Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 527-538
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114066

Hans汉斯

具有临界增长的分数阶带有磁场的Schrödinger方程解的多重性

姚安妮

上海理工大学理学院，上海
Email: 1958407243@qq.com

收稿日期：2021年3月10日；录用日期：2021年4月12日；发布日期：2021年4月19日

摘　要

本文研究了下列具有临界增长的含磁场的分数阶Schrödinger方程解的多重性

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s_{A/\varepsilon}u+V(x)u=f\left(|u|^2\right)u+|u|^{2^*_s-2},\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

其中 $\varepsilon>0$ 是参数，$s\in(0,1)$，$N\ge 3$，$(-\Delta)^s_A$ 是分数阶的磁拉普拉斯算子，$V\in C\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ 和 $A\in C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right)$, $\alpha\in(0,1]$ 是磁位势。在V的局部条件下以及 ε 充分小时，本文利用变分方法、截断技巧、Nehari流形方法和Ljusternik-Schnirelmann理论得到了上述方程解的多重性。

关键词

分数阶磁拉普拉斯，临界，Ljusternik-Schnirelmann理论，多重性

Multiplicity for Fractional Schrödinger Equation with Magnetic Fields and Critical Growth

Anni Yao

College of Sciences, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 1958407243@qq.com

Received: Mar. 10th, 2021; accepted: Apr. 12th, 2021; published: Apr. 19th, 2021

文章引用：姚安妮. 具有临界增长的分数阶带有磁场的 Schrödinger 方程解的多重性[J]. 理论数学，2021，11(4): 527-538. DOI: 10.12677/pm.2021.114066

Abstract

In this paper, we investigate the multiplicity for fractional Schrödinger equation with magnetic fields and critical growth

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s_{A/\varepsilon}u+V(x)u=f\left(|u|^2\right)u+|u|^{2_s^*-2},\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

where $\varepsilon>0$ is a parameter, $s\in(0,1)$, $N\geq 3$, $(-\Delta)^s_A$ is the fractional magnetic Laplacian operators, $V\in C\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ and $A\in C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right),\alpha\in(0,1]$ is magnetic potential. Under a local condition on the potential V and ε is sufficiently small, we obtain some multiplicity results by variational methods, truncated techniques, Nehari manifold method and the Ljusternik-Schnirelmann theory.

Keywords

Fractional Magnetic Laplacian, Critical, Ljusternik-Schnirelmann Theory, Multiplicity

1. 绪论现状

1.1. 研究背景及现状

Schrödinger 方程是量子力学的基本方程，是 1926 年奥地利理论物理学家薛定谔提出的，用来描述量子力学系统的波函数或者态函数的偏微分方程。它揭示了微观物理世界物质运动的基本规律，在原子、分子、固体物理、核物理、化学等领域中被广泛应用，文献[1] [2]大量说明。近年来，随着科学技术和现代数学基础理论的不断发展，分数阶磁拉普拉斯算子在各领域中频繁出现，已经引起了许多学者的关注。分数阶 Schrödinger 方程是分数阶量子力学中的重要方程之一，被应用在很多领域，比如薄障碍问题、控制系统、晶体错位等，已经成为了新的研究趋势之一。

d'Avenia 和 Squassina [3]研究了下列方程基态解的存在性

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s_{A/\varepsilon}u+V(x)u=f\left(|u|^2\right)u,\quad x\in\mathbb{R}^N,\tag{1.1}$$

此时 $\varepsilon=1$，V 是一个常数。Zhang，Squassina 和 Zhang [4]证明了山路解的存在性。当电势 $V(x)$ 满足 Rabinowitz [5]提出的下列条件时

$$\liminf_{|x|\to\infty}V(x)>\inf_{x\in\mathbb{R}^N}V(x),\tag{1.2}$$

Ambrosio [6]得到了问题(1.1)在连续非线性项 f 具有临界增长和超临界增长的假设下非平凡弱解的存在性和集中性。2011 年，Alves 和 Figueiredo [7]等数学工作者研究了下列一个带磁场的非线性 Schrödinger 方程，并将其解的数目与其势能达到最小值的集合的拓扑结构联系起来

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\frac{h}{i}\nabla-A(z)\right)^2\psi+U(z)\psi-f\left(|\psi|^2\right)\psi,\quad z\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $t\in\mathbb{R}$，$N\ge 2$，$\psi(x)\in\mathbb{C}$，h 是普朗克常数，$U(z)$ 是实电势，$A:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 是磁位势，非线性项 $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是超线性函数。Schrödinger 算子被定义为

$$\left(\frac{h}{i}\nabla-A(z)\right)^2\psi:=-h^2\Delta\psi-\frac{2h}{i}A\cdot\nabla\psi+|A|^2\psi\mathrm{div}A.$$

2016 年，Figueiredo 和 Siciliano [8]利用 Neari 流形方法、Ljusternik-Schnirelmann 理论和 Morse 迭代证明了下列分数阶 Schrödinger 方程在 $\mathbb{R}^N$ 上，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，正解的多重性

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u+V(z)u\\&=f(u),\quad u(z)>0,\end{aligned}$$

其中 $N>2s$，$0<s<1$。$(-\Delta)^s$ 是分数阶拉普拉斯，$f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$。2017 年，Ambrosio [9]进一步研究了上述方程在超临界情况下正解的多重性。同一年，Ambrosio 和 d'Avenia [10]利用变分方法、罚函数方法、Ljusternik-Schnirelmann 理论，研究了下列分数阶带磁次临界增长 Schrödinger 方程

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s_{A/\varepsilon}u+V(x)u=f\left(|u|^2\right)u,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $\varepsilon>0$ 是一个参数，$s\in(0,1)$，$N\ge 3$，$A\in C\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right)$ 是连续势，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一阶连续函数。分数阶拉普拉斯算子定义为

$$(-\Delta)^s_A u(x)=c_{N,s}\lim_{r\to 0}\int_{B_r^c(x)}\frac{u(x)-\mathrm{e}^{i(x-y)\cdot A\left(\frac{x+y}{2}\right)}u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y,\ c_{N,s}:=\frac{4^s\Gamma\left(\frac{N+2s}{2}\right)}{\pi^{N/2}|\Gamma(-s)|}.$$

2018 年，Ambrosio [11]进一步利用变分方法和 Ljusternik-Schnirelmann 理论，研究了下列带有泊松项的临界增长的磁分数阶 Schrödinger 方程解的存在性和集中性

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s_{A/\varepsilon}u+V(x)u+\varepsilon^{-2t}\left(|x|^{2t-3}*|u|^2\right)u=f\left(|u|^2\right)u+|u|^{2_s^*-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^3,$$

其中 $\varepsilon>0$ 是一个参数，$s\in\left(\frac{3}{4},1\right)$，$t\in(0,1)$，$2_s^*=\dfrac{6}{3-2s}$ 是临界指数，$V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是正连续势，$A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 光滑磁位势且 $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$。2020 年，Ji 和 Rădulescu [12]结合变分方法、罚函数方法和 Ljusternik-Schnirelmann 理论，证明了下列非线性磁 Schrödinger 方程解的多重性

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\varepsilon}{i}\nabla-A(x)\right)^2u+V(x)u=f\left(|u|^2\right),\quad x\in\mathbb{R}^N(N\ge 2),\\ u\in H^1\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right),\end{cases}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是正参数，$V:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 是连续函数，磁位势 $A:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 是 Hölder 连续且 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$。

1.2. 研究内容以及预备知识

本文受[6] [11]影响，主要研究了下列方程在 $\mathbb{R}^N$ 上解的多重性

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s_{A/\varepsilon}u+V(x)u=f\left(|u|^2\right)u+|u|^{2_s^*-2},\quad x\in\mathbb{R}^N.\tag{1.3}$$

其中令非线性项 $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$，当 $t\le 0$ 时，$f(t)=0$ 且满足下列性质：

(h_1) $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=0$；

(h_2) 存在常数 $C_0>0$ 和 $q,p\in\left(2,2_s^*\right)$，使得对任意的 $t\ge 0$ 都有；

$$f(t)\ge C_0 t^{\frac{q-2}{2}},\ \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^{\frac{p-2}{2}}}=0;$$

其中 $2_s^*=\dfrac{2N}{N-2s}$ 是 Sobolev 临界指数；

(h_3) 存在 $\theta\in(2,p)$，使得对任意的 $t>0$ 都有

$$0<\frac{\theta}{2}F(t)\le tf(t),$$

其中 $F(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是 h 的原函数；

(h_4) $f(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上是单调递增的。

而且在本论文中，我们假设位势 V 满足下列条件：

(V_1) $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}V(x)=V_0>0$；

(V_2) 存在一个有界开集 $\Lambda\subset\mathbb{R}^N$ 使得

$$0<V_0=\inf_{x\in\Lambda}V(x)<\min_{x\in\partial\Lambda}V(x).$$

观察到

$$M:=\left\{x\in\Lambda:V(x)=V_0\right\}\ne\varnothing.$$

本文的主要定理如下：

定理 1.1 假设 V 满足(V_1)，(V_2)且 f 满足(h_1)~(h_4)，则对任意 $\sigma>0$，使得

$$M_\sigma:=\left\{x\in\mathbb{R}^N:\operatorname{dist}(x,M)<\sigma\right\}\subset\Lambda,$$

存在 $\varepsilon_\sigma>0$，使得对任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_\sigma)$，问题(1.3)有至少 $cat_{M_\sigma}(M)$ 个非平凡解

下面给出本文将要用到的一些基础知识。

当 $A=0,0<s<1$ 时，定义分数阶 Sobolev 空间如下：

$$H^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)=\left\{u\in L^2\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right):\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\right\}.$$

定义 Gagliardo 半范数如下：

$$[u]_s^2=\int\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定义空间 $H^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ 的范数为

$$\|u\|_{H^s}^2=\|u\|_{L^2}^2+[u]_s^2.$$

当 $A\ne 0,0<s<1$ 时，定义复空间 $L^2\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$ 的内积为

$$\langle u,v\rangle_{L^2}=\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}u\bar{v}\mathrm{d}x\right)$$

定义 Gagliardo 半范数如下：

$$[u]_{s,A}^2=\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{\left|u(x)-u(y)\mathrm{e}^{iA\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot(x-y)}\right|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定义 $\mathcal{D}_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$ 空间如下

$$\mathcal{D}_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)=\left\{u\in L^{2_s^*}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)\ [u]_{s,A}<\infty\right\},$$

定义分数阶磁 Sobolev 空间如下：

$$H_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)=\left\{u\in L^2\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right):[u]_{s,A}<\infty\right\}.$$

显然 $H_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$ 是 Hibert 空间，赋予下列的实标量内积

$$\langle u,v\rangle_{s,A}=\langle u,v\rangle_{L^2}+\Re\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{\left(u(x)-u(y)\mathrm{e}^{iA\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot(x-y)}\right)\overline{\left(v(x)-v(y)\mathrm{e}^{iA\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot(x-y)}\right)}}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定义空间 $H_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$ 的范数为

$$\|u\|_{H_A^s}^2=\|u\|_{L^2}^2+[u]_s^2.$$

引理 1.2.1 (嵌入定理) [3]对任意 $r\in\left[2,2_s^*\right]$，空间 $H_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$ 可以连续嵌入到空间 $L^r\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$；对任意 $r\in\left[1,2_s^*\right)$ 和紧集 $O\subset\mathbb{R}^N$，空间 $H_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$ 可以紧嵌入到空间 $L^r(O,\mathbb{C})$。

引理 1.2.2 (反磁不等式) [3]对任意 $u\in H_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$，有 $u\in H_A^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}\right)$ 且有下列不等式成立

$$\left[|u|\right]_s\le[u]_{s,A}.$$

引理 1.2.3 (Ljusternik-Schnirelmann theory) [13]令 $\mathcal{M}$ 是一个光滑的 Banach-Finsler 流形。假设泛函 $J\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ 且下有界，满足(PS)$_c$ 条件，则 J 有至少 $cat_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ 个临界点。

定义 1.2.1 [13]设 X 是一个拓扑空间， $A\subset X$ 是一个闭子集。则称

$$\operatorname{cat}_X(A):=\inf\left\{k\in N\cup\{+\infty\}\,|\,\exists\,k\text{个可收缩闭集}F_1,\cdots,F_k,\text{使得}A\subset\bigcup\nolimits_{i=1}^k F_i\right\}$$

为 A 在 X 中的 Ljusternik-Schnirelmann 畴数。

定义 1.3.2 [13]称一个集合 F 在 M 中是可收缩的，如果 $\exists\eta:[0,1]\times M\to M$ 使得 $\eta(0,\cdot)=id_M$ 和 $\eta(1,F)=$ 一个点集。

注记 1.2.1 因为 $s\in(0,1)$ 是固定的，为了简便，我们将 $[\cdot]_s$ 和 $[\cdot]_{s,A}$ 分别记为 $[\cdot]$ 和 $[\cdot]_A$。

2. 临界问题解的多重性

2.1. 辅助问题解的多重性

首先通过 $u(x)\mapsto u(\varepsilon x)$ 的变量替换，我们可以看到方程(1.3)与下列问题等价

$$(-\Delta)_{A_\varepsilon}^s u+V_\varepsilon(x)u=f\left(|u|^2\right)u+|u|^{2_s^*-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N,\tag{2.1}$$

其中 $A_\varepsilon(x):=A(\varepsilon x)$， $V_\varepsilon(x):=V(\varepsilon x)$。然后利用截断技巧处理问题。

固定常数 $k>1$ 和 $a>0$ 使得 $f(a)+a^{\frac{2_s^*-2}{2}}=\frac{V_0}{k}$，我们引入方程

$$\tilde{f}(t):=\begin{cases} f(t)+\left(t^{+}\right)^{\frac{2_s^*-2}{2}}, & t\le a; \\ \dfrac{V_0}{k}, & t>a, \end{cases}$$

且

$$g(x,t)=\chi_\Lambda(x)\left(f(t)+\left(t^{+}\right)^{\frac{2_s^*-2}{2}}\right)+\left(1-\chi_\Lambda(x)\right)\tilde{f}(t).$$

其中 χ_Λ 是 Λ 上的特征函数，记 $G(t)=\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau$ 。

显然，我们根据假设(h_1)~(h_4)，经过标准计算容易得到 $g(x,t)$ 满足下列条件：

(k_1) 对任意 $x\in\mathbb{R}^N$ ，都有 $\lim\limits_{t\to 0}g(x,t)=0$ ；

(k_2) 对任意 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 $t>0$ ，有 $g(x,t)\le f(t)+t^{\frac{2_s^*-2}{2}}$ ；

(k_3) (i) 对任意 $x\in\Lambda$ 和 $t>0$ ，有 $0\le G(x,t)\le g(x,t)t\le\dfrac{V(x)}{k}t$ ；

(ii) 对任意 $x\in\mathbb{R}^N\setminus\Lambda$ 和 $t>0$ ，有 $0\le G(x,t)\le g(x,t)t\le\dfrac{V(x)}{k}t$ ；

(k_4) (i) 对任意 $x\in\Lambda$ ，有 $t\mapsto g(x,t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的；

(ii) 对任意 $x\in\mathbb{R}^N\setminus\Lambda$ ，有 $t\mapsto g(x,t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的。

然后考虑下列辅助问题

$$(-\Delta)_{A_\varepsilon}^s u+V_\varepsilon(x)u=g_\varepsilon\left(x,|u|^2\right)u,\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{2.2}$$

其中 $g_\varepsilon(x,t):=g(\varepsilon x,t)$ 。注意到，如果 u 是方程(2.2)的解使得对任意 $x\in\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_\varepsilon$ 有

$$|u(x)|^2\le a, \tag{2.3}$$

其中 $\Lambda_\varepsilon:=\left\{x\in\mathbb{R}^N:\varepsilon x\in\Lambda\right\}$ ，则 u 也是原始问题的解即方程(2.1)。

显然可以找到方程(2.2)的弱解对应的是下列 Euler-Lagrange 泛函的临界点

$$J_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}\|u\|_\varepsilon^2-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}G_\varepsilon\left(x,|u|^2\right)\mathrm{d}x,$$

其中泛函 $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ 是有定义的，且 u 属于空间

$$H_\varepsilon^s=\left\{u\in\mathcal{D}_A^s\left(\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\mathbb{C}\right):\int_{\mathbb{R}^N}V_\varepsilon(x)|u|^2\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

带有实数内积为

$$\langle u,v\rangle_{H_\varepsilon^s}=\Re\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{\left(u(x)-u(y)\mathrm{e}^{iA\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot(x-y)}\right)\overline{\left(v(x)-v(y)\mathrm{e}^{iA_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot(x-y)}\right)}}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^N}V_\varepsilon(x)u\bar{v}\mathrm{d}x\right)$$

另一方面，考虑方程(2.2)的自治问题如下

$$V_0u=f\left(u^2\right)u+|u|^{2_s^*-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{2.4}$$

定义泛函 $I_0 : H^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$，则对应能量泛函为

$$I_0(u)=\frac{1}{2}\|u\|_0^2-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}H\left(u^2\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x.$$

定义泛函 J_ε 的 Nehari 流形如下

$$\mathcal{N}_\varepsilon:=\left\{u\in H_\varepsilon^s\setminus\{0\}:\left\langle J_\varepsilon'(u),u\right\rangle=0\right\},$$

考虑 g 的增长性条件，我们可以得到存在与 u 无关的 r 使得对任意 $u\in\mathcal{N}_\varepsilon$，有

$$\|u\|_\varepsilon>r, \tag{2.5}$$

实际上，固定 $u\in\mathcal{N}_\varepsilon$，我们得到

$$\begin{aligned}0&=\|u\|_\varepsilon^2-\int_{\mathbb{R}^N}g_\varepsilon\left(x,|u|^2\right)|u|^2\,\mathrm{d}x\\&\geq\|u\|_\varepsilon^2-\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^N}g_\varepsilon(x)|u|^2\,\mathrm{d}x-C\|u\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R})}^{2_s^*}\\&\geq\frac{k-1}{k}\|u\|_\varepsilon^2-C\|u\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R})}^{2_s^*}.\end{aligned}$$

引理 2.1.1 [6]泛函 J_ε 满足下列性质：

(i) $J_\varepsilon(0)=0$；

(ii) 存在 $\beta,r>0$，使得对任意 $u\in H_\varepsilon^s$ 且 $\|u\|_\varepsilon=r$，都有 $J_\varepsilon(u)\geq\beta$；

(iii) 存在 $e\in H_\varepsilon^s$ 且 $\|e\|_\varepsilon>r$，使得 $J_\varepsilon(e)<0$。

由引理 2.1.1，定义山路水平集为

$$c_\varepsilon=\inf_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon}\max_{t\in[0,1]}J_\varepsilon(\gamma(t)),$$

其中

$$\Gamma_\varepsilon=\left\{\gamma\in C\left([0,1],H_\varepsilon^s\right):\gamma(0)=0\text{ and }J_\varepsilon(\gamma(1))<0\right\}.$$

由参考文献[14]易得

$$c_\varepsilon=\inf_{u\in H_\varepsilon^s\setminus\{0\}}\sup_{t\geq0}J_\varepsilon(tu)=\inf_{u\in\mathcal{N}_\varepsilon}J_\varepsilon(u),$$

引理 2.1.2 [6]令 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $c<\frac{s}{N}S_*^{\frac{N}{2s}}$，则泛函 J_ε 在空间 H_ε^s 上满足(PS)c条件。

根据多重性的证明方法，为了获得多个临界点，我们需要将泛函 J_ε 约束在 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 上作，那接下来的紧性证明很重要。$\lambda_n\to0$。

命题 2.1.1 令 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $c<\frac{s}{N}S_*^{\frac{N}{2s}}$，则泛函 J_ε 约束在 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 上也满足(PS)c条件。

证明： 令 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\varepsilon$ 使得，当 $n\to\infty$，有 $J_\varepsilon(u_n)\to c$ 且 $\left\|J_\varepsilon'(u_n)|_{\mathcal{N}_\varepsilon}\right\|_*\to0$。则存在 $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{R}$，使得

$$J_\varepsilon'(u_n)=\lambda_nT_\varepsilon'(u_n)+o_n(1), \tag{2.6}$$

其中定义 $T_\varepsilon : H_\varepsilon^s\to\mathbb{R}$ 为

$$T_\varepsilon(u)=\|u\|_\varepsilon^2-\int_{\mathbb{R}^N}g_\varepsilon\left(x,|u|^2\right)|u|^2\,\mathrm{d}x.$$

利用 $\left\langle J_\varepsilon'(u_n),u_n\right\rangle=0$ 和 g 的定义可得

$$\begin{aligned}\left\langle T_\varepsilon'(u_n),u_n\right\rangle &= 2\|u_n\|_\varepsilon^2-2\int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon'\left(x,|u_n|^2\right)|u_n|^4\,\mathrm{d}x-2\int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon\left(x,|u_n|^2\right)|u_n|^2\,\mathrm{d}x\\&=-2\int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon'\left(x,|u_n|^2\right)|u_n|^4\,\mathrm{d}x\\&=-2\int_{\Lambda_\varepsilon\cup\{|u_n|^2\le a\}} g_\varepsilon'\left(x,|u_n|^2\right)|u_n|^4\,\mathrm{d}x-2\int_{\{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_\varepsilon\}\cap\{|u_n|^2>a\}} g_\varepsilon'\left(x,|u_n|^2\right)|u_n|^4\,\mathrm{d}x\\&=-2\int_{\Lambda_\varepsilon\cup\{|u_n|^2\le a\}} g_\varepsilon'\left(x,|u_n|^2\right)|u_n|^4\,\mathrm{d}x\\&=-2\int_{\Lambda_\varepsilon\cup\{|u_n|^2\le a\}}\left[f'\left(|u_n|^2\right)|u_n|^4+\frac{2_s^*-2}{2}\left(|u_n|^2\right)^{\frac{2_s^*-2}{2}-1}2|u_n|^4\right]\mathrm{d}x\\&=-2\int_{\Lambda_\varepsilon\cup\{|u_n|^2\le a\}}\left[f'\left(|u_n|^2\right)|u_n|^4+\left(2_s^*-2\right)\left(|u_n|^2\right)^{\frac{2_s^*-2}{2}-1}2|u_n|^4\right]\mathrm{d}x\\&\le 0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中上述等式的证明还用到了(h4)，$2_s^*=\dfrac{2N}{N-2s}>2$ 以及

$$g_\varepsilon'\left(x,|u_n|^2\right)|u_n|^4=0,\ \forall|u_n|^2>a.$$

根据式子(2.7)和 $\{u_n\}$ 在 H_ε^s 上的有界性可知，$\left\langle T_\varepsilon'(u_n),u_n\right\rangle\to l\le 0$。如果 $l=0$，则在 $L^{2_s^*}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ 上，有 $|u_n|\to 0$。利用 $\left\langle J_\varepsilon'(u_n),u_n\right\rangle=0$ 可得

$$0\le\left(1-\frac{1}{k}\right)\|u_n\|_\varepsilon^2\le o_n(1),$$

这可以推断出 $\|u_n\|_\varepsilon^2\to 0$，与式子(2.5)矛盾，因此 $l<0$。由式子(2.6)可得 $\lambda_n\to 0$，则 $\{u_n\}$ 是无约束泛函的一个(PS)c 序列。最后利用引理 2.1.2，此命题得证。

推论 2.1.1 泛函 J_ε 在 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 上的临界点就是 J_ε 在 H_ε^s 上的临界点。

接下来要证明集合 M 的拓扑结构和辅助问题(2.2)正解的个数之间的关系，我们先要介绍两类映射 Φ_ε 和 β_ε。在此之前，先证明一个紧性结果，它对于定义映射和证明辅助问题(2.2)的解是原问题(2.1)的解是非常重要的。

命题 2.1.2 令 $\varepsilon_n\to 0$ 和 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_{\varepsilon_n}$ 使得 $J_{\varepsilon_n}(u_n)\to c_0$。则存在 $(\tilde{y}_n)\subset\mathbb{R}^N$，使得 $v_n(x)=|u_n(x+\tilde{y}_n)|$ 在 $H^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ 中有一个强收敛子列。此外，在子列意义下，当 $n\to\infty$ 时，有 $y_n:=\varepsilon_n\tilde{y}_n\to y_0\in M$。

证明： 类似参考文献[6]中的引理 3.6 的证明，我们可以得到此命题。

考虑 $\sigma>0$ 使得 $M_\sigma\subset\Lambda$，选择 $\eta\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^+,[0,1]\right)$ 使得

$$\eta(t)=\begin{cases}1,\ 0\le t\le\dfrac{\sigma}{2};\\0,\ t\ge\sigma.\end{cases}$$

对任意 $y\in M=\{x\in\Lambda:V(x)=V_0\}$，定义

$$\Psi_{\varepsilon,y}(x):=\eta(|\varepsilon x-y|)w\left(\frac{\varepsilon x-y}{\varepsilon}\right)\mathrm{e}^{\left(i\tau_y\left(\frac{\varepsilon x-y}{\varepsilon}\right)\right)},$$

这里 $\tau_y(x):=\sum_j^N A_j(y)x_j$ 且 $w\in H^s\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ 是自治问题(2.4)的一个正基态解。

令 $t_\varepsilon>0$ 是唯一正数使得

$$\max_{t\geq 0} J_\varepsilon\left(t\Psi_{\varepsilon,y}\right)=J_\varepsilon\left(t_\varepsilon\Psi_{\varepsilon,y}\right),$$

则易得 $t_\varepsilon\Psi_{\varepsilon,y}\in\mathcal{N}_\varepsilon$。现在我们定义映射 $\Phi_\varepsilon: M\to\mathcal{N}_\varepsilon$ 为

$$\Phi_\varepsilon(y):=t_\varepsilon\Psi_{\varepsilon,y},$$

通过构造得，对任意 $y\in M$，$\Phi_\varepsilon(y)$ 有一个紧支集且它是连续的。

注记 2.1.1 为了运算简便，我们将 $\Phi_{\varepsilon_n}(y_n),\Psi_{\varepsilon_n,y_n}$ 和 t_{ε_n} 分别记作 Φ_n,Ψ_n 和 t_n。

引理 2.1.3 泛函 J_ε 在 $y\in M$ 时一致满足下列极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon\left(\Phi_\varepsilon(y)\right)=c_0.$$

证明：反证法。假设不成立，则存在 $\sigma_0>0$，$\{y_n\}\subset M$，取 $\varepsilon_n\to 0$，有

$$\left|J_{\varepsilon_n}(\Phi_n)-c_0\right|\geq\sigma_0. \tag{2.8}$$

利用参考文献[10]和 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\|\Psi_n\|_{\varepsilon_n}^2\to\|w\|_0^2\in(0,\infty), \tag{2.9}$$

$$\|\Psi_n\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)}\to\|w\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.10}$$

另一方面，考虑 $\left\langle J'_{\varepsilon_n}(\Phi_n),\Phi_n\right\rangle=0$，作变量替换 $z=\dfrac{\varepsilon_n x-y_n}{\varepsilon_n}$，则

$$t_n^2\|\Psi_n\|_{\varepsilon_n}^2=\int_{\mathbb{R}^N} g\left(\varepsilon_n z+y_n,\left|t_n\eta(|\varepsilon_n z|)w(z)\right|^2\right)\left|t_n\eta(|\varepsilon_n z|)w(z)\right|^2\mathrm{d}z. \tag{2.11}$$

如果 $z\in B_{\delta/\varepsilon_n}(0)$，那么 $\varepsilon_n z+y_n\in B_\sigma(y_n)\subset M_\sigma\subset\Lambda$。再利用函数 g 和 η 的定义可得

$$t_n^2\|\Psi_n\|_{\varepsilon_n}^2=\int_{\mathbb{R}^N} h\left(\left|t_n\eta(|\varepsilon_n z|)w(z)\right|^2\right)\left|t_n\eta(|\varepsilon_n z|)w(z)\right|^2+\left|t_n\eta(|\varepsilon_n z|)w(z)\right|^{2_s^*}\mathrm{d}z. \tag{2.12}$$

通过(h_4)和等式(2.11)，结合函数 η 在 $B_{\delta/2}(0)\subset B_{\delta/\varepsilon_n}(0)$ 中取值为 1，得当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned}\|\Psi_n\|_{\varepsilon_n}^2&=\frac{1}{t_n^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(h\left(|t_n\Psi_n|^2\right)|\Psi_n|^2+|t_n\Psi_n|^{2_s^*}\right)\mathrm{d}z\\&\geq\int_{B_{\sigma/(2\varepsilon_n)}(0)}|w(z)|^{2_s^*}\mathrm{d}z\\&\geq t_n^{2_s^*-2}\int_{B_{\delta/2}(0)}|w(z)|^{2_s^*}\mathrm{d}z\\&\geq t_n^{2_s^*-2}w(\xi)^{2_s^*}\left|B_{\delta/2}(0)\right|,\end{aligned} \tag{2.13}$$

这里 $w(\xi)=\min\limits_{z\in B_{\delta/2}(0)}w(z)>0$。接下来我们证明：当 $\varepsilon_n\to 0$ 时，$t_n\to 1$。一方面，如果当 $\varepsilon_n\to 0$ 时，$t_n\to\infty$，利用式子(2.9)、(2.10)和(2.13)得 $\|w\|_0^2=\infty$，这产生一个矛盾。另一方面，如果当 $\varepsilon_n\to 0$ 时，$t_n\to 0$，根据式子(2.12)、(2.9)、(2.10)以及条件(k_1)、(k_2)得 $t_n^2\|\Psi_n\|_{\varepsilon_n}^2\to 0$，这与等式(2.5)矛盾。总结得出：当 $\varepsilon_n\to 0$ 时，$t_n\to t_0\in(0,\infty)$。现在对等式(2.12)两边取 $n\to\infty$，则

$$t_0^2\|w\|_0^2=\int_{\mathbb{R}^N}\left(h\left((t_0w)^2\right)(t_0w)^2+(t_0w)^{2_s^*}\right)\mathrm{d}z.$$

$w\in\mathcal{N}_0$ 即 $\left\langle I'_0(w),w\right\rangle=0$，得

$$\|w\|_0^2=\int_{\mathbb{R}^N}h\left(w^2\right)w^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}w^{2_s^*}\mathrm{d}x.$$

考虑上述两个等式，我们推断出

$$0=\int_{\mathbb{R}^N}\left(h\left(\left(t_0w\right)^2\right)-h\left(w^2\right)\right)w^2\mathrm{d}x+\left(t_0^{2_s^*-2}-1\right)\int_{\mathbb{R}^N}w^{2_s^*}\mathrm{d}x.$$

再根据(h_4)得 $t_0=1$。现在对等式(2.11)两边取 $n\to\infty$，得

$$\lim_{n\to\infty}J_{\varepsilon_n}\left(\Phi_n\right)=I_0\left(w\right)=c_0,$$

这与式子(2.8)矛盾。因此，此引理得证。

根据上述引理，令 $\sigma>0$，取 $\rho=\rho(\sigma)>0$ 使得 $M_\sigma\subset B_\rho(0)$，先定义函数 $\Upsilon:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 为

$$\Upsilon(x)=\begin{cases}x, & |x|<\rho;\\ \rho x/|x|, & |x|\ge\rho.\end{cases}$$

然后定义重心映射 $\beta_\varepsilon:\mathcal{N}_\varepsilon\to\mathbb{R}^N$ 为

$$\beta_\varepsilon(u):=\frac{1}{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2}\int_{\mathbb{R}^N}\Upsilon(\varepsilon x)|u(x)|^2\mathrm{d}x.$$

通过 Lebesgue 控制收敛定理以及数列 $\{y_n\}\subset M\subset M_\sigma\subset B_\rho(0)$，易得 β_ε 在 $y\in M$ 一致满足下列极限

$$\lim_{\varepsilon\to0}\beta_\varepsilon\left(\Phi_\varepsilon(y)\right)=y. \tag{2.14}$$

接下来定义 Nehari 流形的一个子集如下

$$\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon=\left\{u\in\mathcal{N}_\varepsilon:J_\varepsilon(u)\le c_0+h_1(\varepsilon)\right\},$$

其中 $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$，且当 $\varepsilon\to0$ 时，$h_1(\varepsilon)\to0$。实际上，固定 $y\in M$，由引理 2.1.3 得当 $\varepsilon\to0$ 时，$h_1(\varepsilon)=\left|J_\varepsilon\left(\Phi_\varepsilon(y)\right)-c_0\right|\to0$。因此 $\Phi_\varepsilon(y)\in\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon$ 即对任意 $\varepsilon>0$，$\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon\ne\varnothing$。现在我们给出 $\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon$ 和重心映射 β_ε 之间的关系，并加以证明。

引理 2.1.4 对任意 $\sigma>0$，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{u\in\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon}\operatorname{dist}\left(\beta_\varepsilon(u),M_\sigma\right)=0.$$

证明：令当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to0$，则存在 $\{u_n\}\subset\tilde{\mathcal{N}}_{\varepsilon_n}$ 使得

$$\sup_{u\in\tilde{\mathcal{N}}_{\varepsilon_n}}\inf_{y\in M_\sigma}\left|\beta_{\varepsilon_n}(u)-y\right|=\inf_{y\in M_\sigma}\left|\beta_{\varepsilon_n}(u)-y\right|+o_n(1).$$

因此只要证明存在 $\{y_n\}\subset M_\sigma$，使得下式成立即可

$$\lim_{n\to\infty}\left|\beta_{\varepsilon_n}(u_n)-y\right|=0. \tag{2.15}$$

利用引理 1.3.1 得，对任意 $t\ge0$，有 $I_0(t|u_n|)\le J_{\varepsilon_n}(tu_n)$，根据 $\{u_n\}\subset\tilde{\mathcal{N}}_{\varepsilon_n}\subset\mathcal{N}_{\varepsilon_n}$，可得

$$c_0\le\max_{t\ge0}I_0(t|u_n|)\le\max_{t\ge0}J_{\varepsilon_n}(tu_n)=J_{\varepsilon_n}(u_n)\le c_0+h_1(\varepsilon_n), \tag{2.16}$$

由此推出当 $n\to\infty$ 时，$J_{\varepsilon_n}(u_n)\to c_0$。再利用命题 2.1.1，得存在 $\{\tilde{y}_n\}\subset\mathbb{R}^N$ 使得，当 n 充分大时，$y_n=\varepsilon_n\tilde{y}_n\in M_\sigma$。作变量替换 $z=x-\tilde{y}_n$，则

$$\beta_{\varepsilon_n}(u_n)=y_n+\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Upsilon(\varepsilon_nz+y_n)-y_n\right)\left|u_n(z+\tilde{y}_n)\right|^2\mathrm{d}z}{\int_{\mathbb{R}^N}\left|u_n(z+\tilde{y}_n)\right|^2\mathrm{d}z}.$$

最后根据 $\varepsilon_nx+y_n\to y_0\in M_\sigma$，可得 $\beta_{\varepsilon_n}=y_n+o_n(1)$。因此，式子(2.15)成立即此引理得证。

现在我们将证明 M 的拓扑结构与辅助问题(2.3)解的多重性之间的关系。

定理 2.1.1 对任意 $\sigma>0$ 使得 $M_\sigma\subset\Lambda$，存在 $\tilde{\varepsilon}_\sigma>0$ 使得，对任意 $\varepsilon\in(0,\tilde{\varepsilon}_\sigma)$，辅助问题(2.2)有至少 $cat_{M_\sigma}(M)$ 个非平凡解。

证明： 考虑 $\sigma>0$ 使得 $M_\sigma\subset\Lambda$，利用方程(2.14)，引理 2.1.3 以及引理 2.1.4，类似参考文献[15]的讨论，可推断出存在 $\tilde{\varepsilon}_\sigma>0$，对任意 $\varepsilon\in(0,\tilde{\varepsilon}_\sigma)$，映射链

$$M\xrightarrow{\Phi_\varepsilon}\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon\xrightarrow{\beta_\varepsilon}M_\sigma$$

是有定义的且 $\beta_\varepsilon\circ\Phi_\varepsilon$ 同伦于恒等映射 $Id:M\to M_\sigma$。结合参考文献[4]中的引理 2.2.2 推断出

$$cat_{\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon}\left(\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon\right)\ge cat_{M_\sigma}(M). \tag{2.17}$$

结合命题 2.1.1 和 Ljusternik-Schnirelmann 理论可得 J_ε 在 $\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon$ 上存在至少 $cat_{\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon}\left(\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon\right)$ 个临界点。再利用推论 2.1.1 可得方程(2.2)有至少 $cat_{M_\sigma}(M)$ 非平凡解。

2.2. 定理 1.1 的证明

在这一部分我们将证明我们的主要结果。实际上，我们需要证明定理 2.1.1 中得到的解满足不等式(2.3)即辅助问题的解在一定条件下是方程(2.1)的解。

引理 2.2.1 取 $\varepsilon_n\to0$，令 $u_n\in\tilde{\mathcal{N}}_{\varepsilon_n}$ 是方程(2.2)的一个解，则 $J_{\varepsilon_n}(u_n)\to c_0$。而且，$v_n(x):=\left|u_n(\cdot+\tilde{y}_n)\right|$ 满足 $v_n\in L^\infty\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ 且存在常数 $C>0$ 使得，对任意 $n\in N$，有

$$\|v_n\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)}\le C,$$

这里的 $\tilde{y}_n$ 是由命题 2.1.1 给出的。进一步有

$$\lim_{|x|\to\infty}|v_n(x)|=0$$

证明： 利用 $J_{\varepsilon_n}(u_n)\le c_0+h_1(\varepsilon_n)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}h_1(\varepsilon_n)=0$ 以及引理 2.1.4 中的方程(2.16)，可得 $J_{\varepsilon_n}(u_n)\to c_0$。类似参考文献[6]中引理 2.8 证明，易得 $\{v_n\}$ 在 $L^\infty\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ 上是有界的且 $\lim\limits_{|x|\to\infty}|v_n(x)|=0$。

定理 1.1 的证明 该证明分为如下 2 步：

第 1 步： 证明方程(2.2)的解是方程(2.1)的解。即取 σ 使得 $M_\sigma\subset\Lambda$，证明存在 $\hat{\varepsilon}_\sigma>0$ 使得对任意 $\varepsilon\in(0,\hat{\varepsilon}_\sigma)>0$，方程(2.2)的任意解 $u_n\in\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon$ 都满足

$$\|u_{\varepsilon_n}\|^2_{L^\infty\left(\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_{\varepsilon_n}\right)}\le a. \tag{2.18}$$

这里我们利用反证法。假设上式不成立，则可以找到一个序列 $\varepsilon_n\to0$，对任意 $u_n:=u_{\varepsilon_n}\in\tilde{\mathcal{N}}_{\varepsilon_n}$，使得

$$\|u_n\|^2_{L^\infty\left(\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_{\varepsilon_n}\right)}>a. \tag{2.19}$$

由于 $J_{\varepsilon_n}(u_n)\le c_0+h_1(\varepsilon_n)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}h_1(\varepsilon_n)=0$，根据引理 2.1.4 中的方程(2.16)可得 $J_{\varepsilon_n}(u_n)\to c_0$。然后利用命题 2.1.2 可得，存在 $\tilde{y}_n\subset\mathbb{R}^N$ 使得对 $y_0\in M$，有 $\varepsilon_n\tilde{y}_n\to y_0$。

因此，我们可以找到一个 $r>0$，使得对所有的 $n\in N$ 有 $B_r(\varepsilon_n\tilde{y}_n)\subset\Lambda$。也就是说对任意 $n\in N$ 当 n 充分大时，$B_{\frac{r}{\varepsilon_n}}(\tilde{y}_n)$。故

$$\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_{\varepsilon_n}\subset\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{\varepsilon_n}}(\tilde{y}_n).$$

根据引理 2.2.1 知存在 $R>0$ 使得对任意 $n\in N$，当 $|x|\ge R$ 有 $v_n^2\le a$，这里 $v_n(x):=|u_n(\cdot+\tilde{y}_n)|$。故对任意 $x\subset\mathbb{R}^N\setminus B_R(\tilde{y}_n), n\in N$，有 $|u_n|^2\le a$。因此存在 $v\in N$，对任意 $n\ge v$ 和 $\frac{r}{\varepsilon_n}>R$ 使得

$$\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_{\varepsilon_n}\subset\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{\varepsilon_n}}(\tilde{y}_n)\subset\mathbb{R}^N\setminus B_R(\tilde{y}_n),$$

由此可以推断出对任意 $x\subset\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_{\varepsilon_n}$ 和 $n\ge v$，有 $|u_n|^2\le a$。对照方程(2.19)这就产生了一个矛盾即证明了我们的目标。现在令 $\varepsilon_\sigma=\min\{\hat{\varepsilon}_\sigma,\tilde{\varepsilon}_\sigma\}$，固定 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_\sigma)$，利用定理 2.1.1，得方程(2.1)有至少 $cat_{M_\sigma}(M)$ 个解。

第 2 步：证明方程(2.1)的解是方程(1.3)的解。如果 $u_\varepsilon\in\tilde{\mathcal{N}}_\varepsilon$ 是这些解中的一个，利用 g 的定义和方程(2.18)可以推断出 u_ε 也是方程(2.2)的解。现在取 $\hat{u}_\varepsilon(x)=u_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$，可以得到 u_ε 也是方程(1.3)的一个解。

参考文献

[1] Griffiths, D. (2004) Introduction to Quantum Mechanics. 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1-2.

[2] 毛安民, 李安然. 薛定谔方程及薛定谔-麦克斯韦方程的多解[J]. 数学学报, 2012, 55(3): 425-436.

[3] d'Avenia, P. and Squassina, M. (2018) Ground States for Fractional Magnetic Operators. *ESAIM*: *Control*, *Optimisation and Calculus of Variations*, **24**, 1-24. https://doi.org/10.1051/cocv/2016071

[4] Zhang, B., Squassina, M. and Zhang, X. (2017) Fractional NLS Equations with Magnetic Field, Critical Frequency and Critical Growth. *Manuscripta Mathematica*, **155**, 115-140. https://doi.org/10.1007/s00229-017-0937-4

[5] Rabinowitz, P. (1992) On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations. *ZAMP*, **43**, 270-291. https://doi.org/10.1007/BF00946631

[6] Ambrosio, V. (2019) Existence and Concentration Results for Some Fractional Schrödinger Equations in RN with Magnetic Fields. *Communications in Partial Differential Equations*, **44**, 637-680. https://doi.org/10.1080/03605302.2019.1581800

[7] Alves, C.O., Figueiredo, G.M. and Furtado, M.F. (2011) Multiple Solutions for a Nonlinear Schrödinger Equation with Magnetic Fields. *Communications in Partial Differential Equations*, **36**, 1565-1586. https://doi.org/10.1080/03605302.2011.593013

[8] Figueiredo, G.M. and Siciliano, G. (2016) A Multiplicity Result via Ljusternik-Schnirelmann Category and Morse Theory for a Fractional Schrödinger Equation in RN. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **23**, 12. https://doi.org/10.1007/s00030-016-0355-4

[9] Ambrosio, V. (2017) Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Fractional Schrödinger Equations via Penalization Method. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **196**, 1-20. https://doi.org/10.1007/s10231-017-0652-5

[10] Ambrosio, V. and d'Avenia, P. (2018) Nonlinear Fractional Magnetic Schrödinger Equation: Existence and Multiplicity. *Journal of Differential Equations*, **264**, 3336-3368. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.11.021

[11] Ambrosio, V. (2018) Multiplicity and Concentration Results for Fractional Schrödinger-Poisson Equations with Magnetic Fields and Critical Growth. *Potential Analysis*, **52**, 565-600. https://doi.org/10.1007/s11118-018-9751-1

[12] Ji, C. and Vicentiu, D. (2020) Multiplicity and Concentration of Solutions to the Nonlinear Magnetic Schrödinger Equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, 115. https://doi.org/10.1007/s00526-020-01772-y

[13] Chang, K.C. (2005) Methods in Nonlinear Analysis. Springer-Verlag, Berlin.

[14] Willem, M. (1996) Minimax Theorems Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Vol. 24, Birkhauser, Boston.

[15] Cingolani, S. and Lazzo, M. (1997) Multiple Semi-Classical Standing Waves for a Class of Nonlinear Schrödinger Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **10**, 1-13. https://doi.org/10.12775/TMNA.1997.019