] Jiao, J.J. and Chen, L.S. (2007) A Pest Management SI Model with Impulsive Control Concerned. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **22**, 385-394.